Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102493**

ID профиля: **79844**

Вариант 21

№ 1. Чистовик 1 из 4

Вариант 21

$a_1; a_1+b, a_1+2b, a_1+3b; a_1+4b, a_1+5b, a_1+6b$

$S = 7a_1 + 21b.$

① $a_8 \cdot a_{17} = (a_1+7b)(a_1+16b) = a_1^2 + 23a_1b + 7\cdot16b^2 > 7a_1 + 21b + 27.$

② $a_{11} \cdot a_{14} = (a_1+10b)(a_1+13b) = a_1^2 + 23a_1b + 130b^2 < S + 60$

$\begin{array}{r} +16 \\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$

$S + 60 + a_1^2 + 23a_1b + 7\cdot16\,b^2 > S + 27 + a_1^2 + 23a_1b + 130b^2$

$33 > 18b^2$

$11 > 6b^2$

$b^2 < \frac{11}{6}$

Возрастающая последов. $\Rightarrow b>0 \Rightarrow \frac{11}{6} > b > 0$ Числа целые $\Rightarrow$ $b = 1$

$\begin{array}{r} 112 \\ -48 \\ \hline 64 \end{array}$ $\begin{array}{r} 130 \\ 81 \\ \hline 49 \end{array}$

из ① $a_1^2 + 23a_1 + 7\cdot16 > 7a_1 + 21 + 27.$ из ② $a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60.$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1+8)^2 > 0$

$a_1 \neq -8$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$\frac{D}{4} = 64 - 49 = 15$

$a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{15}}{1}$

$\sqrt{15} < \sqrt{16}$

$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $a_1 \in [-11; -5]$

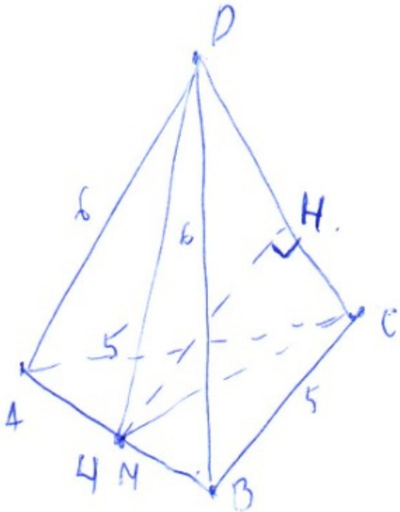
$\Rightarrow a_1 \in [-11; -8) \cup (-8; -5] \Rightarrow$ все возможные a_1: $-11; -10; -9; -7; -6; -5.$

21102493 (U79844 M1298011)

Ответ: $\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Чистовик 2 из 4

№-2



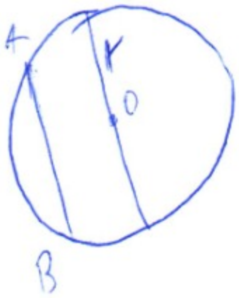
т. M-середина AB => в ΔADB: $AD=DB=6$ => равнобедр. с осн AB => DM-высота и медиана => $DM \perp AB$

Аналогично в ΔACB: $CM \perp AB$

$\left.\begin{matrix} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \perp (CMD) \Rightarrow AB \perp CD$ (по св. перп. к плос.)

$CD \parallel$ оси цилиндра => $AB \perp$ оси цилиндра => $AB \parallel$ основанию цилиндра.

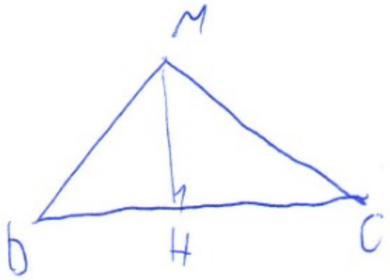
Рассмотрим сечение цилиндра, параллельное основанию и проходящее через точку A.



По условию выбрали цилиндры с минимальным радиусом. Диаметр ≥ длины хорды AB => для минимизации ~~хорд~~ радиуса, AB-должен быть диаметром => $r = \frac{AB}{2} = 2$

MH-радиус основания цилиндра => $MH = 2$.

Возможны 2 варианта.

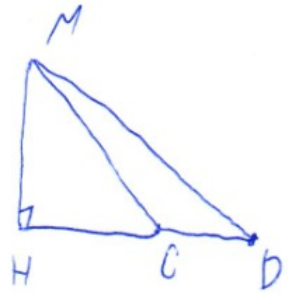


из ΔMDB: $DM^2 = 36-4 = 32$

из ΔMCB: $CM^2 = 25-4 = 21$

из ΔDMH: $DH = \sqrt{DM^2 - MH^2} = \sqrt{32-4} = 2\sqrt{7}$

из ΔMHC: $HC = \sqrt{MC^2 - MH^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$



$DC = DH + HC = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

$DC = DH - HC = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

21102493 (U79844 M1298011)

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{17}$; $2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

Чистовик 3 из 4

$2\cancel{\sqrt{7}}\sqrt{28} - \sqrt{17} = x$

$\cancel{x^2 = 28+17+2\sqrt{28\cdot 17}}$

№3

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ — ~~окружность~~ круг с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{20}$

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20)$

1) $8a-4b > 20 \Rightarrow 2a > 5+b$.

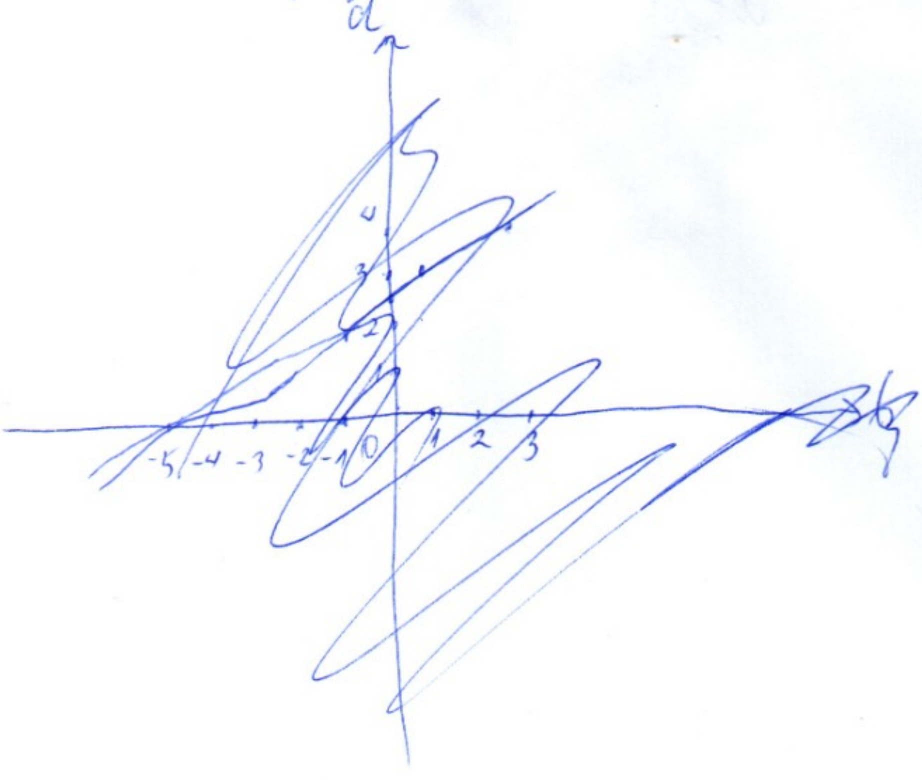
$a^2+b^2 \le 20$ — ~~окружность~~ круг с радиусом $\sqrt{20}$ и центр $(0;0)$

2) $8a-4b < 20 \Rightarrow 2a < 5+b$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$.

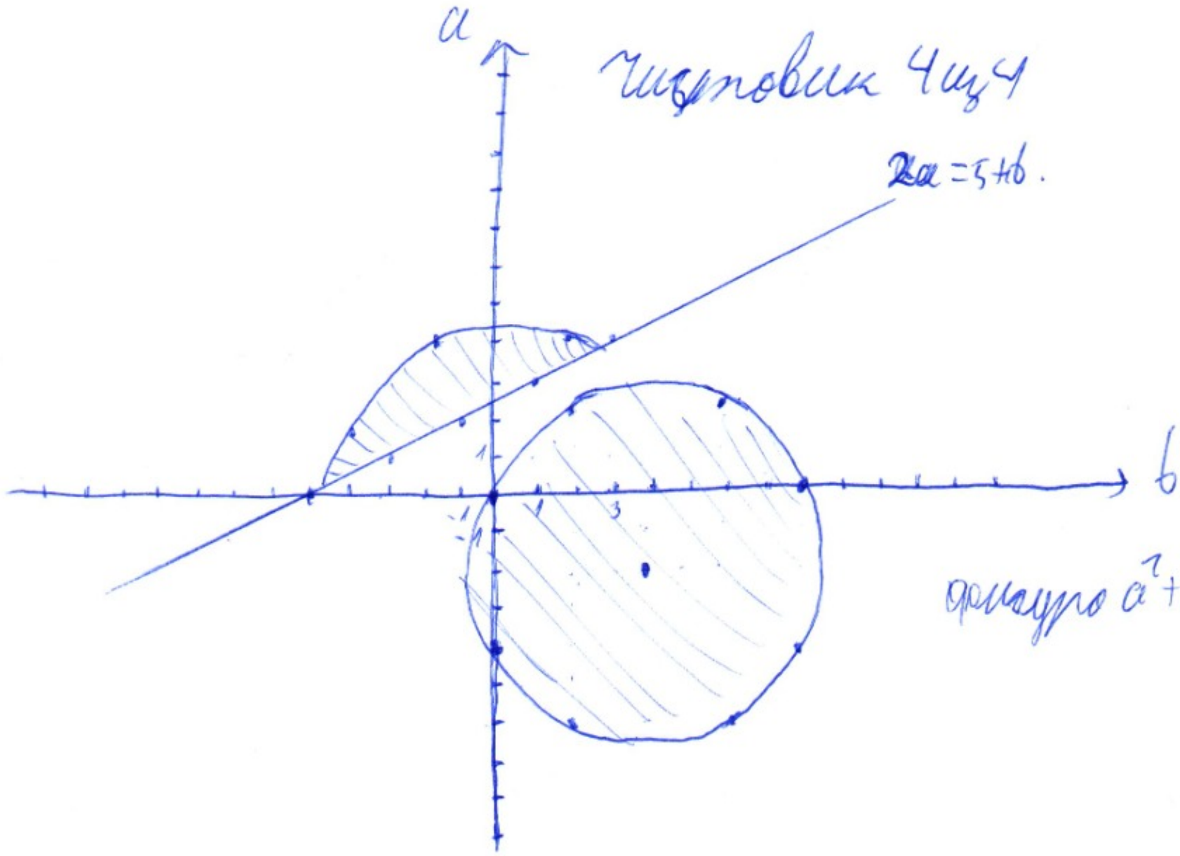
$a^2-8a+16-16+b^2+4b+4-4 \le 0$.

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$ — круг с центром в $(4;-2)$ с радиусом $\sqrt{20}$.



21102493 (U79844 M1298011)

Чистовик 4из4



фигура $a^2+b^2 \leq \min(8a-4b; 2$

Вокруг каждой точки $(a;b)$ подходят все $(x;y)$ которые лежат в окружности с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{20}$ ⇒ вокруг дуговый круга и части круга надо радиус увеличить на $\sqrt{20}$, чтобы получить фигуру M,

21102493 (U79844 M1298011)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

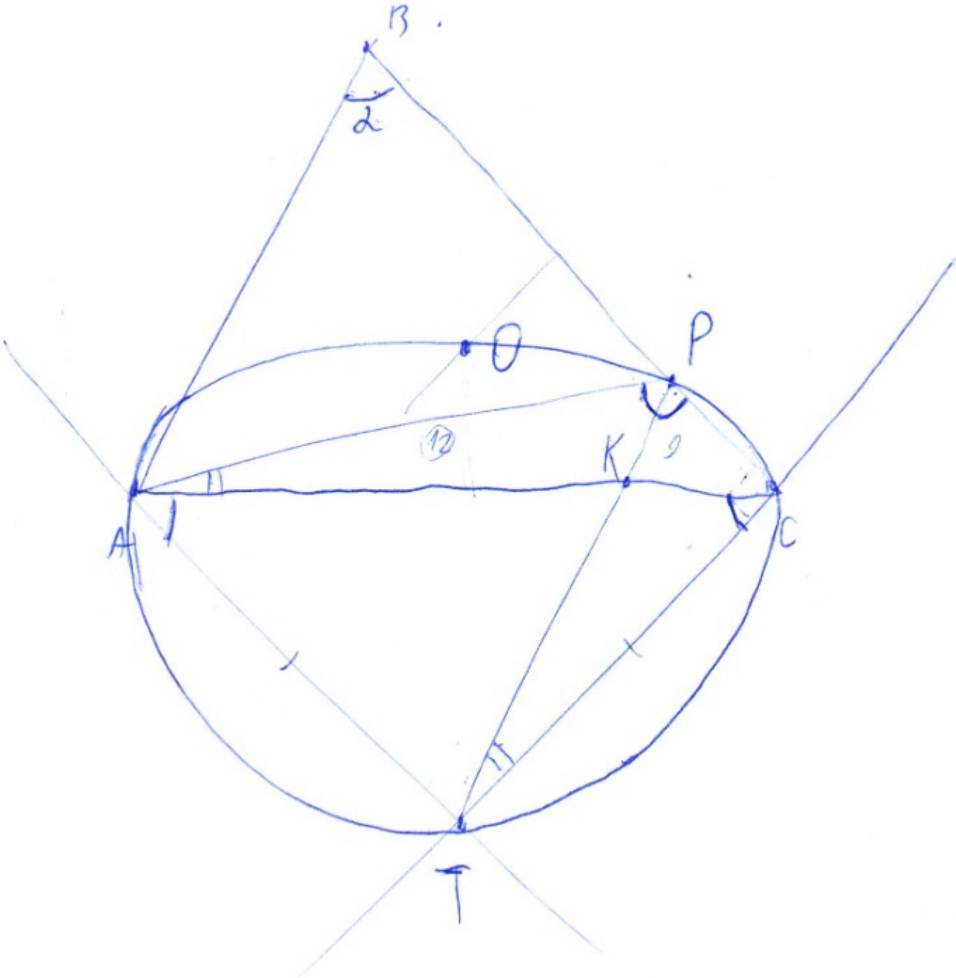
Шифр: **21102493**

ID профиля: **79844**

Вариант 21

Чистовик 1 из 4

№-6.



$\angle ABC = \alpha$. ; для ω: $\angle TAC = \underset{=\alpha}{\angle ABC}$ (угол между кас и хордой равен вписанному на эту же дугу $\cup AC$)

Аналогично $\angle ACT = \alpha \Rightarrow$ в $\triangle ACT$: $\angle ATC = 180 - 2\alpha$ (Σ углов)

для ω: $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha$ (центр угол и впис на $\cup AC$)

в $AOCT$: $\angle AOC + \angle ATC = 180 - 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow AOTC$ – вписан в окр $\Rightarrow$

$\Rightarrow A, O, T, C \in$ одной окр

$\angle APT = \angle ACT = \alpha$ (впис опир на AT)

$\angle PAC = PTC$ (вписан опир на PC)

$\angle TAC = \angle TPC = \alpha$ (впис опир на $\cup TC$)

21102493 (U79844 M1298012)

Чистовик 2 из 4

$$\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{2AP \cdot PK \sin\alpha}{2PK \cdot \sin\alpha \cdot PC} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$\angle APB = 180 - \angle APC = 180 - 2\alpha \Rightarrow$ в ΔABP: $\angle BAP = 180 - (180 - 2\alpha + \alpha) = \alpha$ (Σ углов Δ)

$\Rightarrow \Delta ABP$ — равнобед с осн AB (по α) (углы при осн равны)

$\Rightarrow AP = BP$.

$$\frac{BC}{PC} = \frac{BP+PC}{PC} = \frac{BP}{PC} + 1 = \frac{AP}{PC} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.$$

$\Delta CPK \sim \Delta CBA$ по 2 углам $\Big| \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{CB}{PC}\right)^2 \Rightarrow$

$\angle PCK$ — общий

$\angle CPK = \angle CBA = \alpha$

$$\Rightarrow S_{ABC} = S_{CPK} \cdot \left(\frac{CB}{PC}\right)^2 = 9 \cdot \frac{49}{9} = 49$$

Ответ: 49.

б) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$ $\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ $\quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{49}{9}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{58}$

Из $\Delta CPK \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{CP}{BC} = \frac{PK}{AB} = \frac{3}{7}.$

α остр $\Rightarrow \sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}.$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2} \Rightarrow AB \cdot BC = \frac{2S_{ABC}}{\sin\alpha} = \frac{2 \cdot 49 \cdot \sqrt{58}}{3} = x$$

$$S_{PKC} = \frac{PK \cdot PC \cdot \sin\alpha}{2} \Rightarrow PK \cdot PC = \frac{2S_{PKC}}{\sin\alpha} = \frac{2 \cdot 9 \cdot \sqrt{58}}{3} = y$$

обозначим за x и y.

$3AB = 7PK$

$3BC = 7CP$

$$S_{APK} = \frac{AP \cdot PK \cdot \sin\alpha}{2} \Rightarrow AP \cdot KP = \frac{2S_{APK}}{\sin\alpha} = \frac{2 \cdot 12 \sqrt{58}}{3} \Rightarrow BP \cdot PC = \frac{2 \cdot 12\sqrt{58}}{3} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow BP^2 = \frac{2 \cdot 12 \cdot 4\sqrt{58}}{9} \Rightarrow \frac{32\sqrt{58}}{3} \Rightarrow BP = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{58}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}\sqrt[4]{58}}{3}$$

Чистовик Зад4

$\frac{BP}{PC}=\frac{4}{3} \Rightarrow PC=\frac{3BP}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4\sqrt{2}\sqrt[4]{58}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt[4]{58}}{3}=\sqrt{6}\sqrt[4]{58}.$

$\Rightarrow BC=BP+PC=\frac{4}{3}\sqrt{6}\sqrt[4]{58}+\sqrt{6}\sqrt[4]{58}=\frac{7}{3}\sqrt{6}\sqrt[4]{58}$

$AB\cdot BC=\frac{2\cdot 49\sqrt{58}}{3} \Rightarrow AB=\frac{2\cdot 49\cdot\sqrt{58}}{3\cdot BC}=\frac{2\cdot \overset{7}{\cancel{49}}\cdot\sqrt{58}\cdot 3}{\cancel{7}\cdot 3\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{58}}=$

$=\frac{14\cdot\sqrt[4]{58}}{\sqrt{6}}=\frac{14\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{58}}{6}=\frac{7}{3}\sqrt{6}\sqrt[4]{58}=a$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

$\frac{9}{49}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha=\frac{49}{58}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{58}}$

Из $\triangle ABC$: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha.$

$AC^2=a^2+a^2-2a^2\cos\alpha$

$AC^2=2a^2(1-\cos\alpha)$

$AC^2=2\cdot\frac{49}{9}\cdot 6\cdot\sqrt{58}\left(1-\frac{7}{\sqrt{58}}\right)$

$AC^2=2\cdot\frac{49}{9}\cdot 6\cdot(\sqrt{58}-7)$

$AC^2=\frac{4\cdot 49}{3}(\sqrt{58}-7)$

$AC=14\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{58}-7}\Rightarrow AC=\frac{14\sqrt{3}}{3}\sqrt{\sqrt{58}-7}$

Ответ: $\frac{14\sqrt{3}}{3}\sqrt{\sqrt{58}-7}$

21102493 (U79844 M1298012)

№4 Листок 4 из 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

Смотря на НОК, понятно что числа a;b;c состоят только из множителей 5 и 7.
НОД(a;b;c)=35 => каждое число имеет вид $35\cdot 5^n\cdot 7^m$, но при этом если все 3 числа дополнительно к 35 имеют множитель 5 или 7, то НОД увеличится => при добавлении множителей 7 и 5 (в отдельности) одно число не должно увеличиваться.

1) Дополнение 7. Одно из чисел не должно меняться (3 вар.) Исходя из НОК, одно из чисел имеет степень 7^{16} обязательно (2 варианта), и 3 число дополнительно может иметь ~~от~~ степень семерки от 0 до 15 (т.к. в 35 одна 7 есть) =>
=> всего вариантов. $6\cdot 15$.

2) Аналогично дополнение 5, это. $6\cdot 17$

Значит всего вариантов $6(15+17)=6\cdot 32=192$

Ответ: 192

21102493 (U79844 M1298012)