Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102730**

ID профиля: **316839**

Вариант 21

Чистовик

№1

$a_8 a_7 > S + 27$; $a_{11} a_{14} < S + 60$

все возм a_1 - ?

Решение:

$S = \sum_{1}^{7} a_i$, $a \in Z$

$7a_1 + \sum_{1}^{6} ik = 7a_1 + \frac{6 \cdot 7}{2} k = 7a_1 + 21k$

Получаем систему:

$$\begin{cases} (a_1 + 7k)(a_1 + 16k) > 7a_1 + 21k + 27 \ (1) \\ (a_1 + 10k)(a_1 + 13k) < 7a_1 + 21k + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 23a_1k + 7\cdot16k^2 > 7a_1 + 21k + 27 \ (1) \\ a_1^2 + 23a_1k + 10\cdot13k^2 < 7a_1 + 21k + 60 \ (2) \end{cases}$$

(1) + (2)

$a_1^2 + 23a_1k + 10\cdot13k^2 + 7a_1 + 21k + 27 < a_1^2 + 13a_1k + 7\cdot16k^2 + 7a + 21k + 60$

$(10\cdot13 - 7\cdot16)k^2 < 33$

$(130 - 112)k^2 < 33$

$18k^2 < 33 \Rightarrow k^2 < 2$, т.к. $k \in Z \Rightarrow k = \pm 1; 0$

При $k = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases}$$

$(a_1 + 8)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -8$

$(a_1 + 8)^2 - 15 < 0 \Rightarrow (a_1 + 8)^2 < 15$

$\Downarrow$

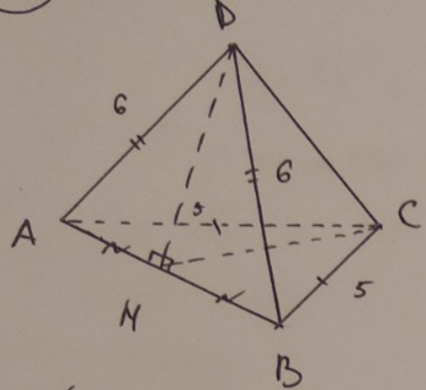
$|a_1 + 8| = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow a_1 = -7; -9; -6; -5; -10; -11$

Т.к. последовательность возрастающая => получаем все ответы:

Ответ: $a_1 = -7; -9; -6; -10; -5; -11$.

Чистовик

№2



(рис 1)

Дано: ABCD - тэтраэдр; $AC = CB = 5$;

$AD = DB = 6$

$CD - ?$

Решение:

1) Рас-м $\triangle ADC$ и $\triangle ABC$

ADC - равнобед ($AD = DB$ по усл)

ABC - равнобед ($AC = CB$ по усл.)

Проведём высоту DH - делит сторону AB пополам

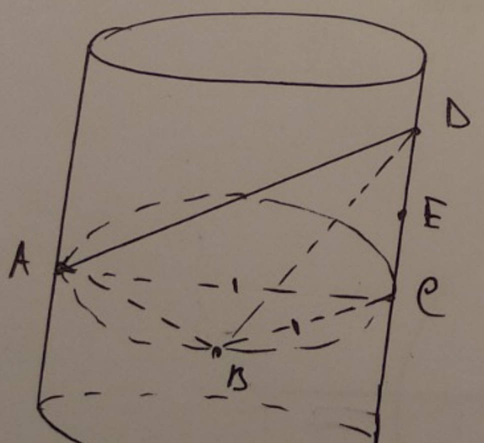
$\Rightarrow DH \perp AB$, $CH \perp AB$ (по св-вам равнобед $\triangle$)

$\Downarrow$

$AB \perp (DHC)$ По теореме о прямой, пересекающей плоскость.

Получаем, что $DC \in (DHC) \Rightarrow AB \perp CD$.

2) Возьмём [redacted] точку E такую, что $CD \perp ABE$ (рис 2)

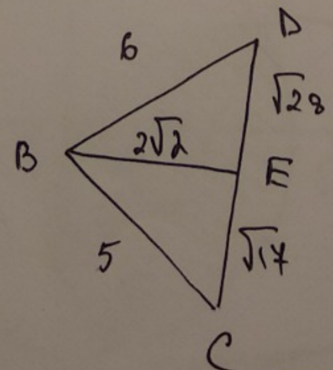


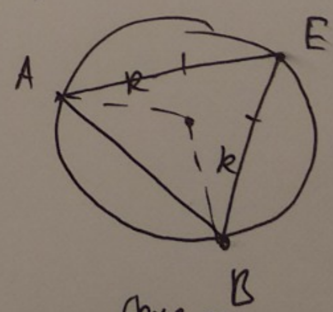
(рис 2)

Получается, что R минимальной при $AB = 2R$

Рас-м рисунок (рис 3)

$\Rightarrow AE = \sqrt{2}R$





(рис 3)

Получаем, что $DC = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b,\ 20) \end{cases}$$

Найти S фигуры M

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

Получаем систему:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b > 20 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ 8a-4b \le 20 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

$b = 2a-5$

$a^2+4a^2-20a+25=20$

$a^2-4a+1=0$

$D=16-4=12$

$a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$

(1) $\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b > 20 \end{cases}$

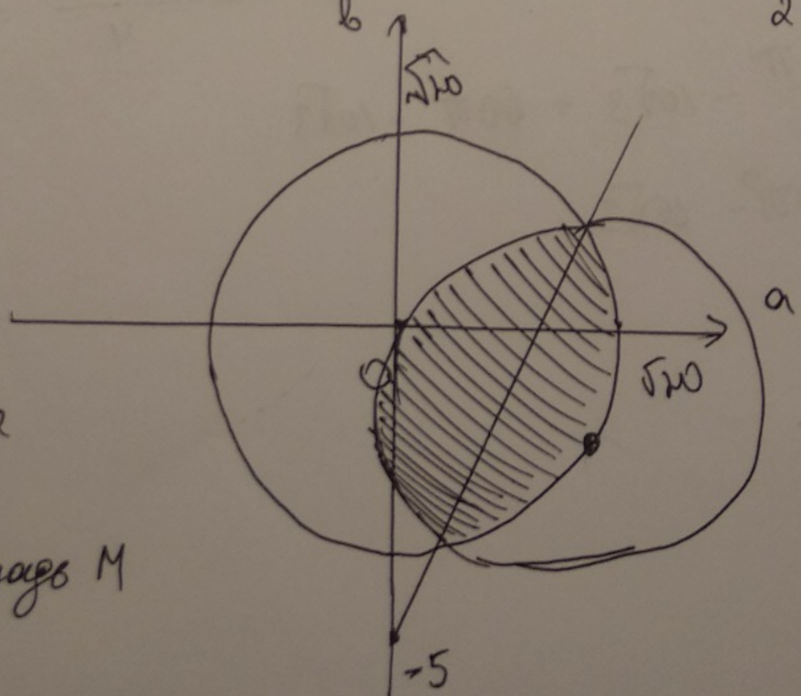
$b < 2a-5$

(2) $\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ 8a-4b \le 20 \end{cases}$

$b \ge 2a-5$

Продемонстрирую рисунок:

2 окружности.

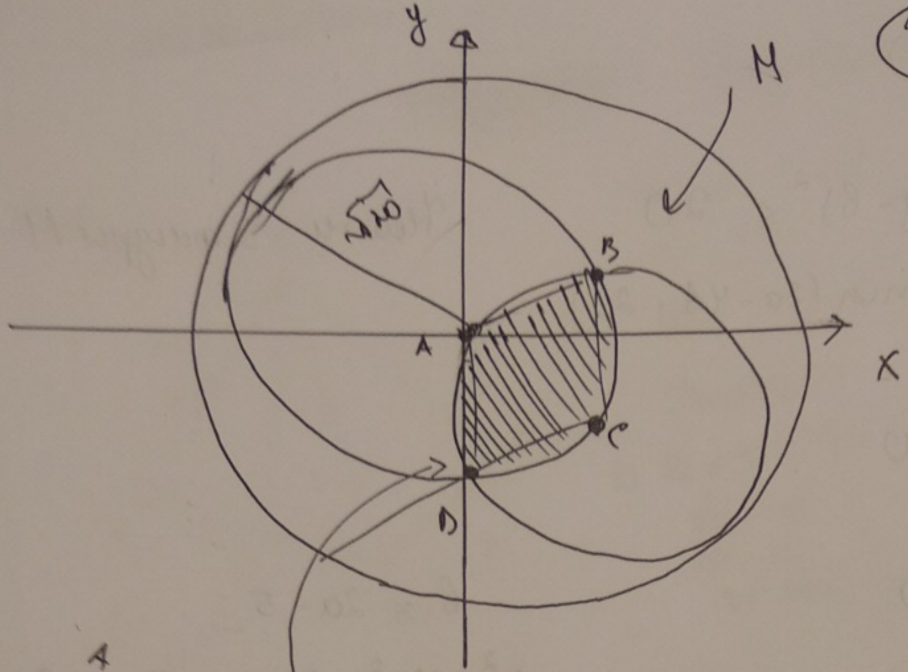


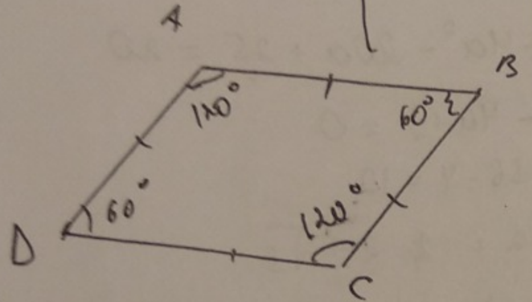
Штрихованая фигура - есть искомая площадь M

21102730 (U316839 M1304128)

Чистовик

№ 3





Вершинами ромба являются точки пересечения окружностей и центры окружностей.

Складываем площади секторов и вычитаем площадь ~~куба~~. чтобы найти M.

Получаем:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\pi\cdot\left(2\sqrt{20}\right)^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot\pi\cdot\left(2\sqrt{20}\right)^2-\frac{2\cdot\left(\sqrt{20}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=$$

$$=\frac{160}{3}\pi+\frac{20\pi}{3}-10\sqrt{3}=60\pi-10\sqrt{3}$$

Ответ: $60\pi-10\sqrt{3}$

№1

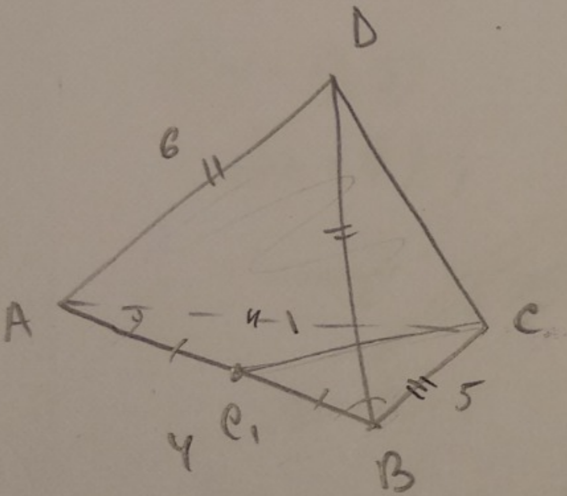
$a_6 a_{17} > S + 27$ $a_1 - ?$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

Черновик

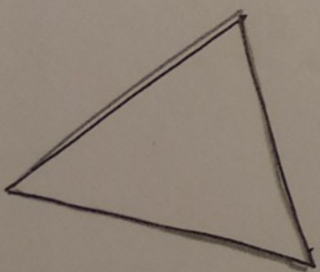
$S = \sum_{3}^{4} a_z$, $a \in Z$

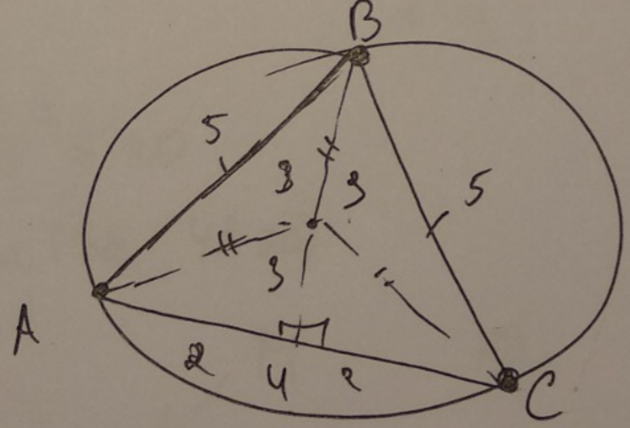
$7a_1 + \sum_1 ik = 7a_1 + 8k$



$\triangle ADC = \triangle DBC \Rightarrow AB \perp CD$

плоск $ABE \perp CD$





$25 - 16 = 9$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases} \Rightarrow$$

a^2+b^2 – окружность на декартовой плоскости

Черновик

$\min(8a-4b; 20)$

$8a-4b \quad , 20$

$4a+2b, 10$

$((2a+b), 5)$

$(2a+b)$;

минимум ~~из этих чисел~~

~~5 друг.~~

$2a+b \quad -5$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

$|x-a|+|y-b| \le \sqrt{20}$

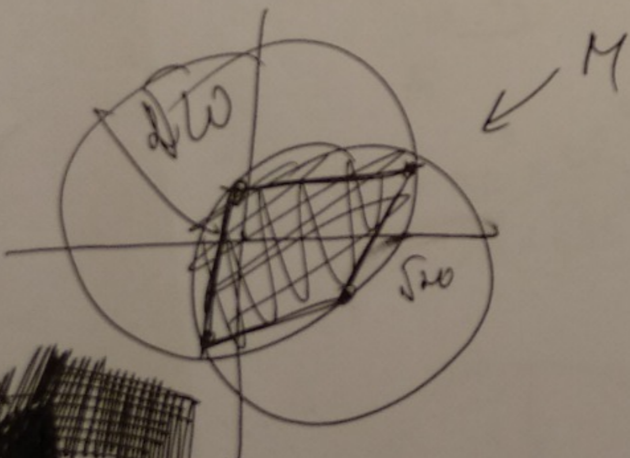
$x-a+y-b \le \sqrt{20}$

~~$x+y-a-b \le \sqrt{20}$~~

$x+y \le \sqrt{20}+a+b$

$x+y-\sqrt{20} \le a+b$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$



$a^2+b^2=$

$(a+b)^2-2ab$

~~$x+y-\sqrt{20} \le$~~

$(x+y-\sqrt{20})^2-2ab=$

~~$x+y-\sqrt{20}$~~

$x^2+y^2-20-2ab=$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 < 20 \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b > 20 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ 8a-4b \le 20 \end{cases} \end{cases}$$

$b = 2a-5$

$a^2+4a^2-20a+25=20$

$D = 12$

$a_1, a_2 = 2 \pm \sqrt{3}$

7

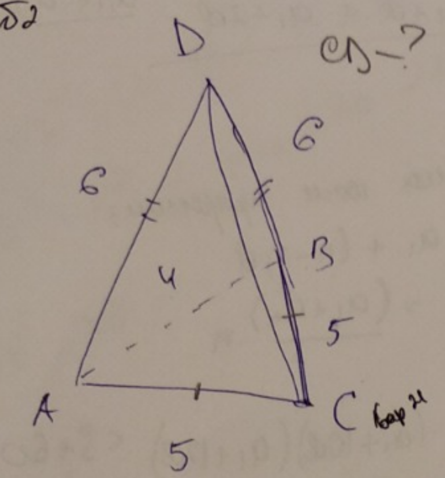
$(359d^2 - 27)\cdot 2 > (2a_1 + d(n-1))\cdot n$

Черновик

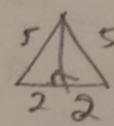
Б2

CD – ?

Б3 {

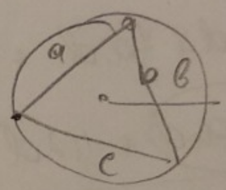


$25 - 4 = 21$

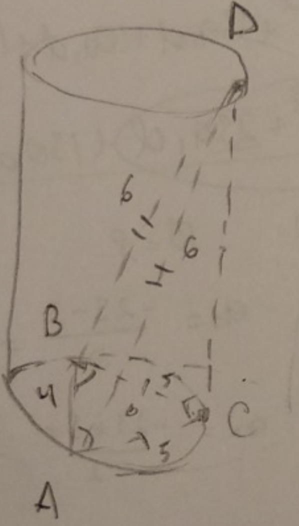


$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot 4$

$2\sqrt{21}$



$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$



$\frac{4 \cdot 10}{4\cdot 2\sqrt{21}} = \frac{14}{4\cdot 2\sqrt{21}} =$

· AB с-вне треуг

· в нижнем основании

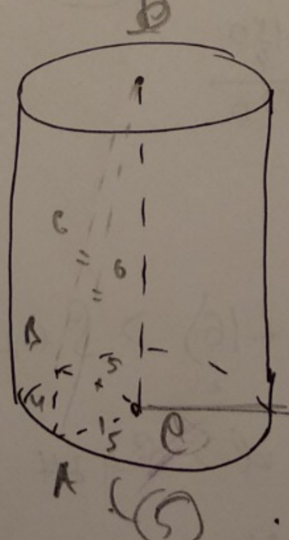
$\frac{7}{4\sqrt{21}}$ – $R/2$

$\frac{7}{8\sqrt{21}}$

$36 - 25 = 11$

2) $DA^2 - AC^2 = DC^2$

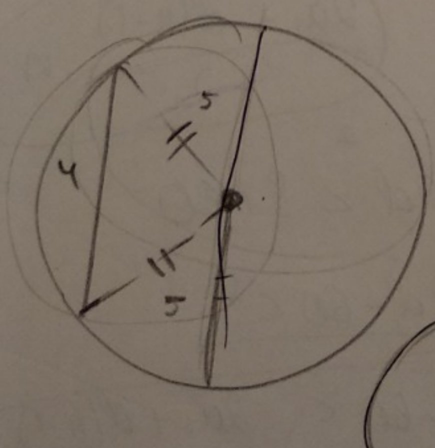
$\sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$

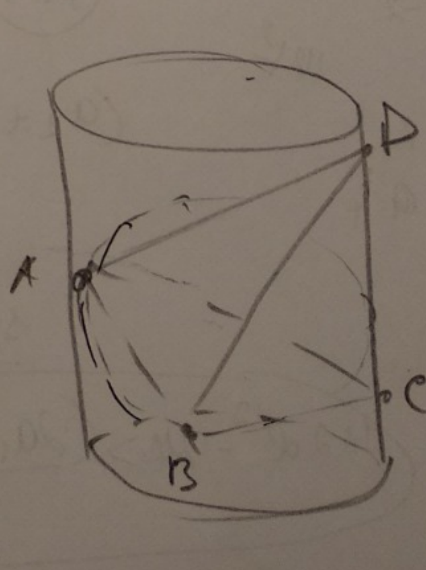


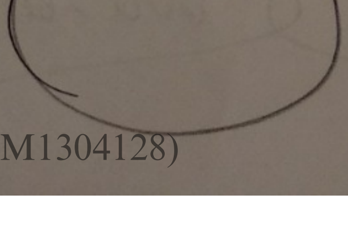
$\frac{7}{8\sqrt{21}}$

A (5)

2







21102730 (U316839 M1304128)

Черновик

№1

a_1, a_2, a_3

$a_8, a_{17} > S + 27$

$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3$

S членов $= \dfrac{a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d}{} = \dfrac{a_1(n-d)}{}$

$16 \cdot 4 = 112$

Сумма ном прогрессии:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

Чистовик

$(a_1 + 7d)\cdot(a_1 + 16d) > S + 27$

$a_1^2 + 16a_1d + 7a_1d + 112d^2 > S + 27$

$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 > S + 27$

$(a_1+10d)(a_1+13d) < S+60$

$a_1^2 + 13a_1d + 10a_1d + 130d^2 < S+60$

$a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 < S+60$

$D = 23 \cdot 23 = 529 - 4 \cdot 112$

$529 - 448 = 81$

$112 \cdot 4 = 448$

$a_1 = \dfrac{-23-9}{2} = \cancel{\dfrac{-14}{2}} = \cancel{-7}$ $\dfrac{32}{2} = 16$

$a_2 = \dfrac{-23+9}{2} = -7$

$23 + 9 = 32$, $23 - 9 = 14$

$23 \cdot 23 = 529$

$130 \cdot 4 = 520$

$D = 9$

$a_1 = \dfrac{-23-3}{2} = \dfrac{-26}{2} = -13$

$a_2 = \dfrac{-23+3}{2} = \dfrac{-20}{2} = -10$

$(a_1+13)(a_1+10) \leq S + 60$

$a_1 - ?$

$(a_1 + 7)(a_1 + 16) > S + 27$

$\dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$a^2 +$

$112d^2 > S + 27$

$112d^2 - 27 > S$

$112d^2 - 27 > \dfrac{(2a_1 + d(n-1))}{2} \cdot n$

$130d^2 < S + 60$

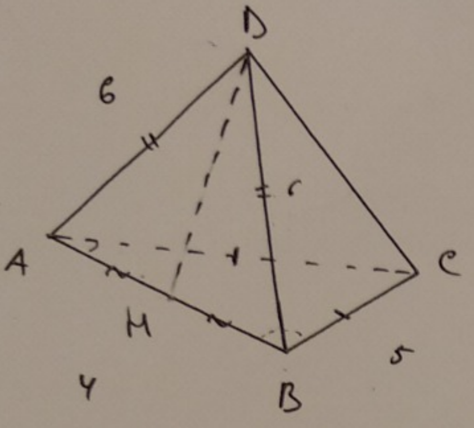
$130d^2 - 60 < S$

$130d^2 - 60 < \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}$

21102730 (U316839 M1304128)

№ 2.

~~Чистовик~~ Черновик



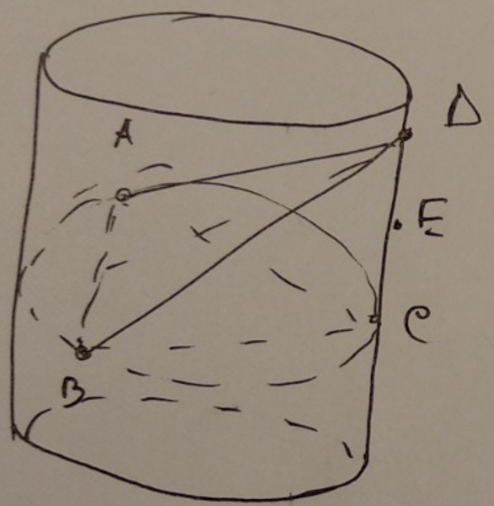
Дано: ABCD - тэтраэдр; $AC = CB = 5$;
$AD = DB = 6$
CD - ?

Решение:

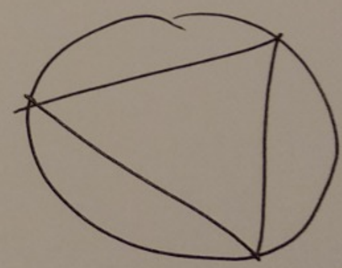
1) Рас-м $\triangle ADC$ и $\triangle ABC$:

$\left.\begin{array}{l} DB = AD \\ BC = AC \\ DC \text{ - общ} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC = \triangle DBC$ по 3 сторонам $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp CD$



R min



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102730**

ID профиля: **316839**

Вариант 21

Чистовик

№5

Дано:

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

Обозначим $a = \sqrt{2x-3}$
$b = x+1$
$c = 2x^2-3x+5$

Тогда

$\log_{a^{\frac{1}{2}}} b$; $\log_c a^2$, $\log_b c$

Решениями задачи будут являться решения системы:

Есть 3 случая:

① $\begin{cases} \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = \log_c a^2 \\ \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = \log_b c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_a b = 2\log_c a \\ 2\log_a b = \log_b c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_a b}{\log_c a} = 1$

② $\begin{cases} \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = \log_b c \\ \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = \log_c a^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_a b = \log_b c \\ 2\log_a b = 2\log_c a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

21102730 (U316839 M1304129)

$\log_{\sqrt{2x-1}}(x+1)$, $\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$; $\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2$

$\log_{\sqrt{2x-1}}(x+1)=\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

Черновик

$\cancel{\dfrac{1}{\log_{(x+1)}\sqrt{2x-1}}}-\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)=0$

по методу рационализации:

$(\sqrt{2x-1}-1)(x+1-1)-(x+1-1)(2x^2-3x+5-1)=0$

$x\sqrt{2x-1}-x(2x^2-3x+4)=0$

$x(\sqrt{2x-1}-(2x^2-3x+4)=0$

$x(\sqrt{2x-1}-2x^2+3x-4)=0$

$x=0$ $\quad\sqrt{2x-1}-2x^2+3x+4=0$

$\sqrt{2x-1}=2x^2-3x+4$

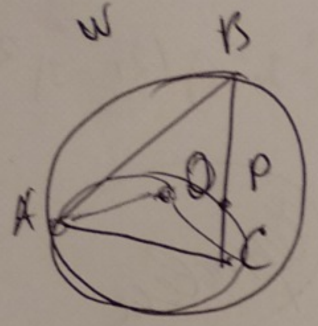
$(2x-1)=(2x^2-(3x+4))^2$

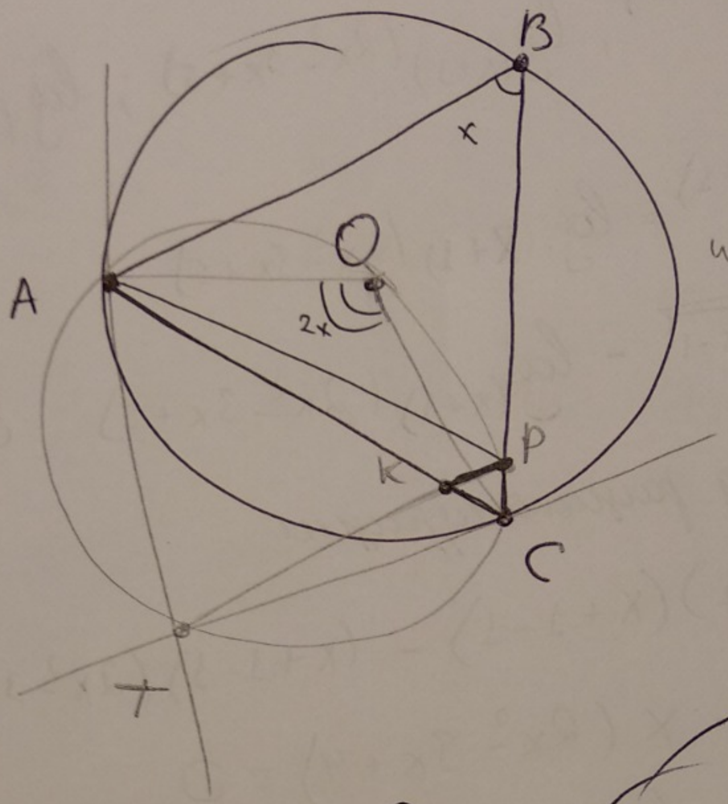
$4x^4-12x^3-\cancel{4}x^2+24x+16=0$

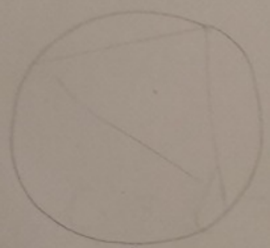
$4x^4-2\cdot 2x^2(3x+4)+9x^2+24x+16$

$4x^4-12x^3-16x^2+9x^2+24x+16$

$-2x+1$







$S_{\Delta APK} = 12$

$S_{\Delta CPK} = 9$

S_{ABC} − ?

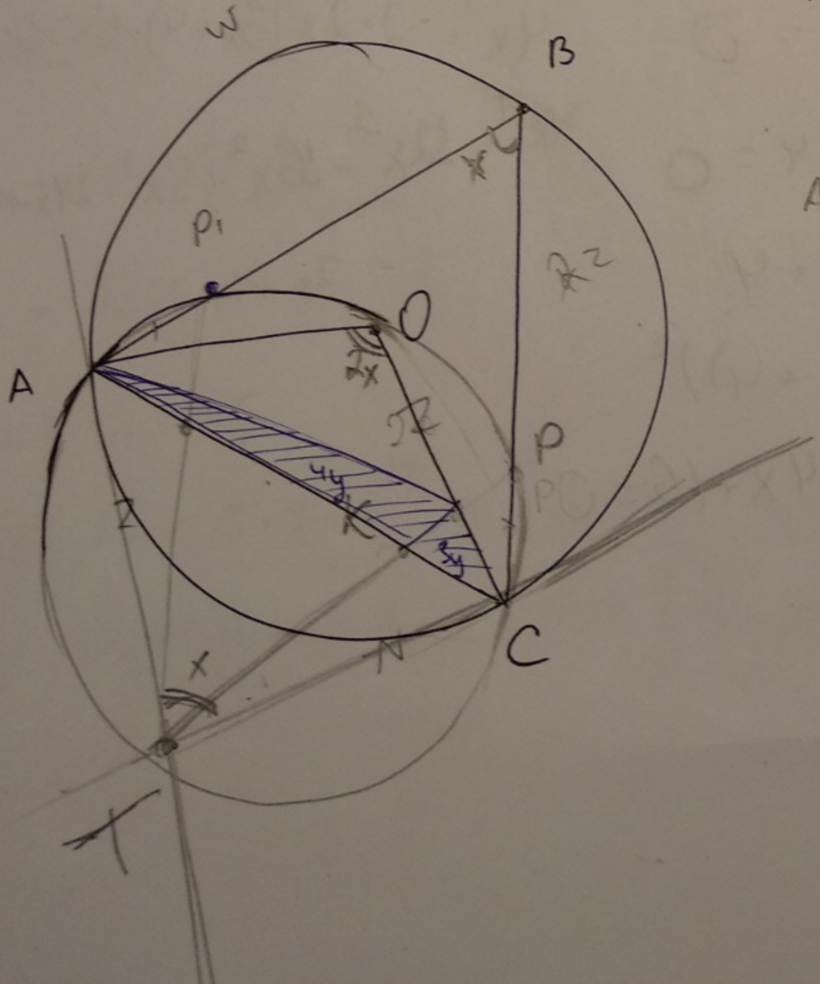
Черновик

$\frac{9}{12} = \frac{3x}{4x}$

$7x = A$

$\Delta AP\cancel{T} \sim \Delta CPT$

$BC = 20e$



$\cancel{\log_{c^{1/2}}}$

Пусть $x+1=b$

$2x^2-3x+5=c$

$2x-3=a$

$\cancel{\log_{c^{1/2}}}$

$\log_{a^{\frac{1}{2}}} b$; $\log_c a^2$; $\log_b c$

$\log_a b - \frac{1}{\log_a c}$

$\frac{\log_a b \cdot \log_a c - 1}{\log_a b} = 0$

$2\log_a b$; $2\log_c a$; $\log_b c$

3 случая.

$a^x = b \qquad c^x = a$

(1) $\begin{cases} 2\log_a b = 2\log_c a \\ \cancel{2\log_a b +} \\ 2\log_a b = \log_b c - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\log_a b = \log_c a \qquad a$

Черновик

$\cancel{\log_b c - 1 = 2\log_c a}$

(2) $\cancel{\begin{cases} 2\log_a b = \log_b c \\ \log_b c = \end{cases}}$

$\cancel{\log_b c - 2\log_c a - 1 = 0}$

$\begin{cases} 2\log_c a = \log_b c - 1 \\ 2\log_a b = 2\log_c a \end{cases} \Leftrightarrow$

НОД $(a;b;c) = 35 \qquad 5 \cdot 7$

НОК $(a;b;c) = 5 \cdot 7 \cdot 5^{17} \cdot 7^{15}$

Заметим, что каждое из $(a;b;c)$ равно $(5^{\alpha} \cdot 7^{\beta})$, при чём

$\alpha \geq 1$; $\beta \geq 1$

Т.к. НОК $(a;b;c)$

21102730 (U316839 M1304129)

№5

1 — $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, 2 — $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, 3 — $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

При каких x два из этих чисел равны.

$1=2;\ 3$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \to$ возрастающая функция

ОДЗ

$\sqrt{2x-3}\neq 1 \quad 2x-3\geq 0 \quad x+1>0$

$2x-3\neq 1 \quad 2x\geq 3 \quad x>-1$

$2x\neq 4 \quad x\geq 1{,}5$

$x\neq 2$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \to$ возрастающая функция

ОДЗ

$2x^2-3x+5\neq 1$

$2x^2-3x+5>0 \to$ всегда больше нуля

$9-4\cdot 2\cdot 5$

1 2 3

$1=2 \quad 1=3$

$2=3$

$$\log_{\sqrt{2x-1}}(x+1)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$$\log_{\sqrt{2x-1}}(x+1)-\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)=0$$

$$\frac{1}{\log_{(x+1)}\sqrt{2x-1}}-\frac{\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)^2}{2}$$

$$\frac{1-\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{(x+1)}\sqrt{2x-1}}{\log_{(x+1)}\sqrt{2x-1}}=0$$

Б4. Чистовик

Заметим, что каждое из $(a;b;c)$ равно $5^{\alpha};7^{\beta}$, причём $\alpha \geq 1$; $\beta \geq 1$.

Т.к НОК $(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$, то хотя бы одно из α равно 18, β равно 16.

Если НОД $(a;b;c) = 35$, то хотя бы одно из α_i и β_i обязано равняться 1.

Каждое решение будет представляться в виде $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta_1; \beta_2; \beta_3)$

Ответы будем считать по формуле ~~вкл~~ включений и исключений:

Получаем:

$+ 16 \cdot 18 \cdot 3! \cdot 3!$

$- 3 \cdot 3! \cdot 16$ две из α_i равны 1

$3 \cdot 3! \cdot 16$ -//- α_i равны 18

$3 \cdot 3! \cdot 18$ -//- β_i равны 1

$3 \cdot 3! \cdot 18$ -//- β_i равны 16

$+$

$3 \cdot 3$ две из α_i равные 1; 2 и 3 β равен 1

$3 \cdot 3$ -//- 18; 2 из β равные 1

$3 \cdot 3$ -//- 1, 2 из β равны 16

$3 \cdot 3$ -//- 18, 2 из β равны 16

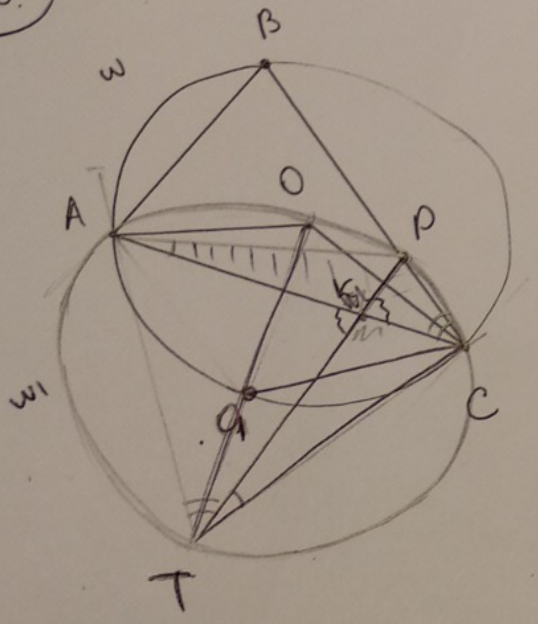
Посчитаем на черновике тут ответ;

Ответ: 9180

21102730 (U316839 M1304129)

Чистовик

№6.



Дано: w - окр-ть
O - центр; $PT \cap AC = K$
$S_{\triangle APK} = 12$; $S_{\triangle CPK} = 9$
Найти: $S_{\triangle ABC}$ - ?
Решение:

1). Рас-м углы:
- $\angle PTC$ и $\angle PAC$ - опираются на одну дугу PC второй окр-ти =>
$\angle PTC = \angle PAC$
- ~~[illegible]~~ ATP и $\angle PCA$ - опираются на одну дугу AP второй окр-ти =>
=> $\angle ATP = \angle PCA$

2) Рас-м т-ки:
- $\triangle AKT \sim \triangle PKC$ (подобны по двум сторонам и углу между ними $\angle AKT = \angle PKC$ как вертик)
- $\triangle AKP \sim \triangle TKC$ (подобны по двум сторонам и вертикальным углам $\angle TKC$ и AKP между ними)

Из подобия треугольников получаем:
$\frac{AK}{KT} = \frac{PK}{KC}$ => $AK \cdot KC = PK \cdot KT$

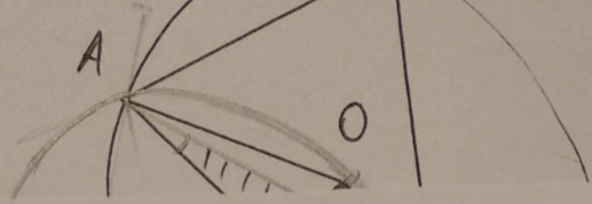
3) AT и CT - кас к окр W =>
=> $\angle OAT = \angle OCT = 90°$
=> $\angle OAT + \angle OCT = 180°$ =>
=> TAOC - вписанный =>
=> $T \in W_1$; OT - диаметр
$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{4}{3}$

(4) $\angle TAC = \cancel{\angle} \angle B$ из W
$\angle TAC = \angle TPC$ из W_1
$\angle B = \angle TPC$ => $AB \parallel ET$
$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ => $\frac{S_{PKC}}{S_{CBA}} = \frac{CK^2}{CA^2} = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

=> $S_{CBA} = \frac{49 \cdot 9}{9} = 49$

Ответ: а) 49.

21102730 (U316839 M1304129)



№5

(3) $\begin{cases} \log_c a^2 = \log_b c \\ \cancel{\log_{a^{1/2}} b} = \log_c a^2 = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b - 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_c a = \log_b c \\ 2\log_c a = 2\log_a b - 1 \end{cases}$

Чистовик