Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102801**

ID профиля: **77331**

Вариант 21

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

Если $a^2+b^2 \le \min(8a-4b,20)$, то $\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$

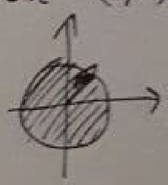
$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

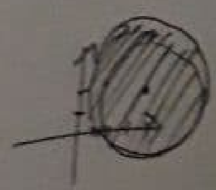
$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \end{cases}$$

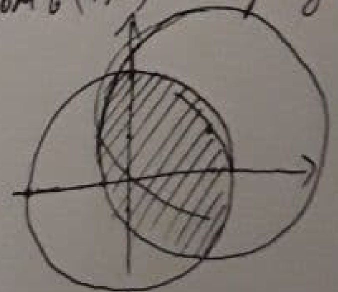
из $a^2+b^2 \le 20$ следует, что мн-во точек (a,b) находятся в окружн.
с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{20}$



а из $(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$ с центром в $(4;2)$ и радиусом $\sqrt{20}$

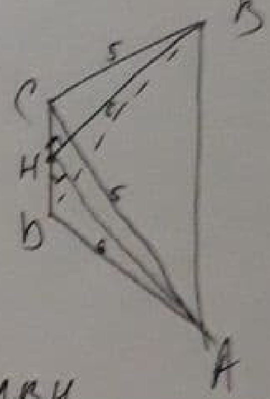


Тогда мн-во точек (a,b) —



Чистовик/3 стр

№2



Если отпустить перпендикуляр на CD из вершины A и B, то они находятся на одной точке т.к. $BC = AC$ и $BD = AC$. тогда плоскость ABH перпендикулярна CD, а т.к. CD параллельно оси цилиндра, то она перпендикулярна основаниям. Тогда плоскость ABH паралл. основанию цилиндра. $\Rightarrow$ радиус описанной окружности $\triangle ABH$ равен радиусу цилиндра, а т.к. $AB = 4$.

Диаметр $\geq AB \Rightarrow 2R \geq 4 \Rightarrow R \geq 2$, если R-наименьший, то

$R = 2$ $\Rightarrow$ AB-диаметр. Т.к. $\triangle BCD = \triangle ACD \Rightarrow AH = BH \Rightarrow$

$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow AH = BH = 2\sqrt{2}$

$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$ $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$

$CD = CH + DH = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

Чистовик/2 стр

21102801 (U77331 M1304158)

№1.

$S = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{7}{2}\cdot(2a_1+6d) = 7(a_1+3d)$ $\qquad a_i \in \mathbb{Z} \qquad d>0$

$a_8 = a_1+7d \qquad a_{17} = a_1+16d \qquad a_{11} = a_1+10d \qquad a_{14} = a_1+13d$

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d) > S+27\\ (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2 > S+27 \\ a_1^2+23a_1d+130d^2 < S+60\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2-S-27>0 \\ a_1^2+23a_1d+112d^2-S-27 < 33-18d^2\end{cases} \Rightarrow$$

$$0 < a_1^2+23a_1d+112d^2-S-27 < 33-18d^2$$

$$33-18d^2>0$$

$$33>18d^2$$

т.к. $a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$ и т.к. $\{a_i\}$ - возраст. $\Rightarrow d>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d=1$ если $d \geq 2 \Rightarrow 18d^2 \geq 72 \Rightarrow 33>72$ - [illegible]

$a_1^2+23a_1+112-7(a_1+3)-27>0$

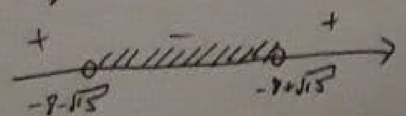
$a_1^2+16a_1+64>0 \Rightarrow (a_1+8)^2>0 \Rightarrow a_1 \neq -8$

$a_1^2+23a_1+130-7(a_1+3)-60<0$

$a_1^2+16a_1+49<0$

$\cancel{D}\ \frac{D}{4} = 64-49 = 15$

$a_{1_1} = -8-\sqrt{15} \qquad a_{1_2} = -8+\sqrt{15}$



$\sqrt{15}<4 \Rightarrow \begin{matrix} -8-\sqrt{15} > -12 \\ -8+\sqrt{15} < -4 \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \in [-11;-5] \cap \{-8\}$

$\boxed{\text{Чистовик / 1стр}}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$a^2+b^2\le 8a-4b$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ (x-a)^2+(y-b)^2\le 20\end{cases}$$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

Черновик

$S = \sum_{i=1}^{7} a_i \qquad a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_3 \cdot a_{11} > S + 27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7$

$d > 0$

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = a_1 + 13d$

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 6d) > \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) + 60 \end{cases}$$

$112 - 48 = 64$

$130 - 81 = 49$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 - \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) - 27 > 0$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 - \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) - 27 < 33 - 18d^2$

$33 - 18d^2 > 0$

$33 > 18d^2$

$d^2 < \frac{33}{18}$

$0 < d < \sqrt{\frac{33}{18}}$

$d \in \mathbb{Z}$

$d = 1$

Черновик

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > \frac{7}{2}(2a_1 + 6) + 27$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1 + 8)^2 > 0$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$\sqrt{15} < 4$

$-8 - \sqrt{15} > -12$

$\frac{D}{4} = 64 - 49 = 15$

$a_1 = -8 + \sqrt{15}$

$a_1 = -8 - \sqrt{15}$

$a_1 \in (-8 - \sqrt{15}, -8 + \sqrt{15})$

$a_1 \in [-11, -5]$

21102801 (U77331 M1304158)

$x+5>6$

$x>1$

$5+6>x$

$x<11$

$r\geq 2$

$2\alpha+\beta=180$

$\alpha>\beta$

$\beta<60$

$\alpha>60$

$(2r)^2+x^2=4^2$

Erich Krause

$x^2+y^2=4^2$ $\sqrt{12}+\sqrt{28}$

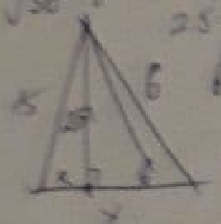
$\sqrt{25-8}$ $x<5$

$y<4$

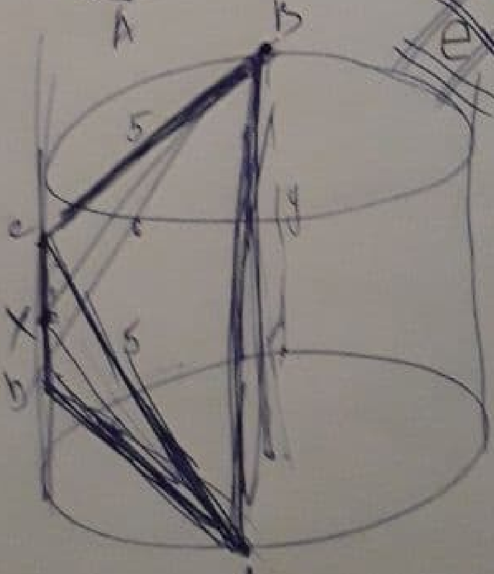
$\sqrt{36-8}$

$25-a^2=36-b^2$

$b^2-a^2=11$



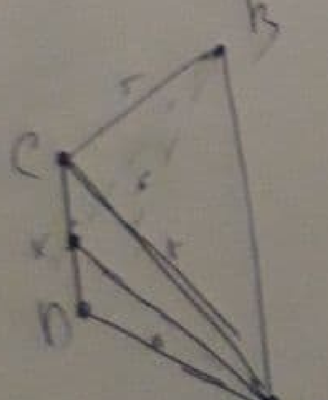
$CD<2$



$2x^2=16$

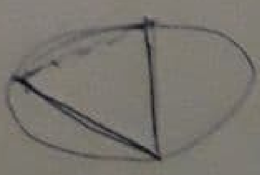
$x^2=8$

$x=2\sqrt{2}$



$2r>AB$

$r>2$



Черновик

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102801**

ID профиля: **77331**

Вариант 21

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=35 \\ НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

a, b, c будут иметь такой вид: $a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$ $b=5^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$ $c=5^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

где $\alpha_i \geq 1$ и $\beta_i \geq 1$. Если у какого-то из (a,b,c) есть простой делитель отличный от 5 и 7, то НОК должен делиться на это число, но НОК делится только на 5 и 7 (среди простых). ~~Т.к.~~

Т.к. НОД $\vdots$ 35 $\Rightarrow$ a $\vdots$ 35 b $\vdots$ 35 c $\vdots$ 35.

$18 \geq \alpha_i \geq 1$ $16 \geq \beta_i \geq 1$ т.к. НОК $=5^{18}\cdot 7^{16}$.

Одна из α_i равна 1, одна равна 18. т.е. $\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$ и $\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=18$

и $\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=1$ и $\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=16$.

3 варианта какая из α_i равна 1 и для каждого — 2 варианта какая из $\alpha_i=18$, ~~тогда~~ а оставшийся α_i может принимать все значения от $[1;18]\in\mathbb{N}$ то есть 18 вариантов.

Аналогично для β_i $\Rightarrow$ общее кол-во будет $2\cdot3\cdot18\cdot2\cdot3\cdot16=2^7\cdot3^4=10368$

$\boxed{\text{Чистовик / 1стр}}$

№6

Пусть $\angle ABC = \alpha$, т.к. AT и CT – касательные

то $\angle TAC = \angle TCA = \angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\alpha$

т.к. O центр окружн. описаной около ABC, то

$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = 2\alpha \Rightarrow \angle ATC + \angle AOC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow A, O, C, T$ – лежат на одной окружн.

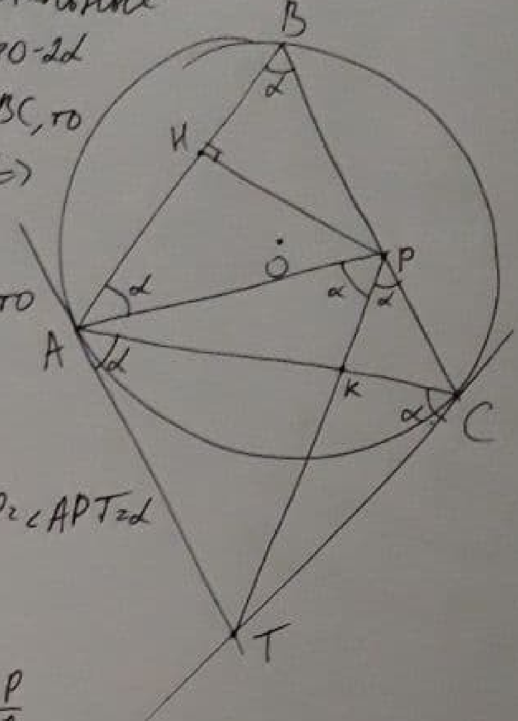
т.к. A, O, C, P – тоже лежат на одной окр., то

A, O, C, P, T – лежат на одной окружн.

$\Rightarrow \angle CPT = \angle CAT = \alpha$ и $\angle APT = \angle ACT = \alpha$.

т.к. $\angle ABC = \angle TPC \Rightarrow AB \parallel TP \Rightarrow \angle BAP = \angle APT = \alpha$

$\Rightarrow \triangle ABP$ – равнобедренный $\Rightarrow BP = AP$



т.к. PK – бисектрисса, то $\frac{AK}{CK} = \frac{AP}{CP} = \frac{BP}{CP}$

С другой стороны $\frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{BP}{CP} = \frac{4}{3}$

$\frac{BP}{CP} = \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{4}{3}$ $\quad S_{ACP} = S_{APK} + S_{CPK} = 21 \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{21} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_{ABP} = 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = S_{ABP} + S_{ACP} = 28 + 21 = \cancel{48}\ 49}$ $\quad$ 2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$

Опустим перпендикуляр из P на $AB \Rightarrow$ т.к. $AP = BP \Rightarrow AH = BH$

Пусть $AH = x \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{PH}{AH} \Rightarrow PH = x \cdot \frac{3}{7} \Rightarrow BP = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \frac{9}{49}} = x\sqrt{\frac{58}{49}}$

$S_{ABP} = \frac{AB \cdot PH}{2} = \frac{2x \cdot x \cdot \frac{3}{7}}{2} = x^2 \cdot \frac{3}{7} = 28 \Rightarrow x^2 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \Rightarrow x = 14\sqrt{3} \Rightarrow$

$BP = 14\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{58}}{7} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{58}$ $\quad AB = 28\sqrt{3}$

$\frac{BP}{CP} = \frac{4}{3} \Rightarrow CP = BP \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow CP = x \cdot \sqrt{\frac{58}{49}} \cdot \frac{3}{4} = \cancel{14}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{58}}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{58 \cdot 3}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \sin\alpha}{2} \Rightarrow AB \cdot BC = \frac{49 \cdot 2}{\sin\alpha}$ $\quad | \; BC = BP + CP = 2\sqrt{58 \cdot 3} + \frac{3}{2}\sqrt{58 \cdot 3} = \sqrt{58 \cdot 3} \cdot \frac{7}{2}$

По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\alpha \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot \frac{49 \cdot 2}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha =$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 4 \cdot 49 \cdot \frac{7}{3} = 28^2 \cdot 3 + \cancel{58} \cdot 3 \cdot \frac{49}{4} - 4 \cdot 49 \cdot \frac{7}{3} \Rightarrow AC = \sqrt{2352 + \frac{4263}{2} - \frac{1372}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{AC = \sqrt{\frac{24157}{6}}}$

Чистовик / 2 стр

21102801 (U77331 M1304159)

$$\begin{cases} (a,b,c) = 35 \\ [a,b,c] = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$
$b = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$
$c = 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$

$\alpha_i = 17$
$\beta_i = 16$

$\alpha_{j \neq i} = 1$
$\beta_{j \neq i} = 1$

$\log_{2x-3}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1)$

ОДЗ: $2x \neq 3$
$x \neq -1$
$x > -1$
$2x > 3$
$x > \frac{3}{2}$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$96 \cdot 1\frac{1}{3}$

$3 \cdot 3 = 9$

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 36 \\ \hline +\ 216 \\ 108 \\ \hline \times\ 1296 \\ 8 \\ \hline 10368 \end{array}$$

10368

17
18
$8 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 17$
$45 \cdot 51$

$8 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 16$
$3^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 2^7 \cdot 3^4$

$5 \cdot 7$

$5^{18} \cdot 7^{16}$

$5^{13} \cdot 7^{7}$

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3) =$

$= \dfrac{1}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$\log_{2x-3}(x+1) \cdot \log_{2x-3}(2x^2-3x+5) = 1$

$2x^2-3x+5 =$

$2x(2x-3) + (2x-3) - 2x + 8 =$

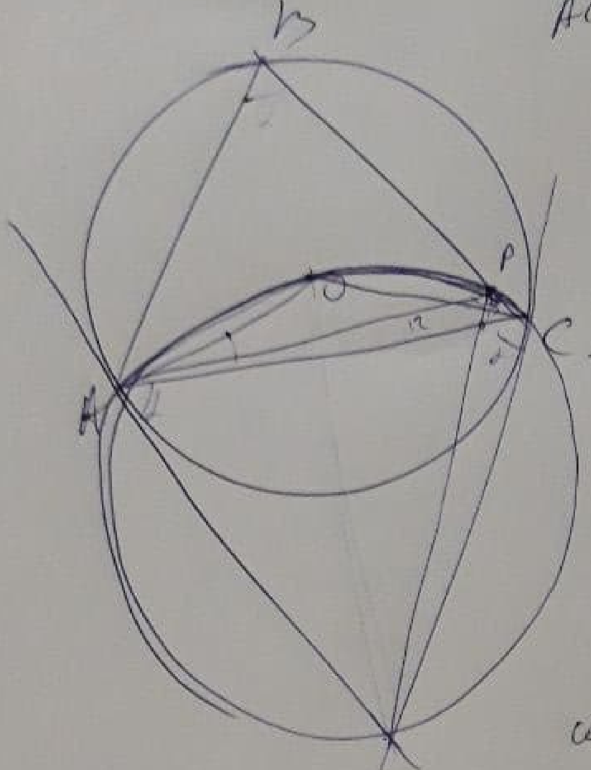
$2(2x-3)(x+1) - 2(x-4)$

$x(2x-3) + 5 > (2x-3)$

$2x^2+2x-5x+5 =$

$= 2x(x+1) - 5(x+1) + 10$

Черновик



$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\alpha.$

$\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\alpha}{2} = 39$

$AB\cdot BC = \frac{39\cdot 2}{\sin\alpha}.$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 4\cdot 49\cdot\frac{1}{tg\alpha} =$

$= AB^2 + BC^2 - 4\cdot 49\,\frac{7}{3}.$

$\frac{AC}{2\sin\alpha\cos\alpha} = OT.$

$\cos\alpha = \frac{CO}{OT} = \frac{R}{OT}.$ $\frac{AC}{\sin 2\alpha} = OT.$

$CT^2 + R^2 = OT^2$

$$\begin{array}{r} 26901 \\ -\ 2744 \\ \hline 24157 \end{array}$$

$2\cdot 29$

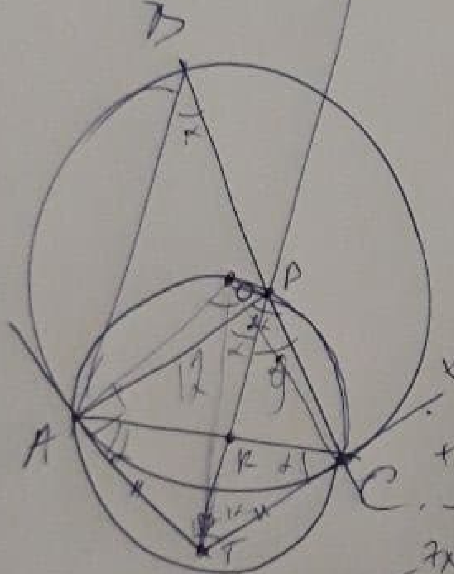
$tg\alpha = \frac{3}{2}$

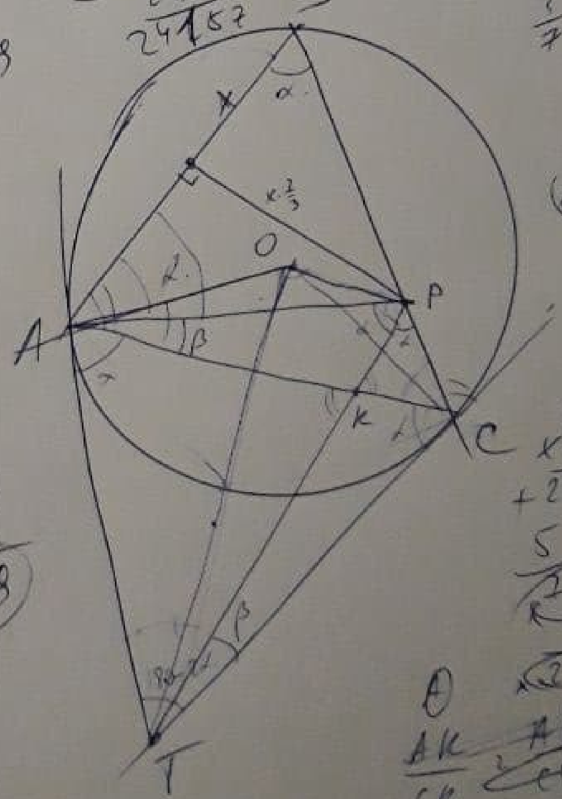
$\frac{3}{7} = \frac{x}{a}$

$a = x\cdot\frac{7}{3}$

2352

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 49 \\ \hline 252 \\ +\ 112 \\ \hline 1372 \\ \times\ 2 \\ \hline 2744 \end{array}$$





$$\begin{array}{r} 87 \\ \times\ 49 \\ \hline 783 \\ +\ 348 \\ \hline 4263 \\ \times\ 3 \\ \hline 12789 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 28 \\ \hline 224 \\ +\ 56 \\ \hline 784 \\ \times\ 3 \\ \hline 2352 \end{array}$$

$tg\alpha = \frac{3}{7}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{7}.$

5^5 7^3

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 3 \\ \hline 87 \\ \times\ 49 \\ \hline 702 \\ +\ 312 \\ \hline 3822 \end{array}$$

$\frac{AK}{CK} = \frac{AP}{CP} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Черновик

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{CP}{\sin\beta}$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{CT}{\sin\alpha}$

$AC = 2\cos\alpha\cdot CT$

$\sin(180-2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$

$\cos\alpha =$

$$\begin{array}{r} 14112 \\ +\ 12789 \\ \hline 26901 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R}$$

$$\boxed{AC = 2\cos\alpha \cdot CT}$$

$$AC = OT \cdot \sin 2\alpha.$$

$$R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$$

$$OT = \frac{AC}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$CT = \frac{AC}{2\cos\alpha}$$

Черновик