Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102505**

ID профиля: **900337**

Вариант 21

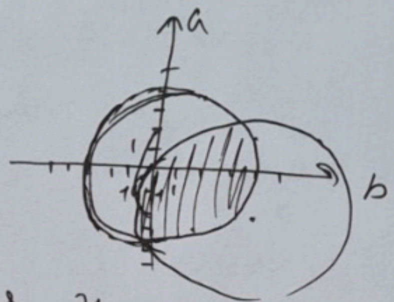
№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 20\\ a^2+b^2\leq \min(8a-4b;20)\end{cases}$$

второе неравенство равносильно системе $\begin{cases}a^2+b^2\leq 20\\ a^2-8a+b^2+4b\leq 0\end{cases}$

$$\begin{cases}a^2+b^2\leq 20\\ (a-4)^2+(b+2)^2\leq 20\end{cases}$$

Построим график в плоскости aOb:



a и b могут быть только внутри пересечения этих областей

$4-\sqrt{20}\leq a\leq\sqrt{20}$

$3-2\sqrt{20}\leq b\leq 2\sqrt{20}-5$

Точки пересечения:

$-8a+16+4b+4=0$

$b=2a-5.$

$a^2+(2a-5)^2=20$

$a^2+4a^2-20a+25-20=0$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0.$

$D=16-4=12$

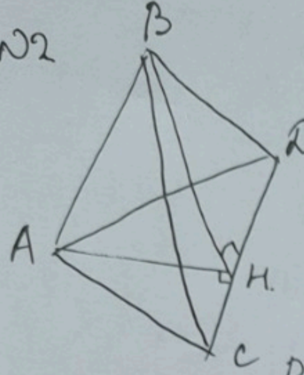
$a=\frac{4\pm2\sqrt3}{2}=\underline{\underline{2\pm\sqrt3}}$

$(2+\sqrt3;\,2\sqrt3-1)$ и $(2-\sqrt3;\,-1-2\sqrt3).$

21102505 (U900337 M1301960)

Чистовик

№2



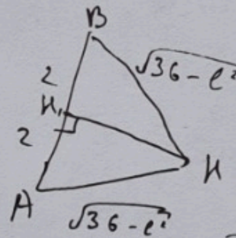
$AB=4 \quad AC=CB=5 \quad AD=DB=6$

Т.к CD параллельно оси цилиндра, то чтобы найти радиус цилиндра, нужно провести плоскость, перпендикулярную CD и взять треугольник в этой плоскости, вершины которого лежат на цилиндре (боковой его поверхности). Радиус описанной окружности этого треугольника равен радиусу цилиндра.

Заметим, что $\triangle ACD = \triangle BCD$ по 3 сторонам.
Проведем $AH \perp CD$. Т.к $\triangle ACD = \triangle BCD$, то $BH \perp DC$.
Тогда, радиус цилиндра равен радиусу описанной окружности $\triangle ABH$.
(A, B лежат на боковой поверхности цилиндра по условию, CD лежит полностью на боковой поверхности, т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра и т. C и D лежат на ней)

Пусть, $HD = \ell$ тогда по т. Пифагора $BH = \sqrt{36-\ell^2}$; $AH = BH = \sqrt{36-\ell^2}$

Тогда, рассмотрим $\triangle ABH$:



Он равнобедренный
Если HH_1 - высота, то это и медиана (по св-ву)
$AH_1 = 2$.
Тогда по т. синусов

$$\frac{BH}{\sin\angle BAH} = 2R$$

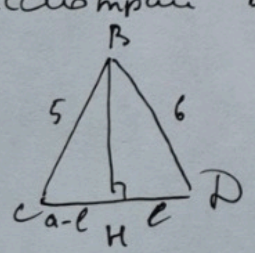
$$A \quad \sin\angle BAH = \frac{H_1H}{AH} = \frac{\sqrt{32-\ell^2}}{\sqrt{36-\ell^2}}$$

$$\frac{\sqrt{36-\ell^2}\cdot\sqrt{36-\ell^2}}{\sqrt{32-\ell^2}} = 2R \qquad \frac{36-\ell^2}{\sqrt{32-\ell^2}} = 2R$$

Чтобы радиус был наименьший, надо чтобы ℓ было ~~наименьшим~~ наибольшим, но $32-\ell^2>0$ $\quad \ell^2<32$

$\ell < 4\sqrt{2}$

Рассмотрим $\triangle BDC$:



Пусть, $CD = a$, тогда $CH = a - \ell$

$BH^2 = 36-\ell^2 = 25 - (a-\ell)^2$ по т. Пифагора

$11 = 2a\ell - a^2$ $\qquad a^2 - 2a\ell + 11 = 0$

$(a-\ell)^2 + 11 - \ell^2 = 0$

$(a-\ell)^2 = \ell^2 - 11$

$a = \ell \pm \sqrt{\ell^2-11}$ $\qquad a \geq \ell \Rightarrow a = \ell + \sqrt{\ell^2-11}$

по неравенству треугольника

$a \leq 11$

$\ell + \sqrt{\ell^2-11} \leq 11$ $\qquad \ell^2 - 11 \leq 11^2 + \ell^2 - 22\ell$

$\sqrt{\ell^2-11} \leq 11-\ell$ $\qquad 22\ell \leq 11^2 + 11$

$2\ell \leq 11+1 \qquad \ell \leq 6$

Ответ: ~~[illegible]~~.

Чистовик.

№1.

a_1 - первый член прогрессии d - её разность $d>0$ $d\in\mathbb{Z}$ $a_1\in\mathbb{Z}$

$S=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=7(a_1+3d)$ по формуле суммы арифм прогрессии.

$a_8\cdot a_{17}=(a_1+7d)(a_1+16d)=a_1^2+23da_1+112d^2$

$a_{11}\cdot a_{14}=(a_1+10d)(a_1+13d)=a_1^2+23da_1+130d^2$

По условию: $a_1^2+23a_1d+112d^2>7a_1+21d+27$ (1)

$a_1^2+23a_1d+130d^2<7a_1+21d+60$ (2)

Сложим большие и меньшие части соответственно.

$a_1^2+23a_1d+112d^2+7a_1+21d+60>7a_1+21d+27+a_1^2+23a_1d+130d^2$

$33>18d^2$

$d^2<\frac{33}{18}$ т.к. $d>0$ и $d\in\mathbb{Z}$, то $\underline{d=1}$

Подставим $d=1$ в (1) и (2):

(1) $a_1^2+23a_1+112>7a_1+48$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0$

$a_1\neq-8$

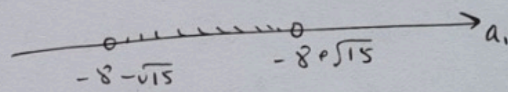
(2) $a_1^2+23a_1+130<7a_1+21+60$

$a_1^2+16a_1+49<0$

$a_1^2+16a_1+49=0$

$D=60$

$a_1=-8\pm\sqrt{15}$



$3<\sqrt{15}<4$

$-12<-8-\sqrt{15}<-11$ $\quad -5<-8+\sqrt{15}<-4$

Значит, $a_1=\{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5\}$ т.к. $a_1\in\mathbb{Z}$

Учитывая, что $a_1\neq-8$ из (1) нер-ва получаем ответ.

Ответ: a_1 может быть $-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

Черновик.

$a_1 \dots \quad a_1+6d \qquad a_1 \in \mathbb{Z} \quad d \in \mathbb{Z} \quad d \neq 0 \quad d>0.$

$(a_1+10d)(a_1+13d) < 7(a_1+3d) + 60$

$S = \frac{a_1+a_1+6d}{2} \cdot 7 = 7(a_1+3d) = 7a_1+21$

$a_8 \cdot a_{17} = \underline{(a_1+7d)(a_1+16d) > 7(a_1+3d)+27}$

$a_1^2+23a_1+112$

$a_1^2+23a_1+130$

$a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27$

$a_1^2+23ad+130d^2 < 7a_1+21d+60$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{23ad}+112d^2+\cancel{7a_1}+21d+60 > \cancel{a_1^2}+\cancel{23ad}+130d^2+\cancel{7a_1}+21d+27$

$\cancel{112d^2 >}$ $\quad 60 > 27+18d^2$

$33 > 18d^2$

$d^2 < \frac{33}{18} \qquad \boxed{d=1}$

$16 \cdot 16 = 96$, 256, -130, -81, 49; $49 \cdot 4 = 196$

$a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27 \qquad 112-48=64$

$a_1^2+16a_1+64>0.$

$(a_1+8)^2>0 \qquad a_1 \neq -8.$

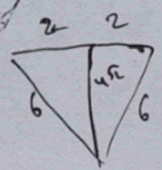
$a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+21+60$

$a_1^2+16a_1+49<0$

$D = 16^2-4\cdot 49 = 60. = 4\cdot 15$

$a_1 = \frac{-16\pm 10}{2} \quad -3, -13$

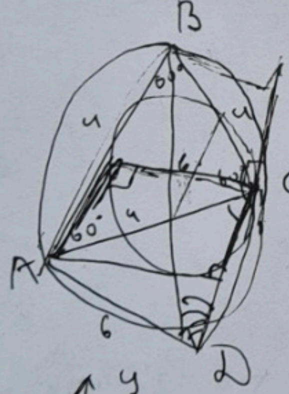
$121 \quad 333-253=80$

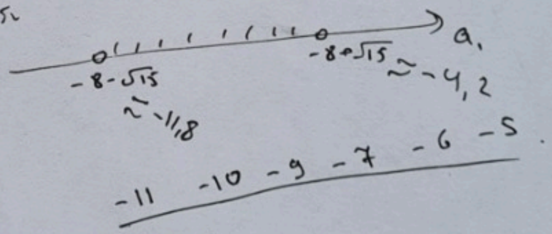


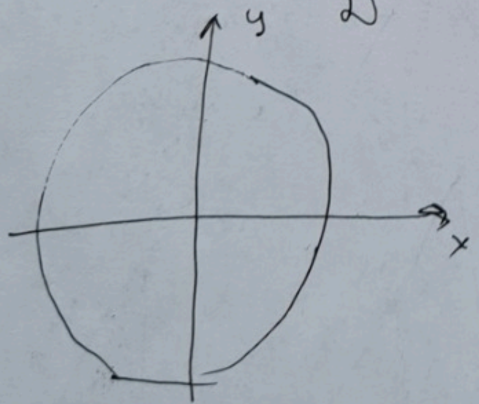
$36-4 \quad 32 \quad 4\sqrt{2}$

$a_1 = \frac{-16\pm 2\sqrt{15}}{2} = -8\pm\sqrt{15}$

$\sqrt{15} \approx 3{,}8$







$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20$

$a^2+b^2 \leq \min(8a-4b, 20).$

$S = -56.$

1) -80

2) -68

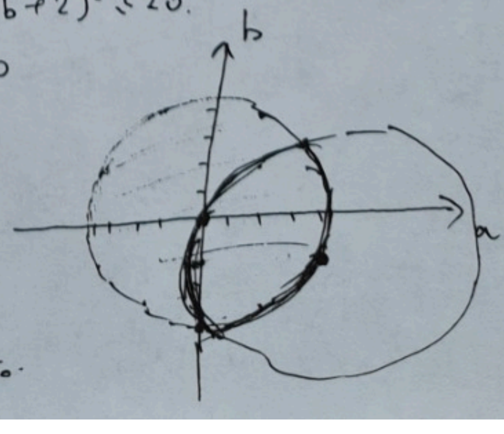
$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq 8a-4b \end{cases}$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \leq 20$

$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20. \\ a^2+b^2 \leq 20 \end{cases}$

$4-\sqrt{20} \leq a_1 \leq \sqrt{20}$

$3-2\sqrt{20} \quad \leq b \leq 2\sqrt{20}-5$



21102505 (U900337 M1301960)

$-8a+16+4b+4=0$

$-2a+4+b+1=0$

$b=2a-5$

$8-2\sqrt{20}.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102505**

ID профиля: **900337**

Вариант 21

Черновик

НОД $(a;b;c) = 5\cdot 7$

НОД $(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16}$

$\log_{\sqrt5} 5 = 2$ $\log_{25} 5^2 = 1$

$\log_5 25 = 2$

a	b	c
7	7^a	7^b
5	5^x	5^y
5^x	5	5^y
5^x	5^y	5

$a+b=15$

$x+y=17$

1	18
2	17
3	14
4	18
5	18
6	80
7	81
8	10
9	9

$7\cdot 3\cdot 9$

7 7^a 7^b

5

5 $5^{\cdot}$ 5^{15}

7 7^a 7^b

5 5^x 5^y

$2\cdot 16-3\cdot 4+5$ $4\cdot 2$

$32-12+5=25$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log_a b$ $2\log_c a$ $\log_b c$

$2x-3=a$

$x+1=b$

$2x^2-3x+5=c>0$ всегда

1) $\cancel{\log_a b} = \log_c a = \log_b c+1 = \log_b bc$

$\cancel{\log_a b = \frac{1}{\log_a c}}$ $\cancel{\log_b a\cdot\log_b bc = 1}$

$\log_b bc$

$\log_a b\cdot\log_a c = 1$

$\cancel{\log_a b\cdot\log_a c = \log_b a}\cdot\log_b bc$

$2x-3>0$

$\boxed{x>1,5}$ $x\neq 2$

$x+1>0$

$2x^2-3x+5>0$

$\cancel{D=9-4\cdot 2\cdot 5<0}$

$\cancel{2x^2-3x+5\neq 1}$

$\cancel{2x^2-3x+4\neq 0}$

$\cancel{D=9-2\cdot 2\cdot 4<0}$

$\cancel{2x-3>x+1}$

$\cancel{x>4}$

$\cancel{2\log}$

$2x-3\neq 1$

$2x\neq 4$

$x\neq 2$

$\frac{2}{\log_b a}$ $2\frac{\log_b a}{\log_b c}$ $\log_b c$

$x=\log_b a$

$y=\log_b c$

1) $\frac{2}{x}=\frac{x}{y}$ $\frac{2x}{y}=y+1$

$x^2=y$ $2x=y^2+1$

$x^2-2x=y-y^2-1$

$(x-1)^2=y-y^2$

$\frac{2}{x}$ $2\frac{x}{y}$ y

$a=\log_{x+1}2x-3$ $b=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$a<b$

$\log_a b = x = \log_b c$

$(a^x)^x = c$ $b^x = c$

$\log_a c = x^2 = (\log_a b)^2$

$a^{x^2}=c$

$\cancel{a}$ $\frac{2}{b}$

$\frac{2}{a}$ $2\frac{a}{b}$ $b.$

$2x-3 \neq 2x^2-3x+5$

$2x^2-5x+8$

$D=25-8\cdot 2\cdot 8$

$0<2x^2-5x+8$

$\cancel{x^2+2x+1<2x^2-3x+5}$

$\cancel{x^2-5x+4}$

$\cancel{x+1<2x-3}$

$\cancel{2=a}$

$\cancel{2x^3+x^2}$

$2x^3-x^2-1=0$

$(x-1)(2x^2+x+1)=0$

$D=1-8$

$x^2+1=2x$

$1+x^2=2x^3$

$2x^3-x^2-1=0$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-1 & x-1 \\ \underline{-2x^3-2x^2} & 2x^2+x+1 \\ \quad x^2 & \\ \underline{-x^2-x} & \\ \quad x & \end{array}$$

Черновик

a	b	c
7	7	7^{16}
5	5	5^{18}

a	b	c
7	7	7^{16}
	5	5^{17}

$3\cdot2\cdot16+5 \quad 3\cdot2\cdot18-4$

$1\ldots16$

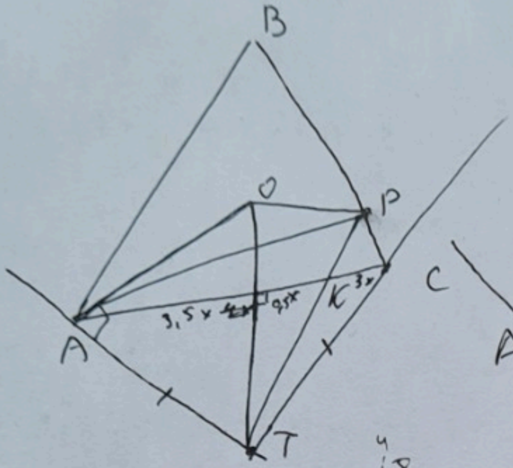
$5 \quad 5$

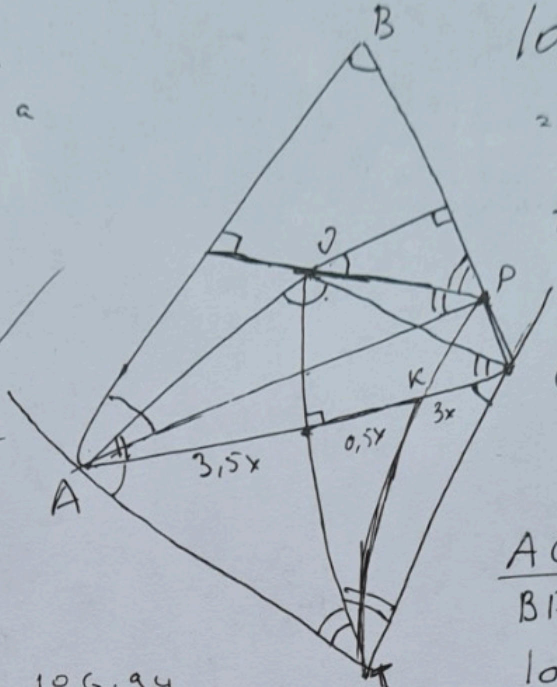
$5^{17} \; 5^{18}$

$\log_a b = \log_c a$

$\log_a b\cdot\log_a c = 1.$

$\log_a b = \log_c a$





$\log_a b = \log_b a =$

$= \log_b ab.$

$\frac{1}{\log_b a} =$

$\log_b a\cdot\log_b ab = 1$

$\log_b a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

$\log_b a^2 = \log_b c$

$\frac{AC}{BA} = \frac{CT}{PB}$

$\frac{\log_b a}{\log_b ab} = \log_b c$

$\log_c b = 1 + \cancel{\log}\frac{1}{\log_b a}$

$18\times6 = 108$

$16\times6 = 96$

$106\cdot94$

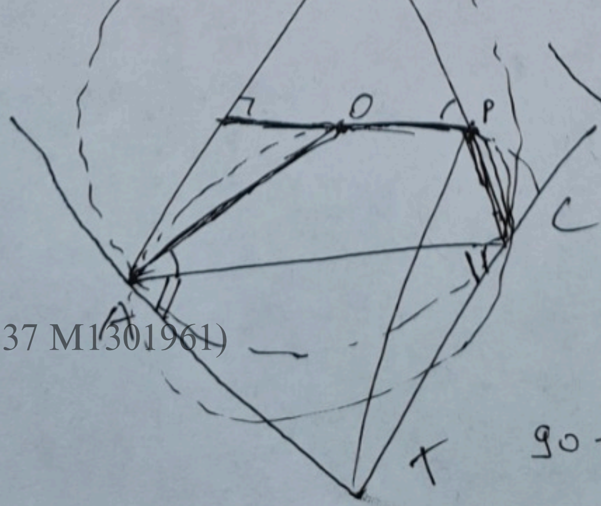
106×94: 424, 954, 9964

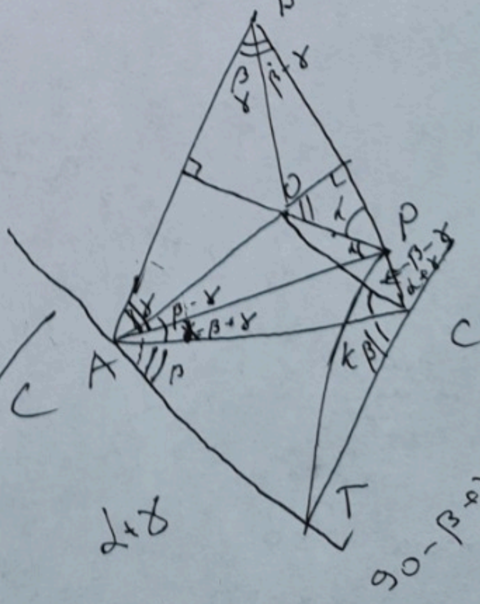
$2\log_{2x-3}(x+1)$ $\quad 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ $\quad \log_{x+1}(2x^2-3x+5).$

$2\log_{2x-3}(x+1)\sqrt{2x-3}$ $\quad 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)(2x^2-3x+5).$ $\quad \log_{x+1}(x+1)(2x^2-3x+5)$

$\frac{2}{\log_{x+1}2x-3}$ $\quad \frac{2\log_{x+1}2x-3}{\log_{x+1}2x^2-3x+5}$ $\quad \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\cancel{\frac{\log_{x+1}2x-3}{\log}}$





$\alpha+\gamma$

$90-\beta+\gamma$

$90+\gamma = \alpha+\beta+\gamma$

№4.

т.к. НОД$(a;b;c)=35=5\cdot7$, то в одном или более числах должна встречаться 5 в 1 степени и 7 в 1 степени.

А т.к НОК$(a;b;c)=5^{18}\cdot7^{16}$, то в одном или более числах должна встречаться 5 в 18 степени ~~и~~ и 7^{16}.

a, b, c упорядочены.

Сначала разберемся с 5: 5 в 1 степени мы можем поставить в 1 из 3 чисел, 5^{18} в 1 из 2 оставшихся, а в третье оставшееся число мы ставим 5^x, где x от 1 до 18 (любое). Но мы посчитаем так 2 случая $(5,5,5^{18}$ и $5^{18},5^{18},5)$ дважды. Значит, всего вариантов $(3\cdot2\cdot18-2)$

Для каждого из этих случаев мы аналогично ставим 7^1, 7^{16} и 7^x, где x от 1 до 16.

Всего случаев будет $(3\cdot2\cdot18-2)\cdot(3\cdot2\cdot16-2)=9964$

Ответ: 9964.

Чистовик. Вариант 21

№ 5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{(2x-3)}(x+1)$ $\quad \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

ОДЗ: $x>1,5$ $\quad x>-1$ $\quad 2x^2-3x+5>0$ $\quad 2x^2-3x+5\neq 1$

$x\neq 2$ $\quad x\neq 0$ $\quad x\in R$ $\quad x\in R$

$x>1,5$

Пусть, $a=2x-3$ $\quad b=x+1$ $\quad c=2x^2-3x+5$

Наши числа: $2\log_a b$ $\quad 2\log_c a$ $\quad \log_b c$

1) $2\log_a b = 2\log_c a = \log_b c+1$

$\Downarrow$

$\log_a b = x = \log_c a$

$a^x=b$ $\quad c^x=a$

$(c^x)^x=a^x=b$

$c^{x^2}=b$

$\log_c b = x^2 = (\log_c a)^2 = (\log_a b)^2$

$\log_b c+1 = 2\log_c a$

$\frac{1}{\log_c b}+1 = 2\log_c a$

$\frac{1}{(\log_c a)^2}+1 = 2\log_c a$

$1+\log_c^2 a = 2\log_c^3 a$

$\log_c a = 1$ или $2\log_c^2 a+\log_c a+1=0$

$\boxed{c=a=b}$

не имеет корней.

Значит, первые 2 числа равны, а третье меньше их на 1 при $a=b=c$.

2) $2\log_a b = \log_b c = 2\log_c a+1$

$\log_a b^2 = \log_b c = x$

$a^x=b^2$ $\quad b^x=c$

$a^{x^2}=b^{2x}$ $\quad b^{2x}=c^2$

$a^{x^2}=c^2$

$\log_a c^2 = x^2 = (\log_a b^2)^2$

$2\log_a c = 4\log_a^2 b$

$\log_a c = 2\log_a^2 b$

$\frac{2}{\log_a c}+1 = 2\log_a b$

$\frac{2}{2\log_a^2 b}+1 = 2\log_a b$

$\frac{1}{\log_a^2 b}+1 = 2\log_a b$

Аналогично 1 случаю ~~$a=b=c$~~ $a=b$

т.к $a=b$, то $2\log_a b = 2 = \log_b c = 2\log_c a+1$

$b^2=c$

$\log_c a = 1/2$

$a=\sqrt{c}$

$a^2=c$

$c=a^2=b^2$

21102505 (U900337 M1301961)

N5 (продолжение)

3) $2\log_c a = \log_b c = 2\log_a b + 1$

$\log_c a^2 = \log_b c = x$

$c^x = a^2 \quad b^x = c$

$b^{x^2} = c^x$

$a^2 = b^{x^2}$

$\log_b a^2 = x^2$

$2\log_b a = (\log_c a^2)^2$

$\log_b a = 2\log_c^2 a$

$\frac{2}{\log_b a} + 1 = 2\log_c a$

$\frac{2}{\log_c^2 a} + 1 = 2\log_c a$

$\log_c a = 1$

$\underline{c = a}$

$2 = \log_b c = 2\log_a b + 1$

$c = b^2 \quad \cancel{b=a^2} \quad \log_a b = 1/2$

$b = \sqrt{a}$

$b^2 = a$

$\boxed{b^2 = a = c}$

Найдем x:

1) $c = a = b$: $2x - 3 = x + 1$

$x = 4$

$2x^2 - 3x + 5 = x + 1$

$2x^2 - 4x + 4 = 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$x = 4$ не подходит \quad $\underline{\text{таких } x \text{ нет}}$

2) $c = a^2 = b^2$

$2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 4$

$2x^2 - 3x + 5 = 4x^2 - 12x + 9$

$2x^2 - 9x + 4 = 0$

$D = 81 - 16 \cdot 2 = 81 - 32 = 49$

$x = \frac{9 \pm 7}{4} = 4 ;\ = 1/2$

$\boxed{x = 4}$

$(2x-3)^2 = (x+1)^2$

$\left[\begin{array}{l} 2x - 3 = x + 1 \\ 2x - 3 = -x - 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2/3 \end{array}\right.$

3) $b^2 = a = c$

$2x - 3 = 2x^2 - 3x + 5$

$2x^2 - 5x + 8 = 0$

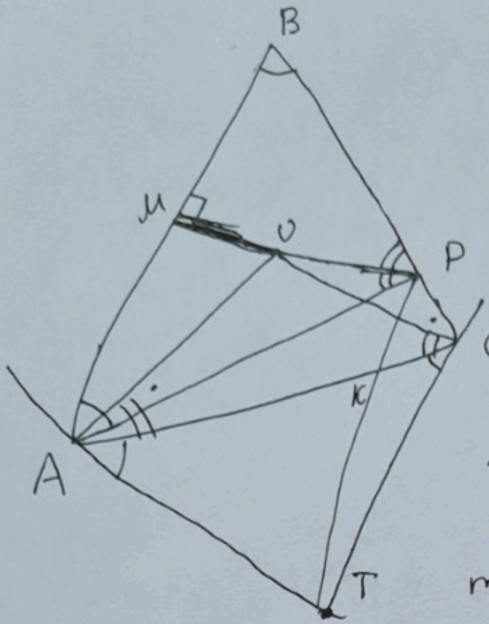
$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0$

$\underline{\text{Таких } x \text{ нет.}}$

Ответ: 4.

21102505 (U900337 M1301961)

№6.



$S_{APK}=12$ $S_{CPK}=9$.

$\angle OAC=\alpha$ $\angle CAT=\beta$ $\alpha+\beta=90^\circ$ т.к $\angle OAT=90^\circ$ (т.к AT-касательная)

$\angle OPC=\angle OAC=\alpha$ (т.к OPCA вписан в окр)

$\angle ACT=\angle CAT=\beta$ (т.к. отрезки касательных равны)

$\angle ABC=\angle ACT$ (т.к. CT-касательная)

Тогда, $\angle BPO+\angle PBA=90^\circ$

Продлим PO до пересечения с AB в т. M

Т.к $\angle BPO+\angle PBA=90^\circ$, то $\angle PMP=90^\circ$ (т.к сумма углов в треуг. 180°)

т. O - центр описанной окружности в ABC =>

т. O лежит на серединных перпендикулярах сторон в ABC.

т.к. $OM\perp AB$, то M - середина AB. Значит, PM в ΔAPB высота и медиана =>

ΔBPA - равнобедренный. $\angle BAP=\angle ABP=B$.

$\angle OAP=\angle PCO$ (т.к. они опираются на 1 дугу)

$\frac{AK}{KC}=\frac{4}{3}$