Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102583**

ID профиля: **313015**

Вариант 21

Чистовик

№1

Пусть a - первый член прогрессии;

$$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a + (a+6d)}{2} \cdot 7 = (a+3d)7$$

$$a_8 \cdot a_{17} = (a+7d)(a+16d) > (a+3d)7 + 27 \quad (1)$$

$$a_{11} \cdot a_{14} = (a+10d)(a+13d) < (a+3d) \cdot 7 + 60 \quad (2)$$

(1) $a^2 + 23ad + 112d^2 > 7a + 21d + 27$

$a^2 + a(23d-7) + (112d^2 - 21d - 27) > 0$

$\mathcal{D} = (23d-7)^2 - 4(112d^2 - 21d - 27) = 529d^2 - 322d + 49 - 448d^2 + 84d + 108 =$
$= 81d^2 - 238d + 157$

$$a_0 = \frac{7 - 23d \pm \sqrt{81d^2 - 238d + 157}}{2}$$

$\Downarrow$

$$a \in \left(-\infty; \frac{7 - 23d - \sqrt{81d^2 - 238d + 157}}{2}\right) \cup \left(\frac{7 - 23d + \sqrt{81d^2 - 238d + 137}}{2}; +\infty\right)$$

(2) $a^2 + 23ad + 130d^2 < 7a + 21d + 60$

$a^2 + a(23d-7) + (130d^2 - 21d - 60) < 0$

$\mathcal{D} = (23d-7)^2 - 4(130d^2 - 21d - 60) = 529d^2 - 322d + 49 - 520d^2 + 84d + 240 =$
$= 9d^2 - 238d + 289$

$\Downarrow$

$$a \in \left(\frac{7 - 23d - \sqrt{9d^2 - 238d + 289}}{2}; \frac{7 - 23d + \sqrt{9d^2 - 238d + 289}}{2}\right)$$

Чтобы было пересечение решений (1) и (2) необходимо, чтобы:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{7 - 23d - \sqrt{81d^2 - 238d + 157}}{2} > \dfrac{7 - 23d - \sqrt{9d^2 - 238d + 289}}{2} \\ \dfrac{7 - 23d + \sqrt{9d^2 - 238d + 289}}{2} > \dfrac{7 - 23d + \sqrt{81d^2 - 238d + 157}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

лист № 1 ↓ см 2

Чистовик

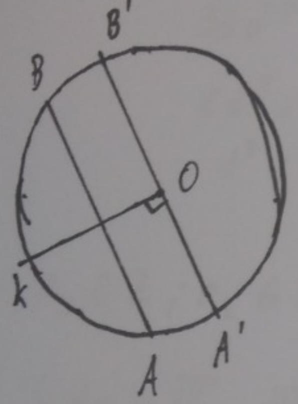
№2

$CD \parallel$ оси; ось $\perp$ осн. $\Rightarrow$ $CD \perp$ осн. цилиндра

A, B и $D \in$ бок. пов. цилиндра; $AD = BD \Rightarrow AB \parallel$ осн. цилиндра

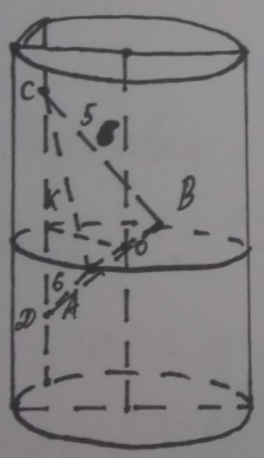
Рассмотрим сечение цилиндра в плоскости, где находится AB.

AB - хорда или диаметр $\Rightarrow D \geq AB \Rightarrow R \geq \frac{AB}{2} = 2$.



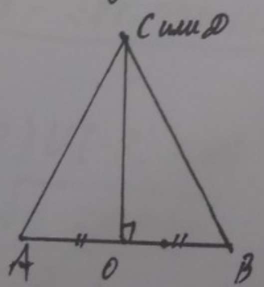
Нужно выбрать наименьший радиус $\Rightarrow R = 2$

$BC > D$ и $BD > D \Rightarrow$ точки D или C не могут находиться в плоскости, пар параллельной осн. и в которой лежит $AB \Rightarrow D$ и C могут находиться как выше этой плоскости, так и ниже. CD_{max} будет тогда, когда одна из точек выше, а другая ниже



Пусть $K \in$ бок. пов. цил. $K \in$ пл. AB; $AO = OB$; $O \in$ пл. AB; $OK \perp AB$

Найдем CO и DO: $AO = OB$; $CA = CB$; $DA = DB \Rightarrow$



$\Rightarrow CO \perp AB$; $DO \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow CB^2 = CO^2 + OB^2 \Rightarrow CO = \sqrt{CB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} =$

$= \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

$DB^2 = DO^2 + OB^2 \Rightarrow DO = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32}$

$Dk = \sqrt{DO^2 - Ok^2} = \sqrt{32 - 4} = \sqrt{28}$

$Ck = \sqrt{CO^2 - Ok^2} = \sqrt{21 - 4} = \sqrt{17}$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow DC = Dk + Ck = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$

лист № 3

21102583 (U313015 M1299539)

Чистовик

№1(продолжение)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 81d^2-238d+157 < 9d^2-238d+289 \\ 81d^2-238d+157 < 9d^2-238d+289 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 72d^2-132<0$$

$$36d^2<66$$

$$6d^2<11$$

$$d^2<\frac{11}{6} \Rightarrow d \in \left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}\right)$$

$a_1 \in Z;\ a_2 \in Z \Rightarrow a_2-a_1=d \in Z;\ d>0 \Rightarrow d \in N$

$$\begin{cases} d \in \left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}\right) \\ d \in N \end{cases} \Rightarrow d=1,\ \text{т. к. } 2^2>\frac{11}{6}>1^2 \Rightarrow 2>\sqrt{\frac{11}{6}}>1$$

Подставим 1

① $a \in \left(-\infty; \frac{7-23-\sqrt{81-238+157}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-23+\sqrt{81-238+157}}{2}; +\infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (-\infty; -8) \cup (-8; +\infty)$

② $a \in \left(\frac{7-23-\sqrt{9-238+289}}{2}; \frac{7-23+\sqrt{9-238+289}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15});\ 4>\sqrt{15}>3 \Rightarrow -8-\sqrt{15} \in (-12;-11);$
$-8+\sqrt{15} \in (-5;-5)$

$$\left.\begin{cases} a \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \\ a \in (-\infty;-8) \cup (-8;+\infty) \\ a \in Z \end{cases}\right\} \Rightarrow a \in \{-11;-10;-9;-7;-6\}$$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6$

лист №2

21102583 (U313015 M1299539)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102583**

ID профиля: **313015**

Вариант 21

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1) = 2a$; $a = \log_{2x-3}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = 2b$; $b = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \dfrac{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}{\log_{2x-3}(x+1)} = \dfrac{1}{\log_{2x-3}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)} = \dfrac{1}{ab}$

ОДЗ:

$2x>3 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

$2x-3\neq 1 \Rightarrow x\neq 2$

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$x+1\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$

$2x^2-3x+5>0 \Rightarrow x\ \forall$

$2x^2-3x+5\neq 1 \Rightarrow x\ \forall$

1) $\begin{cases} 2a=2b \Rightarrow a=b \\ \frac{1}{ab}+1=2a \Rightarrow \frac{1}{a^2}+1=2a \;|\cdot a^2 \end{cases}$; $a\neq 0$

$1+a^2=2a^3$

$2a^3-a^2-1=0$

Можно заметить, что $a=1$, т.к. $2-1-1=0$

$(a-1)(2a^2+a+1)=0$

$\Downarrow$

$D = 1-4\cdot 2<0 \Rightarrow 2a^2+a+1\neq 0$

$(a-1)(2a^2+a+1)=0 \,|: (2a^2+a+1)\neq 0$

$a-1=0$

$a=1$

$\log_{2x-3}(x+1)=1$

$2x-3=x+1$

$x=4$ (удовлетворяет ОДЗ)

лист 1

2) $\begin{cases} 2a=\frac{1}{ab} \Rightarrow 2a^2b=1 \\ 2b+1=2a \Rightarrow b=a-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $2a^2(a-\frac{1}{2})=1$

$2a^3-a^2=1$

$2a^3-a^2-1=0$

Это уже было решено в 1) $\Rightarrow a=1;\ x=4$

3) $\begin{cases} 2b=\frac{1}{ab} \Rightarrow 2ab^2=1 \\ 2a+1=2b \Rightarrow a=b-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $2b^2(b-\frac{1}{2})=1$

$2b^3-b^2-1=0 \Rightarrow b=1$ (было уже решено в 1))

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=1$

Чистовик

№5

$2x^2-3x+5=2x-3$

$2x^2-5x+8=0$

$D=25-4\cdot2\cdot8<0 \Rightarrow 2x^2-5x+8\neq0 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: 4

лист 2

Чистовик

№4

$$НОД(a;b;c)=35=5^1\cdot 7^1 \Rightarrow \begin{cases} a=35\cdot n_a \\ b=35\cdot n_b \\ c=35\cdot n_c \end{cases};\quad \begin{cases} n_a\in N \\ n_b\in N \\ n_c\in N \end{cases};\quad \cancel{\left[\begin{array}{l} n_a=1 \\ n_b=1 \\ n_c=1 \end{array}\right.}$$

$$НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow \begin{cases} a=5^{k_a}\cdot 7^{t_a} \\ b=5^{k_b}\cdot 7^{t_b} \\ c=5^{k_c}\cdot 7^{t_c} \end{cases};\quad \begin{cases} k_a\in N \\ k_b\in N \\ k_c\in N \\ t_a\in N \\ t_b\in N \\ t_c\in N \end{cases};\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k_a=18 \\ k_b=18 \\ k_c=18 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t_a=16 \\ t_b=16 \\ t_c=16 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} n_a=1 \\ n_b=1 \\ n_c=1 \end{array}\right.} \Rightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} k_a=t_a=1 \\ k_b=t_b=1 \\ k_c=t_c=1 \end{array}\right.}\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k_a=1 \\ k_b=1 \\ k_c=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t_a=1 \\ t_b=1 \\ t_c=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Допустим $k_a=1$, а $k_b=18 \Rightarrow k_c\in[2;17] \Rightarrow n_{вариантов}=16$

Есть 6 способов выбрать какое k будет 1, а какое – 18 $\Rightarrow n=16\cdot 6$

Есть еще 6 случаев, когда $k_{оставш.}=1$ или 18 $\Rightarrow n_k=16\cdot 6+6=6\cdot 17=102$

k_a	k_b	k_c
1	1	18
1	18	1
18	1	1
18	18	1
18	1	18
1	18	18

~~Для каждого случая однозначно определяется то, какой $t=1$, т.к. при $k_a=1$: $t_a=1$ и т.д. $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ 2 варианта выбрать какое из оставшихся $t=18$ и $t_{ост}\in[2;17] \Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow$ 16 вариантов~~

~~Так-же для каждого из 6 отдельных случаев t определяются однозначно только 3; остальные 3 – тоже 16~~

лист 3 ↓ см (4)

Аналогично получим, что для определенного k для 1 и 16 есть 14 вариантов выбора оставшегося t и 6 отдельных случаев вне 6 перестановок $\Rightarrow n_t =$ ~~15·6+6=16·6~~ $14 \cdot 6 + 6 = 15 \cdot 6 = 90$

Итого $n_{общ} = n_t \cdot n_k = 15 \cdot 6 \cdot 17 \cdot 6 = 90 \cdot 102 = 9180$

Ответ: 9180