Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102839**

ID профиля: **282696**

Вариант 21

Чистовик

N1

Пусть $a_1 = a$, разность арифметической прогрессии d, $d>0$ (т.к. по условию возрастающая)

Выразим S:

$$S = 7a + \frac{7\cdot(7-1)}{2}d = 7a + 21d$$

По условию:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{17} > S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14} < S+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+7d)(a+16d) > S+27 \\ (a+10d)(a+13d) < S+60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+23ad+112d^2 > 7a+21d+27 \\ 7a+21d+60 > a^2+23ad+130d^2 \end{cases}$$, сложим

неравенства: $a^2+23ad+112d^2+7a+21d+60 > 7a+21d+27+a^2+23ad+130d^2$

$33 > 18d^2 \Rightarrow d^2 < \frac{33}{18} < 2$, но $d>0$ и $d \in Z \Rightarrow d=1$

Подставим $d=1$ в неравенства:

$$\begin{cases} a^2+23a+112 > 7a+48 \\ 7a+81 > a^2+23a+130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+16a+64 > 0 \\ a^2+16a+49 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+8)^2 > 0 \\ a^2+16a+49 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -8 \\ a^2+16a+49<0 \end{cases}$$

$a^2+16a+49<0$

$D = 256-196 = 60$

$a = \frac{-16\pm\sqrt{60}}{2} = -8\pm\sqrt{15}$

$a \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15})$

$$\begin{cases} a \in [-11;-5] \\ a \neq -8 \end{cases}$$

I. $-8-\sqrt{15} \vee -11$
$3 \vee \sqrt{15}$
$9 < 15$

II. $-8-\sqrt{15} \vee -12$
$4 \vee \sqrt{15}$
$16 > 15$

III. $-8+\sqrt{15} \vee -5$
$\sqrt{15} \vee 3$
$15 > 9$

IV. $-8+\sqrt{15} \vee -4$
$\sqrt{15} \vee 4$
$15 < 16$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$

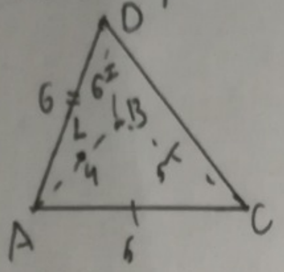
21102839 (U282696 M1298559)

Чистовик

№2

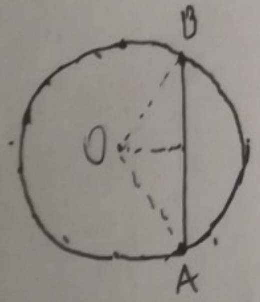
1. CD параллелен оси цилиндра, при этом C и D лежат на его боковых поверхностей, значит CD – одна из образующих цилиндра

2. Рассмотрим тетраэдр ABCD:



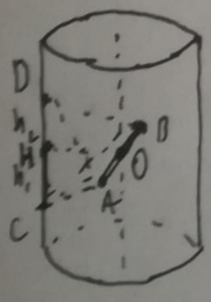
Пусть $AL = LB$, $\triangle ADB$ – равноб, $\triangle ACB$ – равноб =>
=> (LDC) – ось симметрии ABCD, при этом $AB \perp (LDC)$ и $DC \in (LDC)$ =>
$\angle(AB; DC) = 90^\circ$

3. $\angle(AB; DC) = 90^\circ$, при этом DC перпендикулярен основанию цилиндра, значит AB перпендикулярна оси цилиндра и параллельна его основанию. Рассмотрим сечение цилиндра, параллельное основанию и содержащее AB:



Пусть r – радиус цилиндра, тогда т.к. AB – хорда, то $2r \geq AB \Rightarrow 2r \geq 4 \Rightarrow r \geq 2$
$r = 2$, когда AB – диаметр. Найдём значения CD, когда AB – диаметр.

4.



Проведём $OH \perp CD$ и $OH \perp AB$, $OA = OB$, тогда

1. $OH = r = 2$, тогда: $CA = 5 = \sqrt{AO^2 + OH^2 + CH^2} = \sqrt{8 + h_1^2} \Rightarrow 25 = 8 + h_1^2 \Rightarrow h_1 = \sqrt{17}$

2. $AD = 6 = \sqrt{AO^2 + OH^2 + HD^2} = \sqrt{8 + h_2^2} \Rightarrow 36 = 8 + h_2^2 \Rightarrow h_2^2 = 28 \Rightarrow h_2 = 2\sqrt{7}$

5. Возможно 2 случая I) C и D по одну сторону от H II) по разные

I) $CD = |h_1 - h_2| = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

II) $CD = h_1 + h_2 = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Ответ: $2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$

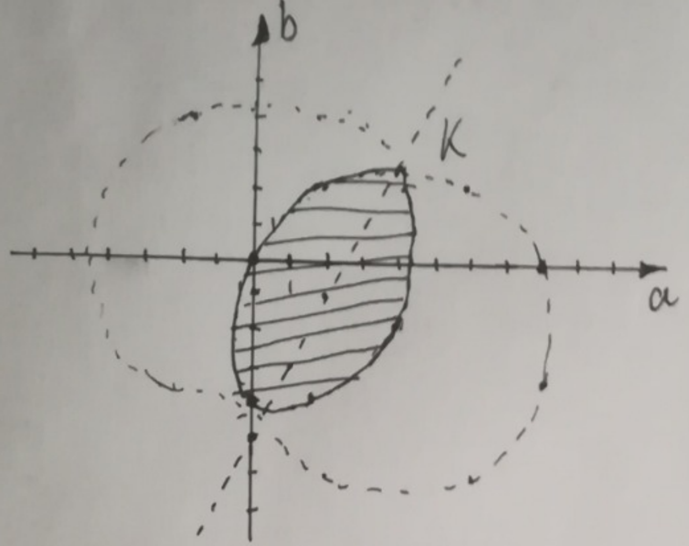
21102839 (U282696 M1298559)

Чистовик

N3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b^2)\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$$

Построим в плоскости $(a;b)$ $a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)$



При $8a-4b\le 20$

$b\ge 2a-5$

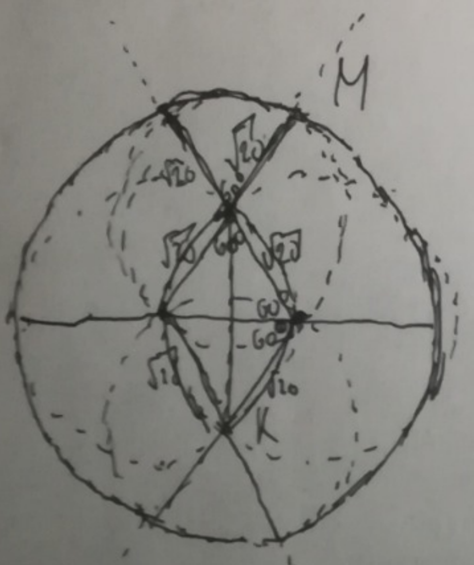
При $b<2a-5$ Получила фигуру K

$a^2+b^2\le 20$

$a^2+b^2-8a+4b\le 0$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

Фигура M – объединение всех кругов с радиусами $\sqrt{20}$, центры которых лежат на фигуре K. Найдём её площадь:



$$S_M=2\left(\frac{\pi\cdot(2\sqrt{20})^2}{3}-\frac{(\sqrt{20})^2\cdot\sin(120^\circ)}{2}\right)+2\,\frac{\pi\cdot(\sqrt{20})^2}{6}=$$

$$=2\left(\frac{80\pi}{3}-\frac{20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)+\frac{20\pi}{3}=$$

$$=\frac{160\pi}{3}-10\sqrt{3}+\frac{20\pi}{3}=\frac{180\pi}{3}-10\sqrt{3}=$$

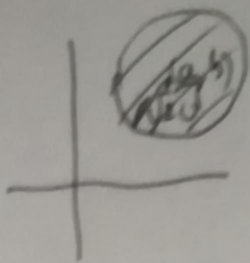
$$=60\pi-10\sqrt{3}$$

Ответ: $60\pi-10\sqrt{3}$

21102839 (U282696 M1298559)

№3 черновик

$(x-a)^2+(y-b^2)\le 20$

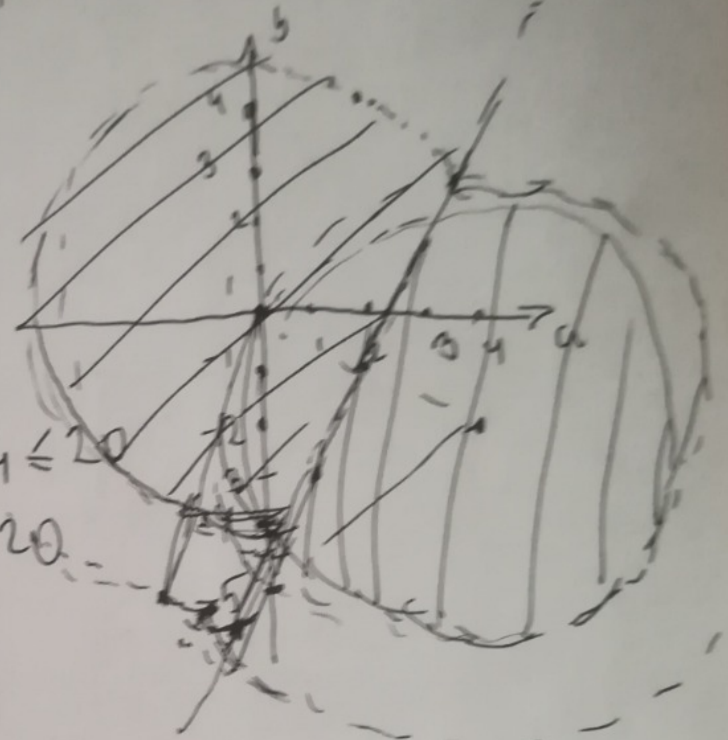


$a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)$

При $8a-4b<20$

$2a-b<5$

$b>2a-5$



$a^2+b^2\le 8a-4b$

$a^2-8a+b^2+4b\le 0$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

$b\le 2a-5$

$a^2+b^2\le\sqrt{20}$

21102839 (U282696 M1298559)

Черновик

N1

a, d

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7

$a, \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d \quad a+5d \quad a+6d$

0 1 3 6 10 15 21

$S = 7a + 21d = 7a + \frac{7 \cdot 6}{2} d = 7a + 21d$

$16 \times 7 = 112$

$a_8 \cdot a_{17} = (a+7d)(a+16d) > 7a+21d+27$

$10 \times 7 = 112$

$a_{11} \cdot a_{14} = (a+10d)(a+13d) < 7a+21d+60$

$a^2 + 23ad + 112d^2 > 7a + 21d + 27$

$a^2 + 23ad + 130d^2 < 7a + 21d + 60$

$112 - 48 = 64$

$a^2 + 23ad + 112d^2 > 7a + 21d + 27$

$7a + 21d + 60 > a^2 + 23ad + 130d^2$

$130 - 81 = 49$

$33 > 18d^2$ $\quad d \in \mathbb{Z}$, значит

$d^2 < \frac{33}{18} = 1 + \frac{15}{18}$

$d \in [-1; 0; 1]$ $\quad d \neq 0$, т.к. возраст. $d \neq -1$ т.к. возраст.

При $d = 0$ $\quad a^2 - 7a + 27$

$a^2 > 7a + 27$ $\quad d = 1$

$7a + 60 > a^2$

$112 - 48 = 64$

$130 - 81 = 45$

$$\begin{cases} a^2 + 23a + 112 > 7a + 21 + 27 \\ 7a + 21 + 60 > a^2 + 23a + 130 \end{cases}$$

$49 \times 4 = 196$

$\sqrt{15} \approx 3, \ldots$

$-8 + \sqrt{15} > -5$

$\sqrt{15} > 3$

$15 > 9$

$a^2 + 16a + 64 > 0 \quad (a+8)^2 > 0 \quad a \neq -8$

$a^2 + 16a + 49 < 0$

$D = 256 - 196 = 60$

$-8 - \sqrt{15} < -11$ $\quad -8 - \sqrt{15} > -12$

$3 < \sqrt{15}$ $\quad 4 > \sqrt{15}$

$9 < 15$ $\quad 16 > 15$

$-8 + \sqrt{15} < -4$

$\sqrt{15} < 4$

$15 < 16$

$a = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}$

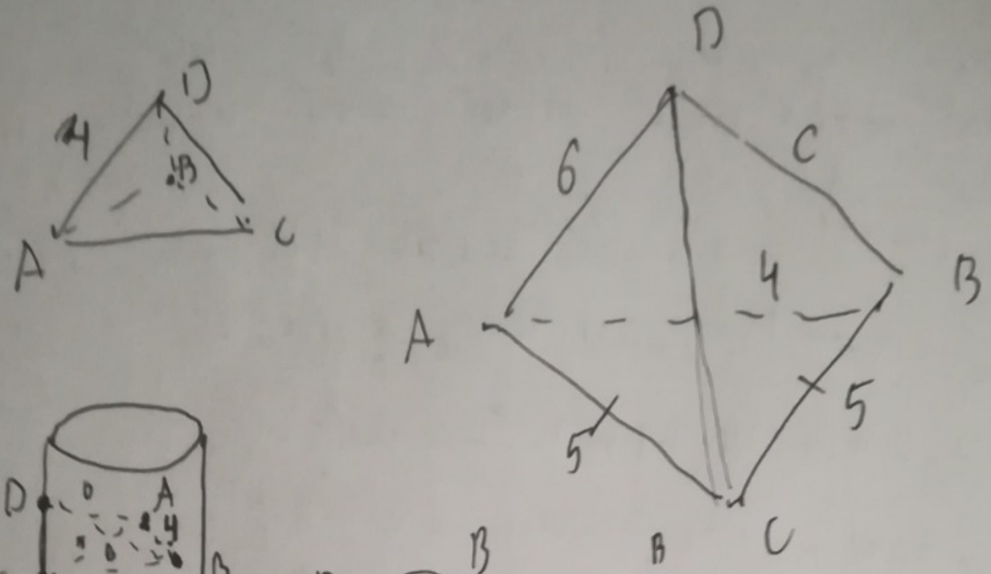
$a \in (-8 - \sqrt{15}; -8 + \sqrt{15})$ $\quad a \in [-11; -5]$

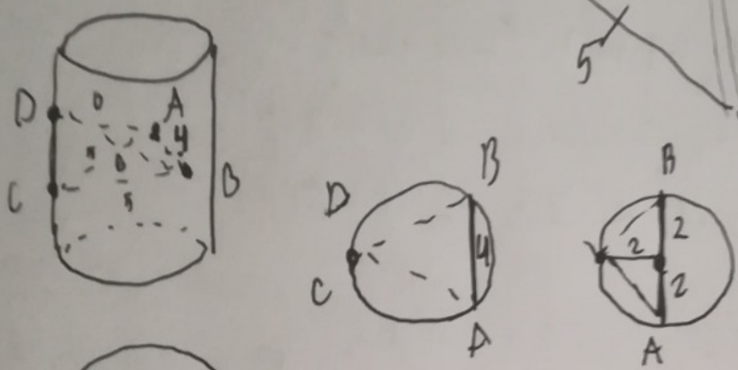
$-11, -10, -9, -7, -6, -5$

21102839 (U282696 M1298559)

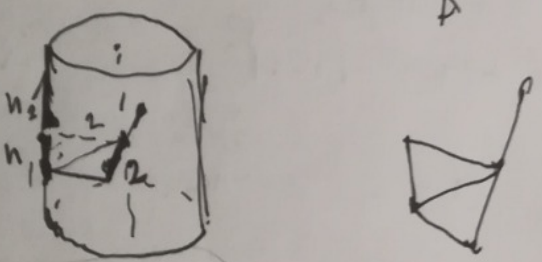
черновик

№2.





$$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}<5$$



$$\sqrt{2^2+2^2+h_1^2}=\sqrt{8+h_1^2}=5$$

$$8+h_1^2=25$$

$$h_1^2=17$$

$$h_1=\sqrt{17}$$

$$(CD)_1=2\sqrt{7}+\sqrt{17}$$

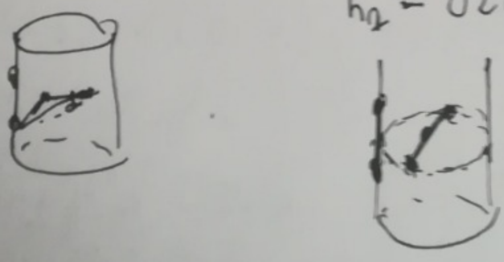
$$(CD)_2=2\sqrt{7}-\sqrt{17}$$

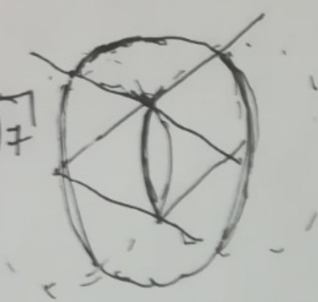
$$\sqrt{2^2+2^2+h_2^2}=6$$

$$8+h_2^2=36$$

$$h_2^2=28$$

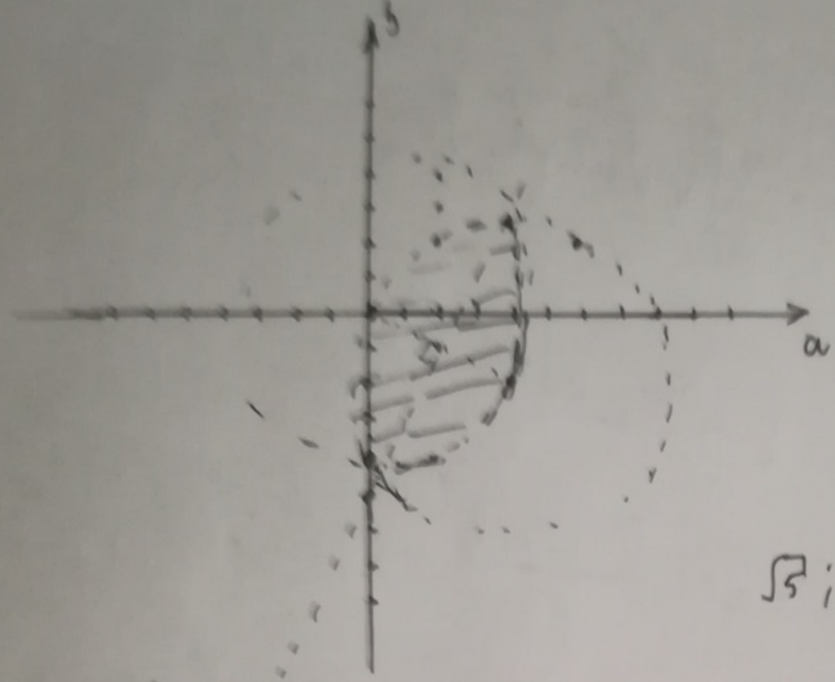
$$h_2=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$





21102839 (U282696 M1298559)

Черновик.



$\sqrt{5}$; $\sqrt{20}$

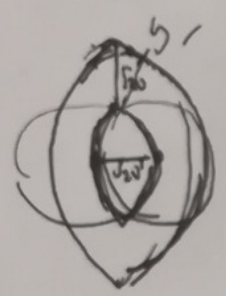
при $8a-4b\leq 20$

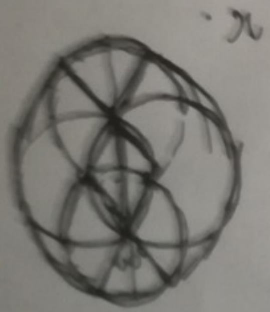
$4b \geq 8a-20$

$b \geq 2a-5$

$a^2+b^2-8a+4b\leq 0$

$(a-4)^2+(b+2)^2\leq 20$

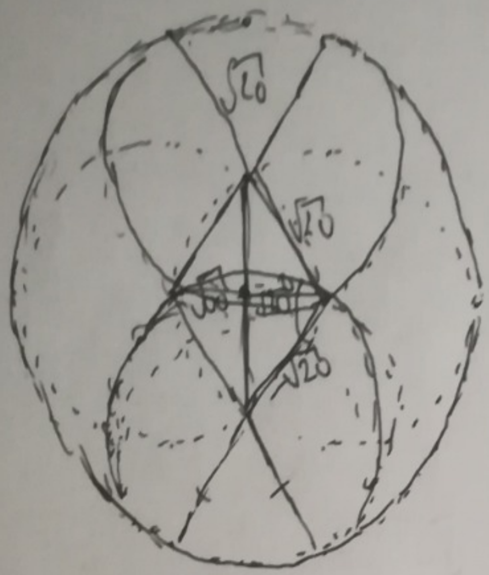


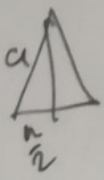


$r=\sqrt{26}$

21102839 (U282696 M1298559)

Черновик

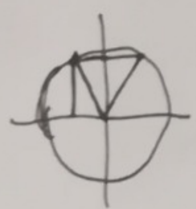




$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (2\sqrt{20})^2}{3} \right) +$

$2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (2\sqrt{20})^2}{3} - \frac{(\sqrt{20})^2 \cdot \sin(20)}{2} \right) + 2 \cdot \pi (\sqrt{20})^2$



$\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

21102839 (U282696 M1298559)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

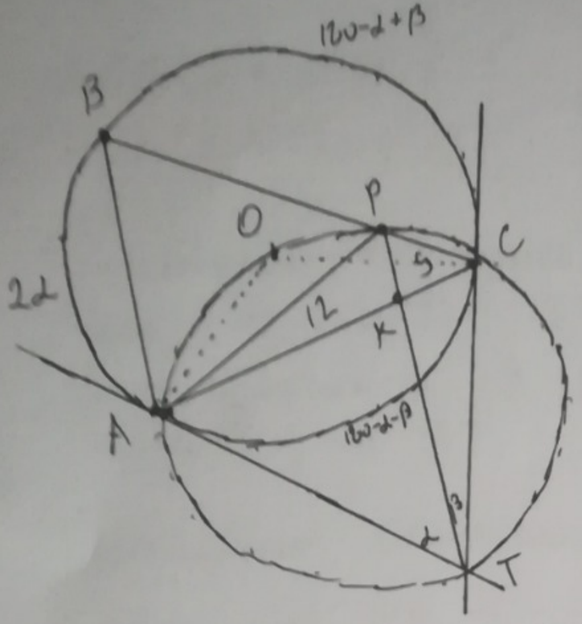
Шифр: **21102839**

ID профиля: **282696**

Вариант 21

Чистовик

N6



Дано
$S_{APK}=12$
$S_{CPK}=9$
$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{9}{7}$
Найти:
а) S_{ABC} – ?
б) AC – ?

Решение

1. $\angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow \angle AOC = 180 - \angle CTA \Rightarrow T$ лежит на окр., проходящей через A, O, C
2. Пусть $\angle ATP = \alpha$, $\angle CTP = \beta$, тогда $\breve{AC} = 180 - \alpha - \beta$, т.к. $\angle AOC = 180-\alpha-\beta$
3. $\angle CAT = \frac{1}{2}\breve{AC} = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$
4. $\angle PTA = \angle BCA = \alpha$, т.к. опираются на $\breve{AP} \Rightarrow \breve{AB} = 2\angle BCA = 2\alpha$
6. $\breve{BC} = 360 - 2\alpha - 180 + \alpha + \beta = 180 - \alpha + \beta$
7. $\angle BAC = \frac{1}{2}\breve{BC} = 90 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$
8. $\angle BAT = \angle BAC + \angle CAT = 90 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180 - \alpha$
9. $\angle BAT = 180 - \alpha$, $\angle PTA = \alpha \Rightarrow AB \parallel PT$
10. У ΔAPK и ΔKPC одна высота $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{4}{3}$.
11. По т. Фалеса: $\frac{BP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$
12. $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \frac{BC \cdot AC}{PC \cdot KC} \Rightarrow S_{ABC} = S_{KPC} \cdot \frac{BC \cdot AC}{PC \cdot KC} = 9\left(\frac{7}{3}\right)^2 = 49$

Ответ: а) 49

21102839 (U282696 M1298560)

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=35=5^1\cdot 7^1 \\ НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2} \\ b=5^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}, \\ c=5^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}, \end{array} \begin{array}{l} \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=18 \\ \max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=16 \\ \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1 \\ \min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1 \end{array}$$

Рассмотрим количество троек $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

Если 1 из них 18: $3\cdot 17^2$

Если 2 из них 18: $3\cdot 17$

Если 3 из них 18: 1

Итого: $3\cdot 17^2+3\cdot 17+1=867+51+1 = 919$

Рассмотрим количество троек $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

Если 1 из них 16: $3\cdot 15^2$

Если 2 из них 16: $3\cdot 15$

Если 3 из них 16: 1

Итого: $3\cdot 15^2+3\cdot 15+1=675+45+1 = 721$

Тогда всего троек a, b, c:

$919\cdot 721 = 662599$

Ответ: 662599

Чистовик.

N 5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \quad \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \quad \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

На ОДЗ:

$2\log_{2x-3}(x+1) \quad 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \quad \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

Пусть 2 равных числа это t и t, тогда третье $t-1$, тогда:

$t \cdot t \cdot (t-1) = 4$

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

$t = 2$

$(t-2)(t^2+t+2) = 0$

$t^2+t+2=0$

$D = 1-8<0 \Rightarrow \quad t=2$, значит эти числа 2, 2, 1

Значит надо проверить, когда равно 1 и 2.

1. $\sqrt{2x-3} = x+1$
2. $2x^2-3x+5 = (2x-3)^2$
3. $x+1 = 2x^2-3x+5$

По ОДЗ: $x > 1{,}5$, $x \neq 2$

2 случая

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-3} = x+1 \\ 2x-3 = x+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3 = x^2+2x+1 \\ x = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -4 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$x = 4$ – подходит, т.к. тогд

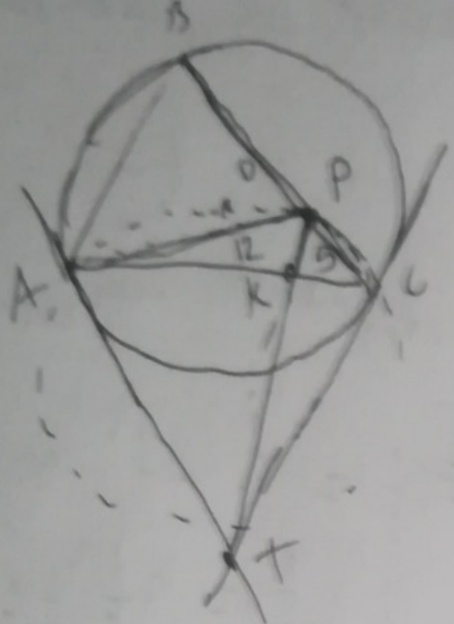
$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2$

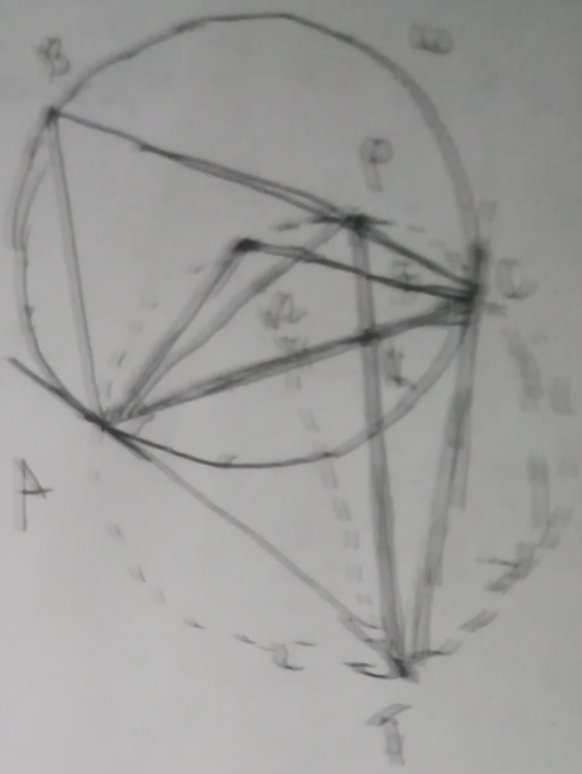
$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 1$

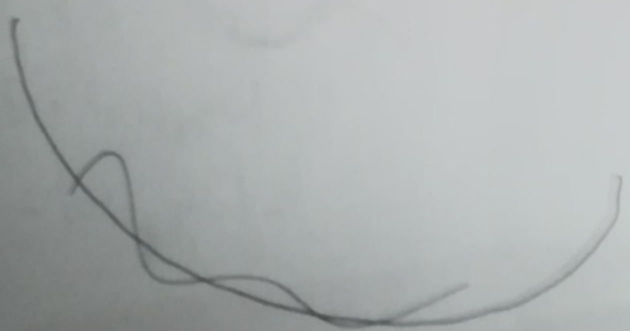
$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2$

Ответ: 4

Черновик







Черновик

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$t, t, t-1$

$t, t, t-1$ $x-1$

$t^2(t-1)$

$2\log_{2x-3}(x+1)$ $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$t^2(t-1)=4$

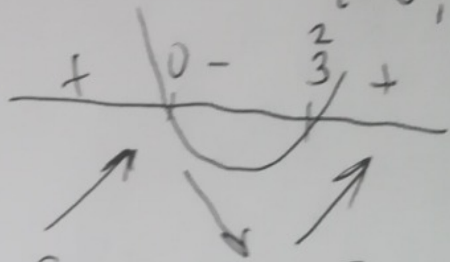
$t^3-t^2-4=0$

	1	-1	-4
1	1	0	-4
2	1	1	-2
4	1	+3	+8
-1	1	-2	-2
-2	1	-3	2
-4	1		

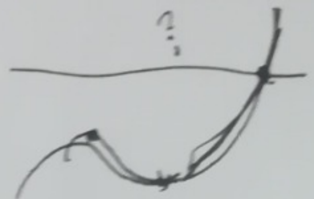
$f(t)=t^3-t^2-4$

$f'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)$

$t=0;\ t=\frac{2}{3}$



$f(0)=-4$ $f(\frac{2}{3})=\frac{8}{27}-\frac{4}{5}-4$



~~$t^3-t^2+4=0$~~

1	-1	4
1	1	
-1	1	

$\log_4(16)=2$

$2\log_{16}(16)=2$

21102839 (U282696 M1298560)

Черновик

№1

НОД$(a,b,c)=35=5^1\cdot 7^1$

НОК$(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16}$

$a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$ $\quad \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=18$

$b=5^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$ $\quad \max(\alpha_2,\beta_2;\gamma_2)=16$

$c=5^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$ $\quad \alpha_1,\alpha_2\ldots\geq 1$

$\alpha_1=18$, тогда $\beta_1\in[1;17]$ $\Rightarrow 17^2$ вариантов

$\gamma_1\in[1;17]$

$(3\cdot 17^2+3\cdot 17+1)\cdot(3\cdot 15^2+3\cdot 15+1)=$

$(864+51+1)\cdot(675+45+1)=$

$=916\cdot 721$

18
18
18

1 − 16,

$3\cdot 15^2+3\cdot 15+1$

~~3 285 +~~

660436

$17\cdot 17=119+17=289$; $289\cdot 3=867$

51

519

$15\cdot 15=75+15=225$; $225\cdot 3=675$

$916\cdot 721=916+1832+6412=660436$

$915\cdot 721=519+1338+6436=662655$

$721\cdot 3=2163$

$721\cdot 919=6489+2721\ldots=662599$

$x+1=2x-3$

$x=2$

$2x-3=x^2+2x+1$

$2x-3=x^2+2x+1$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$32-12+5=25$

2 $\quad$ 1 $\quad \log_5(25)=2$

21102839 (U282696 M1298560)

Черновик

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5$

$9-40<0$

$u=\sqrt{2x-3}$

$V=x+1$

$w=2x^2-3x+5$

$t=$

$\log_u(V)$ $4\log_w(u^2)$ $\log_v(w)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\log_{\underbrace{2x^2-3x+5}}(2x-3)^2$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$D=9-40<0 \Rightarrow 2x^2-3x+5>0$

$x+1>0$ $x>-1$ $x\neq 2$ $x>1,5$ $x\neq 2$

$x+1\neq 1$ $2x-3>0$

$x\neq 0$ $x>\frac{3}{2}$

$2\log_{2x-3}(x+1)$ $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

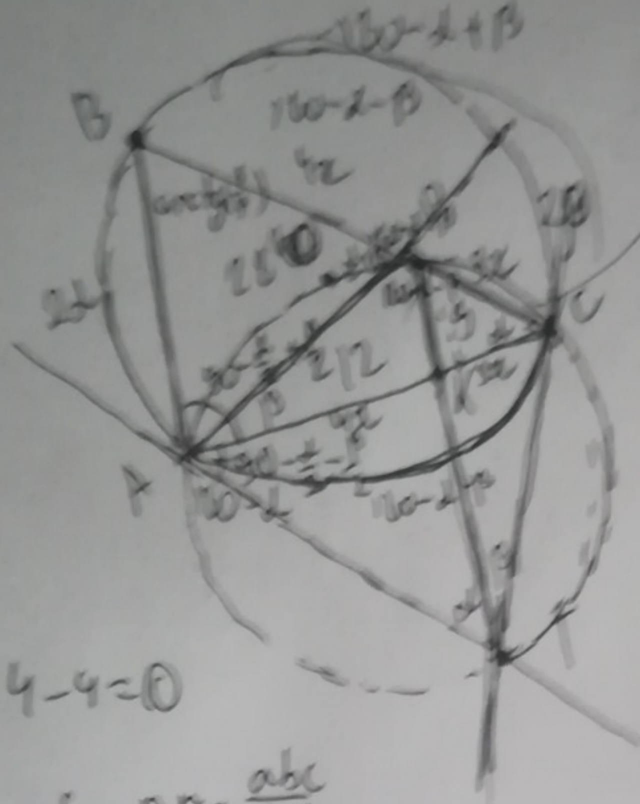
$2\log_{2x-3}(x+1)=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ $x=\frac{3}{2}$

$\log_{2x-3}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_{2x-3}(x+1)=\dfrac{1}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$\frac{5}{2}$

21102839 (U282696 M1298560)



$360-(2\alpha+180-\alpha-\beta)=$

$=180-\alpha+\beta$

$t=2$

$8-4-4=0$

$S=pr=\frac{abc}{4R}$

1 − 1 − 4

2 1 1

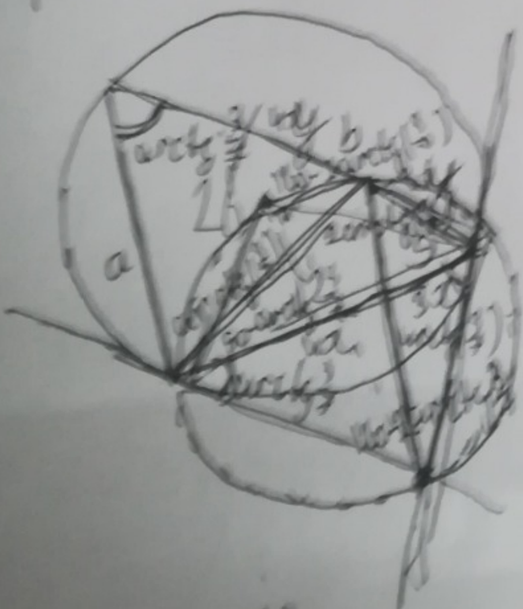
$90-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$

$9\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}\cdot 9\ (49)$

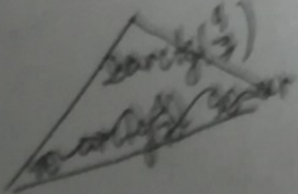
$90-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$

180

$\frac{AK}{KC}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

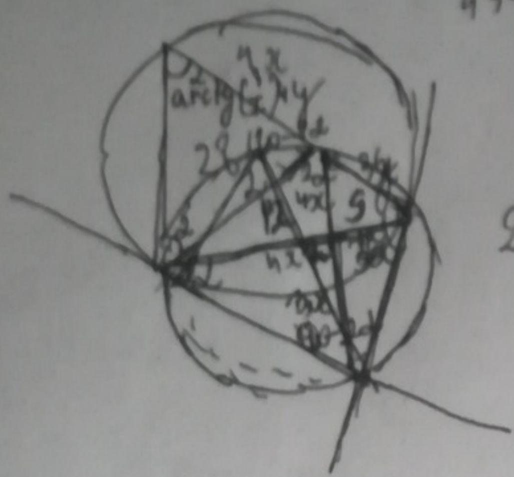


$\frac{ab\cdot\sin(\operatorname{arctg}(\frac{3}{4}))}{2}=49$



21102839 (U282696 M1298560)

$49-21=28$



$$\begin{array}{ccccc} & 1 & -1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$x+1=2x-3$

$x=4$

$2x^2-3x+5=2x-3$

$2x^2-5x+8=0$

$D=25-32\cdot 2<0$

$x+1=2x^2-3x+5$

$2x^2-4x+4=0$

$2x^2-3x+5=x+1$

$2x^2-4x+4=0$

x^2-2x+2

$(x-1)^2=0$

$x=1$

$x=1 \Rightarrow \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=1$

$\log_2(2)$

$x=1 \Rightarrow 2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x-5)$

$x+1=2x^2-3x-5$

$x^2+2x+1=2x^2-3x-5$

$x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)$

21102839 (U282696 M1298560)