Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102398**

ID профиля: **128885**

Вариант 21

Чистовик. Вариант 21.

1. пусть $a_n = a_1 + (n-1)\cdot b$, $\begin{cases} b>0, \text{ т.к. прогрессия возраст-ая;} \\ b\in Z; \text{ т.к. } a_i \in Z. \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} b\in N \\ a_1 \in Z \end{matrix}}$;

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_7 = a_1 + (a_1+b) + \dots (a_1+6b) = 7a_1 + \frac{b+6b}{2}\cdot 6 = 7a_1 + 21b;$

$S = 7a_1 + 21b;$

$\begin{cases} a_8\cdot a_{17} > S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14} < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+7b)(a_1+16b) > 7a_1+21b+27 \\ (a_1+10b)(a_1+13b) < 7a_1+21b+60 \end{cases}$ (1).

$\begin{cases} a_1^2 + 7ba_1 + 16ba_1 + 7\cdot 16b^2 > 7a_1 + 21b + 27 \\ a_1^2 + 10ba_1 + 13ba_1 + 130b^2 < 7a_1 + 21b + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + (23ba_1 - 7a_1) + (112b^2 - 21b - 27) > 0 \\ a_1^2 + (23ba_1 - 7a_1) + (130b^2 - 21b - 60) < 0 \end{cases}$ (2).

Совместим два нер-ва с учетом знака.

$\underline{a_1^2} + \underline{\underline{(23ba_1 - 7a_1)}} + (112b^2 - 21b - 27) > 0 > \underline{a_1^2} + \underline{\underline{(23ba_1 - 7a_1)}} + (130b^2 - 21b - 60)$

$112b^2 - \underline{21b} - 27 > 130b^2 - \underline{21b} - 60$

$33 > 18b^2$

$b^2 < \frac{33}{18}$; $1 < \frac{33}{18} < 2$; $b\in N \Rightarrow b^2 \in N$

$\Rightarrow \begin{cases} b^2 < \frac{33}{18} \\ b^2 \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b\in N \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=1.}$

подставим $b=1$ в систему (2).

$\begin{cases} a_1^2 + (23a_1 - 7a_1) + (112-21-27) > 0 \\ a_1^2 + (23a_1 - 7a_1) + (130-21-60) < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases}$; $(a_1+8)^2 > 0$; $a_1 = -8 \pm \sqrt{64-49}$; $\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in Z \\ a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \end{cases}$

$\sqrt{15} < \sqrt{16} \Rightarrow \sqrt{15} < 4 \Rightarrow -8-\sqrt{15} > -8-4 \Rightarrow -8-\sqrt{15} > -12$

$-8-\sqrt{15} < -11$

$\sqrt{15} < \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{15} > 3 \Rightarrow -8+\sqrt{15} > -8+3$; $-8+\sqrt{15} > -5$

$-8+\sqrt{15} < -4$

$\Rightarrow a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

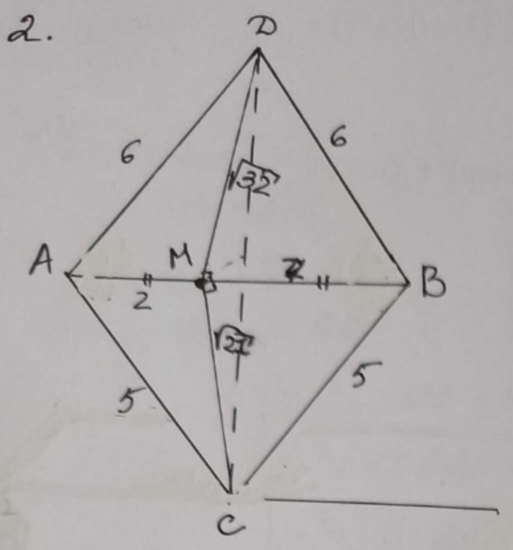
Ответ: $\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

лист 1.

21102398 (U128885 M1297613)

Чистовик. Вариант 21.

2.



1) докажем, что $AB \perp CD$:

~~через т. C проведем A_1B_1, такую, что $A_1B_1 \parallel AB$;~~

$AC = CB$, $AD = DB$ $\Big| \Rightarrow$ по опред-ию $\triangle ADB$ и $\triangle ABC$ - равнобедр. (в плоскостях (ABD) и (ABC) соответ.)

$\Rightarrow$ по св-ву $\angle CAB = \angle CBA$ ~~$= \alpha$~~

$\angle DAB = \angle DBA$ ~~$= \beta$~~

~~$AB \parallel A_1B_1$, $C \in \{A_1B_1\}$ $\Big| \Rightarrow A_1B_1 \subset (ABC)$~~

~~$AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow \angle A_1CA = \angle B_1CB = \alpha$ (как накрест. леж. углы при парал. прямых);~~

~~Рассмотрим $\triangle DAC$ и $\triangle DBC$: $AD = DB$, $AC = BC$, DC - общ. сторона $\Big| \Rightarrow$ по 3 сторонам $\triangle ADC = \triangle BDC$~~

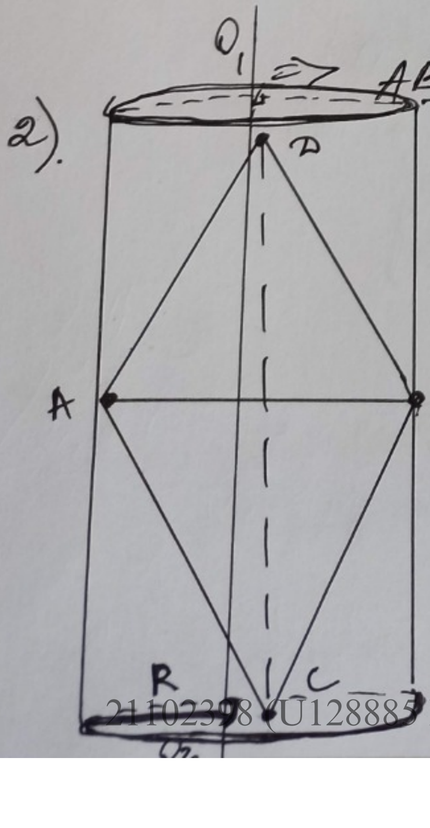
~~$\Rightarrow \angle ACD = \angle BCD$ (как соотв. равные углы в равных $\triangle$)~~

~~$\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$ (из $\triangle ABC$).~~

$\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ - равнобедр. $\Rightarrow$ DM и CM (медианы: $AM = MB$) являются еще и бисс. и высотами (по св-ву) $\Rightarrow \begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow$ по признаку $AB \perp DM$, $AB \perp CM$ $\Big| \Rightarrow AB \perp (CDM) \Rightarrow AB \perp CD$ по ~~св-ву~~ опред. прямой, $\perp$ к пл-ти

2).



$\Rightarrow AB \perp CD$

Пусть O_1O_2 - ось искомого цилиндра

$CD \parallel O_1O_2$, $\{C, D\} \in$ боков. сторонам $\Big| \Rightarrow CD \leq O_1O_2$

$CD \perp AB$, $CD \parallel O_1O_2$ $\Big| \Rightarrow AB \perp O_1O_2$ (по св-ву).

$\begin{cases} AB \perp O_1O_2 \\ A, B \text{ лежат на бок. сторонах} \end{cases} \Rightarrow AB \leq R \cdot 2$

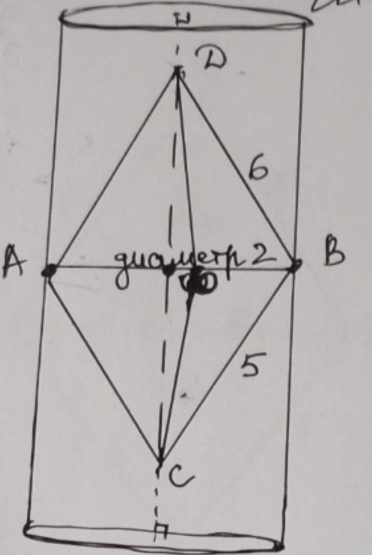
$AB \leq 2 \cdot R$, $AB = 4$, R - наим. $\Big| \Rightarrow 4 \leq 2R$, $R \geq 2$, R - наим. $\Big| \Rightarrow \boxed{R = 2}$

$\Rightarrow AB$ - диаметр

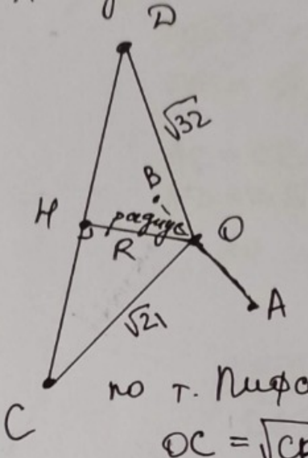
лист 2

Чистовик. Вариант 21.

2.



AB - диаметр; пусть O - центр AB



$R = 2$; ~~CD лежит~~

$CD \parallel O_1O_2$
CD лежит на пов-ти $\Rightarrow$
весь отрезок CD лежит на пов-ти

$\Rightarrow OH \perp CD \quad OH = R$
$H \in CD$

по т. Пифагора:

$OC = \sqrt{CB^2 - OB^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$OD = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

по т. Пифагора ΔOHC и ΔOHD:

$\Rightarrow CD = CH + HD = \sqrt{21-2^2} + \sqrt{32-2^2} = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

$CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{28}$.

Чистовик. Вариант 21.

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\ (2)\end{cases}$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$ — круг с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{20}=2\sqrt5$ (окружность, заполненная и внутри).

$a^2+b^2\le\min(8a-4b;20) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ 8a-4b\le 20\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 8a-4b>20\end{cases}\end{array}\right.$

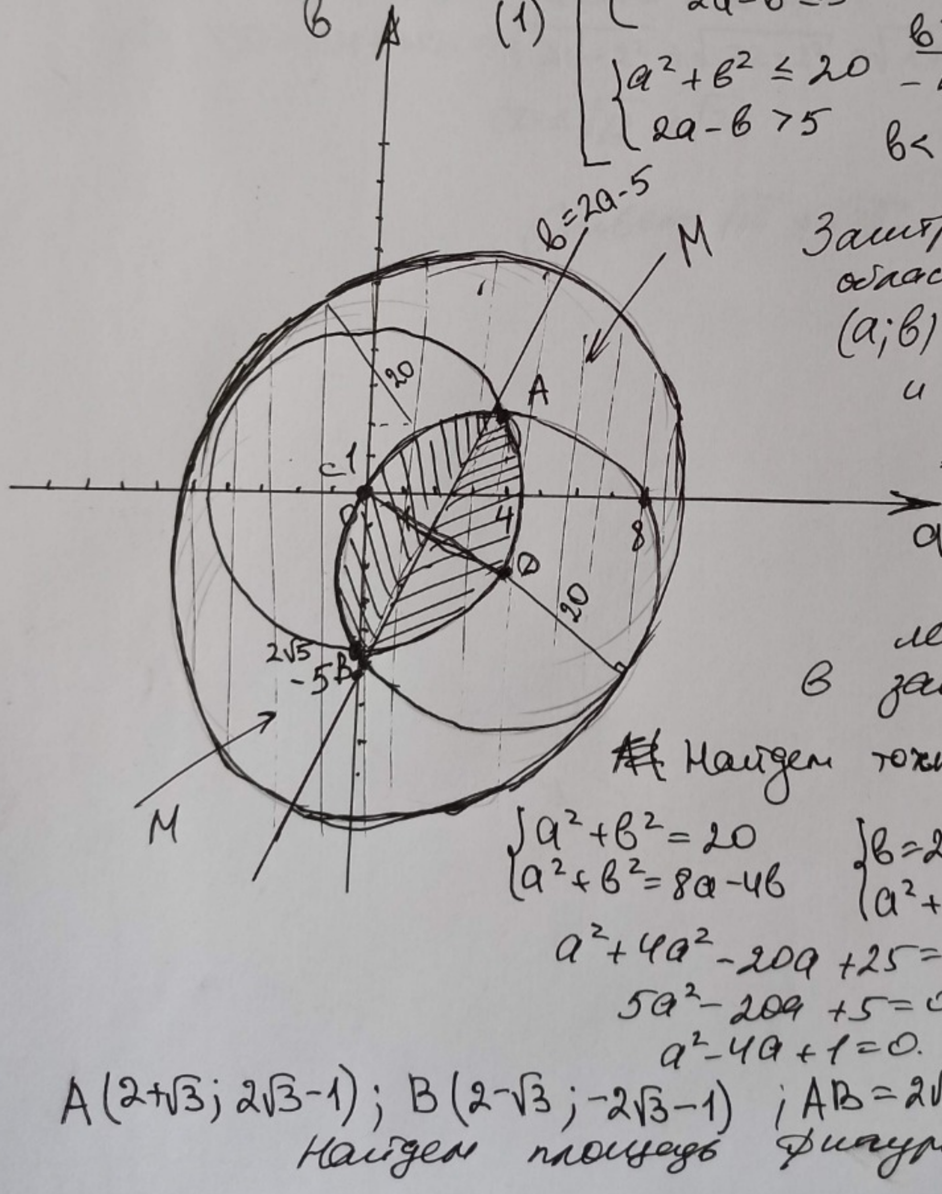
$(1)\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2\le 20\\ 2a-b\le 5\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 2a-b>5\end{cases}\end{array}\right.$

— ~~окруж~~ круг с центром $(4;-2)$ и $R=2\sqrt5$

$b\ge 2a-5$

— круг с центром $(0;0)$ и $R=2\sqrt5$

$b<2a-5$



Заштрихованная область — множ-во $(a;b)$ удовл. (1), т.е. и удовл. (2). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ центр ~~окружн.~~ круга $(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$, т.е. $(a;b)$ может лежать только в заштрихованной области.

~~А~~ Найдем точки A и B:

$\begin{cases}a^2+b^2=20\\ a^2+b^2=8a-4b\end{cases}$ $\begin{cases}b=2a-5\\ a^2+b^2=20\end{cases}$

$a^2+4a^2-20a+25=20$

$5a^2-20a+5=0.$

$a^2-4a+1=0.$ $a=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt3.$

$A(2+\sqrt3;2\sqrt3-1)$; $B(2-\sqrt3;-2\sqrt3-1)$; $AB=2\sqrt{15}$ $C(0;0)$ $D(4;-2)$ $CD=\sqrt{20}$

Найдем площадь фигуры M:

лист 4

Черновик Вар. 21.

1. $a_i \in Z$; $a_{n+1} = a_n + b$, $\boxed{b>0}$ $\quad a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \quad a_1 - ?$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 =$ $\quad a_{11} \cdot a_{14} < S + 60.$

$a_{n+1} = a_1 + bn$

$a_n = a_1 + b(n-1).$

$$\begin{cases}(a_1 + b \cdot 7) \cdot (a_1 + 16b) > 7a_1 + 21b + 27 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 13b) < 7a_1 + 21b + 60\end{cases}$$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 =$

$= 7a_1 + 0 \cdot b + 1 \cdot b + \ldots + 6 \cdot b =$

$= 7a_1 + \frac{0+6}{2} \cdot 7b = 7a_1 + 21b$

$$\begin{cases}a_1^2 + 16ba_1 + 7ba_1 + 16 \cdot 7b^2 > 7a_1 + 48 \\ a_1^2 + 10ba_1 + 13ba_1 + 10 \cdot 13b^2 < 7a_1 + 81\end{cases}$$

$16 \cdot 7 = 112$; $112 - 48 = 64$; $81 - 48 = 33$

$$-\begin{cases}a_1^2 + a_1(-7 + 23b) + (112b^2 - 48) > 0 \\ a_1^2 + (23b - 7)a_1 + (130b^2 - 81) < 0\end{cases}$$

$112b^2 - 48 - 130b^2 + 81 > 0.$

$130 - 112 = 18$

$33 > 18b^2$

$112 - 48 = 64$

$b^2 < \frac{33}{18} \qquad b \in Z$

$16 \cdot 7 = 112$

$\boxed{b = 1}$

$a_1^2 + a_1(23b - 7) + (112b^2 - 48) > a_1^2 + (23b - 7)a_1 + (130b^2 - 81).$

$33 > 18b^2$, $\quad 130 - 81 = 49$

$7a_1 + 21 =$

$\cancel{(a_1 + 7)(a_1 + 16) > 7a_1 + 48}$

$\cancel{(a_1 + 7)(a_1 + 16) >}$

$$\begin{cases}(a_1 + 7b)(a_1 + 16b) > 7a_1 + 21b + 27 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 13b) < 7a_1 + 21b + 60\end{cases} \qquad \begin{cases}a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 81\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cancel{a_1^2} + 23ba_1 + 112b^2 > \cancel{7a_1} + 21b + 27 \\ \cancel{a_1^2} + \cancel{23ba_1} + 130b^2 < \cancel{7a_1} + \cancel{21b} + 60\end{cases} \qquad \begin{cases}a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0\end{cases}$$

$112b^2 + 60 > 27 + 130b^2 \qquad (a_1 + 8)^2 > 0.$

$112 - 48 = 64$; $130 - 81 = 49$ $\quad (-12; \; \approx -4) \quad 33 > 18b^2 \quad \underline{b = 1.} \quad a_1 \neq -8$

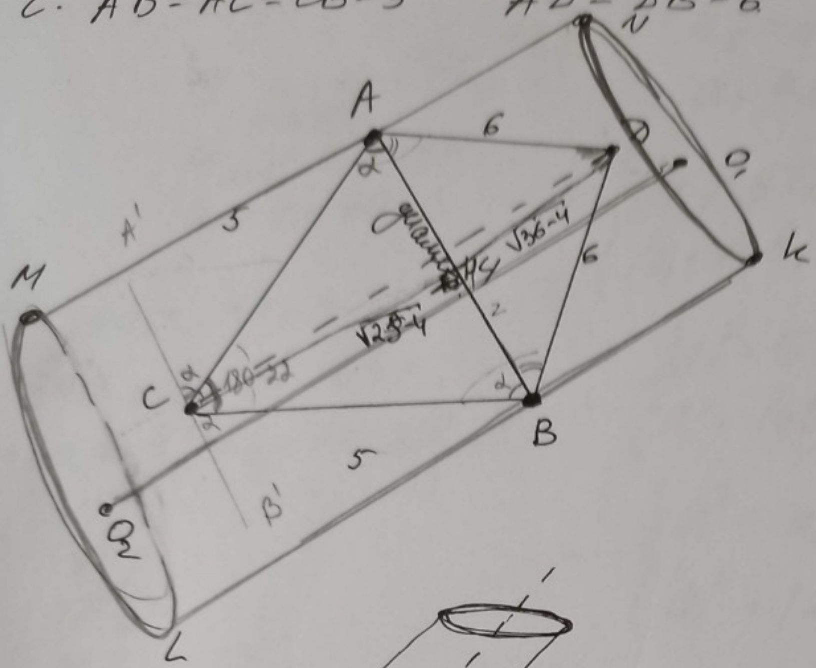
$\frac{D}{4} = 64 - 49 = 15$

$a_1 \in (-8 - \sqrt{15}; -8 + \sqrt{15}) \quad a_1 = -8 \pm \sqrt{15}$; $\quad a_1 = -8 + \sqrt{15}$ $\quad \boxed{(-12; -8) \cup (-8; -4)}$

21102398 (U128885 M1297613)

Черновик. Вар. 27.

2. $AB = AC = CB = 5$ $AD = DB = 6$



O_1O_2 - ось ; $CD \parallel O_1O_2$

R - наим. ; CD ?

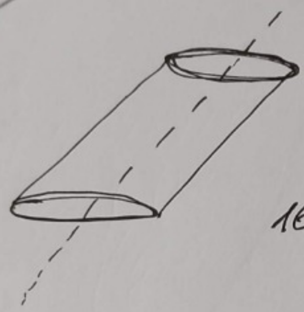
MNKL - искомый цилиндр

$CD \parallel O_1O_2 \Rightarrow$

$CD \parallel MN$; $CD \parallel KL$

$\Rightarrow CD \leq MN$.

A1



$16 = 50 - 25 \cdot 2 \cdot \cos\angle C$

$\cos\angle C = \frac{50-16}{2 \cdot 25} = \frac{34}{2 \cdot 25} = \frac{17}{25}$

$16 = 36 + 36 - 36 \cdot 2 \cdot \cos\angle D$

$\cos\angle D = \frac{36+36-16}{2 \cdot 36} = \frac{36-8}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

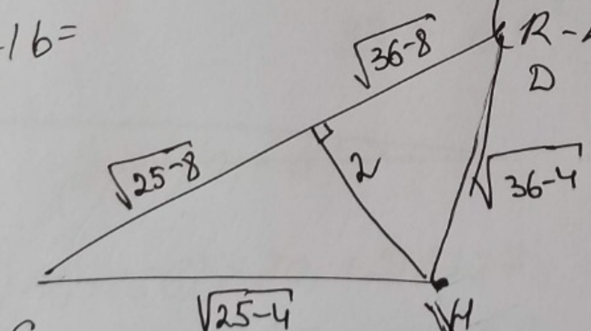
$AB \perp CD$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB \perp CD \\ CD \parallel O_1O_2 \end{array}\right. \Rightarrow AB \perp O_1O_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB \leq 2R \\ AB = 4 \\ R\text{ - наим.} \end{array}\right. \Rightarrow 4 \leq 2R$

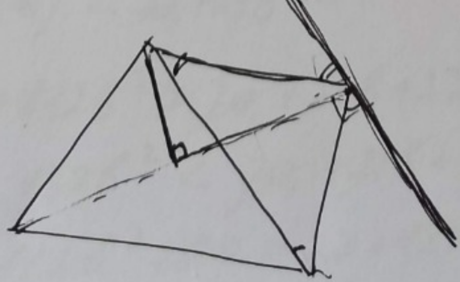
$R \geq 2$

$\boxed{R = 2}$

$36 - 16 =$



$\boxed{\sqrt{17} + \sqrt{28}}$



Черновик. вар. 21.

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 & a, b - \text{вещ.}\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20).\end{cases}$

при $8a-4b\ge 20$

$\min(8a-4b;20)=20$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 8a-4b\ge 20\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ 8a-4b<20\end{cases}\end{array}\right.$

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le(2\sqrt{5})^2\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 2a-b\ge 5\end{cases}\\ \begin{cases}(a-4)^2+(b-2)^2\le 20\\ 2a-b<5\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$

$b\le 2a-5$

$(a^2-8a)+(b^2-4b)\le 0$

$(a-4)^2+(b-2)^2\le 20$

$8a-4b<20$

$2a-b<5$.

$\cancel{b\le 2a-5}$ $a\ge\frac{5+b}{2}$

$20\ge a^2+b^2\ge\left(\frac{5+b}{2}\right)^2+b^2=$

$=\frac{25+b^2+10b+4b^2}{4}=\frac{5b^2+10b+25}{4}.$

$a^2+b^2=20$

$a^2+b^2=8a-4b$

$20=8a-4b$

$5=2a-b.$

$b=2a-5.$

$b>2a-5$

$20\cdot 4\ge 5b^2+10b+25$

$25-80=-55$

$5b^2+10b-55\le 0$

$b^2-2b-11\le 0$

$b=1\pm\sqrt{1+11}=1\pm\sqrt{12}$

$b\in[1-\sqrt{12};1+\sqrt{12}]$

$\vee -3$ <5

$20\ge(a-4)^2+(b-2)^2>(a-4)^2+(2a-7)^2=5a^2-8a-28a+16+49$

$5a^2-36a+45<0.$

$5a^2+\cancel{4}20a+25=20$

$5a^2+20a+5=0$

$a^2+4a+1=0$

$a=-2$

$a=\frac{\cancel{18}\pm\sqrt{18^2-45\cdot 5}}{5}=3\,\frac{6\pm\sqrt{36-25}}{5}=\frac{3}{5}\cdot(6\pm\sqrt{11}).$

$a\in\left[\frac{18-3\sqrt{11}}{5};\frac{18+3\sqrt{11}}{5}\right]$

$\frac{6}{5}\vee$ $<\frac{27}{5}.$

$\sqrt{5}\approx 2{,}4$

$(2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2=$
$=4\cdot 3+16\cdot 3=$
$=20\cdot 3=60$

$\times\begin{array}{r}2{,}4\\2{,}4\\\hline 96\\48\\\hline 6\end{array}$

$\times\begin{array}{r}2{,}2\\2{,}2\\\hline 44\\44\\\hline 4{,}84\end{array}$

21102398 (U128885 M1297613)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102398**

ID профиля: **128885**

Вариант 21

Чистовик. Вариант 21.

4. $(a;b;c) \in N$

НОД$(a;b;c) = 35$ $\Rightarrow$ все числа $\vdots$ на 5 и на 7. $\Rightarrow$

НОК$(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16}$ в каждом числе есть эти множители хотя бы 1-ой степени.

НОД ~~до~~ не делится на 5 или 7 в степени больше, чем первая, значит среди чисел $(a;b;c)$ всегда найдётся (какое-то) (какие-то) число(числа), не делящиеся на $49=7^2$ и $25=5^2$.

а) Способов выбрать число с 5^1 : $\underline{3.}$ (a, b, или c)

б) Способов выбрать число с 7^1 : $\underline{3.}$ (a, b или c).

Для а) и б) В двух других числах 5 может быть

Для 5: в степенях $5^1 - 5^{18}$, т.е. степень $\in [1;18], \in Z$; $a=5^{a_1}\cdot 7^{a_2}$; $b=5^{b_1}\cdot 7^{b_2}$; $c=5^{c_1}\cdot 7^{c_2}$

но при этом в каком-то из этих чисел 5 будет в степени 18 (иначе НОК $\not\vdots\ 5^{18}$) (Больше быть не может, иначе НОК тоже будет делится на большую степень 5).

Способов выбрать 1 число из 2, ~~где~~ которое делится на 5^{18} ровно $\underline{2.}$

В оставшемся степень $[1;18] \in Z \Rightarrow \underline{18}$

Для 7: в каком-то из двух оставшихся степень (где 7^1).

обязательно равна 16 (иначе НОК $\not\vdots\ 7^{16}$) $\underline{2}$ варианта выбора этого числа из двух чисел.

$\Rightarrow$ в другом степень $[1;16] \in Z \Rightarrow \underline{16}$ вариантов

Всего получается (произведение всех подчеркнутых чисел):

$$3\cdot 3\cdot 2\cdot 18\cdot 2\cdot 16 = 3^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 2\cdot 2^4 = 3^4\cdot 2^7 = 10368$$

5^1

7^1 среди $(a;b;c)$ (a, b или c)

5^{18}

7^{16}

степень $5^1; 5^{18}; 7^1; 7^{16}$ уже есть среди $(a;b;c) \Rightarrow$ тут может быть любая $[1;16]$ и $[1;18) \in Z$

Ответ: $3^4\cdot 2^7 = 10368$

лист 1

Чистовик. Вариант 21.

5. $A = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \longrightarrow$
$B = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \longrightarrow$
$C = \log_{x+1}(2x^2-3x+5). \longrightarrow$

$$\begin{cases} x+1>0;\ \sqrt{2x-3}>0;\ \sqrt{2x-3}\neq 1;\ 2x-3>0.\ (1) \\ (2x-3)^2>0;\ 2x^2-3x+5>0;\ 2x^2-3x+5\neq 1\ (2) \\ 2x^2-3x+5>0;\ x+1>0;\ x+1\neq 1\ (3) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (1)\ x>-1;\ 2x-3\neq 1;\ x>\frac{3}{2} \\ (2).\ x\neq\frac{3}{2};\ D=9-4\cdot 2\cdot 5=9-40=-31<0 \\ \quad\Rightarrow (2x^2-3x+5) \text{ всегда } >0. \\ \quad 2x^2-3x+4\neq 0 \quad D=9-4\cdot 4\cdot 2=9-32<0. \\ \quad\Rightarrow \text{~~всё~~ нет реш.} \\ (3)\quad x>-1;\ x\neq 0 \end{cases}$$

$x\neq 2;\ x>\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \underline{x\in\left(\frac{3}{2};2\right)\cup(2;+\infty)}.$

Рассмотрим все варианты:
1) $A=B$; $C=B-1=A-1$
2) $A=C$; $B=A-1=C-1$
3) $B=C$; $A=B-1=C-1$

(Всего среди 3 чисел выбрать 2 равных $C_3^2=\frac{3!}{2!\,1!}=3$)
$\Rightarrow$ мы рассмотрели все варианты).

1) $A=B$, $C=B-1=A-1$

$A=B$: $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln\sqrt{2x-3}}=\frac{\ln(2x-3)^2}{\ln(2x^2-3x+5)}$$

$$\ln(x+1)\cdot\ln(2x^2-3x+5)=(2\ln|2x-3|)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\ln(2x-3)\right)$$

$x>\frac{3}{2}\Rightarrow$ модуль можно убрать.

$$\boxed{\ln(x+1)\cdot\ln(2x^2-3x+5)=\ln^2(2x-3)}$$

$$e^{\ln(x+1)\cdot\ln(2x^2-3x+5)}=e^{\ln^2(2x-3)}$$

$$(x+1)^{\ln(2x^2-3x+5)}=(2x-3)^{\ln(2x-3)}$$

$C=B-1=A-1$: $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)-1=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2-1=\log_{x+1}(2x^2-3x+5).$

$$\frac{1}{2}\log_{(2x-3)}\frac{(x+1)}{(2x-3)^2}=\log_{2x^2-3x+5}\frac{(2x-3)^2}{\cancel{\log}(2x^2-3x+5)}=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

~~$\ln(x+1)\ \ln(2x-3)^2=\ln|2x^3$~~

если $x+1=a$; $2x-3=b$, то $a\cdot b=(x+1)(2x-3)=2x^2-x-3=$
$=(2x^2-3x+5)+2x-8=\underbrace{(2x^2-3x+5)}_{=C}+2\big((2x-3)-(x+1)\big)=C+2(b-a).$

т.е. $a\cdot b=C+2(b-a)$

$ab-2b+2a=C$

$$\begin{cases}(a-2)(b+2)=C-4 \\ \ln a\cdot\ln C=\ln^2 b\end{cases}$$

лист 2

Чистовик. Вариант 21.

2) $B=C$, $A=B-1=C-1$.

$B=C$: $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{x-1}(2x^2-3x+5)$.

$$\frac{\ln(2x-3)^2}{\ln(2x^2-3x+5)}=\frac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x-1)}$$

$$\ln(2x-3)^2\cdot\ln(x-1)=\ln^2(2x^2-3x+5).$$

$A=B-1=C-1$: $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2-1=$
$=\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)-1.$

$2\log_{(2x-3)}(x+1)+1=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{x+1}(2x^2-3x+5).$

$2\log_{(2x-3)}(x+1)+\log_{(2x-3)}(2x-3)=B=C.$

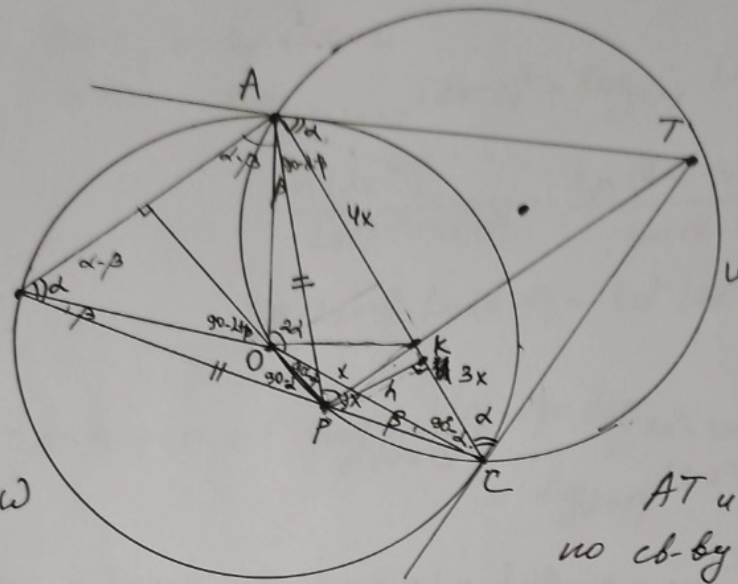
$\log_{(2x-3)}(x+1)^2\cdot(2x-3)=B=C.$

$(x+1)^2\cdot(2x-3)=(x^2+2x+1)(2x-3)=2x^3+\underline{4x^2}+\underline{\underline{2x}}-\underline{3x^2}-\underline{\underline{6x}}-3=$
$=2x^3+x^2-4x-3=(x+1)(2x^2-x-3)$

3) ~~B~~

Чистовик. Вариант 21.

6.



$$\begin{cases} S_{APK} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot AK \\ S_{PKC} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot KC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h\cdot AK}{\frac{1}{2}\cdot h\cdot KC} = \frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{4x}{3x}$$

$$S_{APK} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot AK = \frac{1}{2}\cdot h\cdot 4x = 12 \Rightarrow \underline{h\cdot x = 6}$$

AT и CT - касат. ⇒ по св-ву AT = CT ⇒ △ATC - равнобедр. (по опред.)

$\Rightarrow \angle ACT = \angle CAT = \alpha$

$\angle CAT = \angle ABC$ (как углы опирающ. на одну дугу ω и св-ву касат.) $\Rightarrow \angle CAT = \angle ACT = \angle ABC = \alpha$

$A, P, C, O \in \omega_2 \Rightarrow AOPC$ – вписан. четырехугольник ⇒ по св-ву углы опирающ. на одну сторону (и дугу) будут равны.

$\angle OCT = \angle OAT = 90°$ (по св-ву касат.) $\Rightarrow \angle OCA = \angle OAC = 90° - \alpha$

$\Rightarrow \angle APO = \angle ACO = 90° - \alpha.$

пусть $\angle PCO = \beta$ $(\Rightarrow \angle AOP = \angle PCO = \beta)$

$\Rightarrow \angle OBC = \angle PCO = \beta$ $(OB = OC = R \Rightarrow \triangle$ равнобедр.)

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA = \angle ABC - \angle OBC = \alpha - \beta$

$\angle BAP = \angle BAO + \angle OAP = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha$
$\angle ABC = \alpha$
⇒ △ABP - равнобедр. (по признаку) ⇒ $\boxed{BP = AP}$

$$S_{\triangle ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{R^2\cdot\sin(180-2\alpha+2\beta)}{2} + \frac{R^2\cdot\sin 2\alpha}{2} + \frac{R^2\cdot\sin(180-2\beta)}{2} =$$

$$= \frac{R^2\sin(2\alpha-2\beta)}{2} + \frac{R^2\sin 2\alpha}{2} + \frac{R^2\cdot\sin 2\beta}{2} = \frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + \sin 2\beta) \cancel{= \frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} + S_{\triangle APB} = \frac{AP\cdot BP\cdot\sin(180-2\alpha)}{2} + \frac{AP\cdot PC\cdot\sin 2\alpha}{2}$$

лист 4

21102398 (U128885 M1297614)

Чистовик. Вариант 21

6. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta APC} + S_{\Delta APB} = \frac{AP \cdot BP \cdot \sin(180-2\alpha)}{2} + \frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2} =$

$\boxed{AP=BP}$

$= \frac{AP^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} + \frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2} = \cancel{\frac{AP \sin 2\alpha}{2}(AP+PC) = \frac{AP \cdot BC \cdot \sin 2\alpha}{2}}$

$S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 9 + 12 = 21 = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2}$ $\boxed{\alpha = x = \angle APK = \angle KPC.}$

~~ΔAP~~ $\Rightarrow \boxed{\frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2} = 21}$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{AP \cdot PK \cdot \sin x}{2}}{\frac{PK \cdot PC \cdot \sin x}{2}} = \frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2}\left(1 + \frac{AP}{PC}\right)$

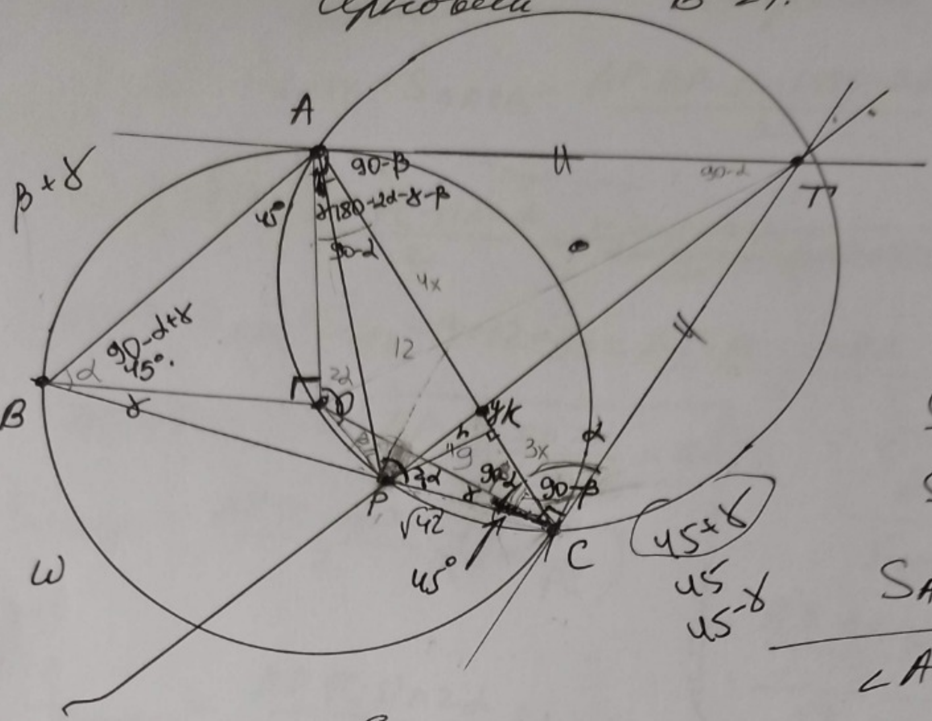
$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2} \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right) =$

$= 21 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right) = 21 \cdot \left(\frac{7}{3}\right) = 49$

Ответ: а) $S_{\Delta ABC} = 49.$

$\boxed{\text{лист 5}}$

8. Черновик В-21.



ABC-остроуг

$\frac{AB}{\sin 45} = 2R$

$AB = R\cdot\sqrt{2}$

$AC = 7x = \sqrt{12\cdot 7} = \sqrt{84}$

$S_{APK} = 72$

$S_{CPK} = 9$

$45+\gamma$

45

$45-\gamma$

$S_{ABC} - ?$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$

$AC - ?$

$90-\beta = \alpha \Rightarrow$
$\beta = 90-\alpha.$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{42}{9} = \frac{4}{3} = \frac{4x}{3x}$

$180+2\alpha-2\gamma + x = 360$
$x = 180-2\alpha+2\gamma$

$h = 3{,}5x.$

$\frac{4x\cdot h}{2} = 12$

$x\cdot h = 6.$

$(3{,}5x)^2 + (3{,}5x)^2 = PC^2$

$PC = 3{,}5x\sqrt{2} =$
$= 3{,}5\sqrt{\frac{24}{7}} = 3{,}5\cdot 2\sqrt{\frac{6}{7}} = \frac{7\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \sqrt{42}$

$90-\alpha+\gamma+\gamma = \alpha$
$90+2\gamma = 2\alpha$
$\Rightarrow \alpha = 45°+\gamma.$

~~$(90-\beta)+\gamma+(180-2\alpha-\gamma-\beta) = 90$~~

$180-2\alpha-2\beta = 0.$

$\alpha+\beta = 90°.$

$\sqrt{42}\cdot BC =$

$90-(45+\gamma)+\gamma = 45$

$(4x+y)(3x-y) = h^2$

$h = 3x-y$

$\Rightarrow h = 3x-y =$
$= 3x - (-\frac{x}{2}) = 3{,}5x.$

$x\cdot h = 6$

$x\cdot(3{,}5x) = 6$ $x^2 = \frac{6}{3{,}5} = \frac{12}{7}.$ $x = \sqrt{\frac{12}{7}}.$

$(3x-y)(4x+y) = (\frac{6}{x})^2$

$12x^2 - 4xy + 3xy - y^2 = h^2$

$12x^2 - xy - y^2 = (3x-y)^2$

$12x^2 - xy - y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$

~~$3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0$~~

$y = \frac{5\pm\sqrt{25+8\cdot 3}\,x}{4} =$

$2y^2 - 5xy - 3x^2 = 0.$

$= \frac{5\pm\sqrt{49}\,x}{4} = \frac{5\pm 7x}{4}$ $y = 3x$; $y = -x/2$

Черновик. вар. 27

4. $(a,b,c) \in N$

$НОД(a,b,c)=35 \quad =5\cdot7$

$НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot7^{16}$

16-4
64-6
128-7 258-8

5. $\Rightarrow \quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot5}}{4}=$

$=3\pm\sqrt{}$

$$(x+1)^{\ln(2x^2-3x+5)}=(2x-3)^{\ln(2x-3)}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 128 \\ 81 \\ \hline 128 \\ +\ 1024 \\ \hline 10368 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 9 \\ 9 \\ \hline 81 \end{array}$$

6

6

$3^2\cdot2\cdot18\cdot2\cdot16=$

$=\underline{3^2}\cdot2^2\cdot\underline{3^2}\cdot2\cdot2^4=3^4\cdot2^7$

$$\begin{array}{r} \times\ 128 \\ 81 \\ \hline 128 \\ 1024 \\ \hline 10368 \end{array}$$

6

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$x>\frac{3}{\cancel{3}}\Rightarrow$

$4x-3=0 \quad x=\frac{3}{4}$

$2\cdot\frac{9}{16}-3\cdot\frac{3}{4}+5=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+5=$

$\log p_i \log p_j = \log^2 p$

$=\frac{9}{8}-\frac{18}{8}+5=-\frac{9}{8}+5=$

$=\frac{-9+40}{8}=\frac{31}{8}. \approx 4.$

$\ln a\cdot\ln b=\ln^2 c$

$\boxed{a\cdot c=b+2(c-a).}$

$ac-2c+2a=b.$

$\underline{(a-2)(b+2)=b-4}$

$2x^2-3x+5=x(2x-3)+5=$

$=2x(x-1).-x+5$

$(2x-3)(x+1)=$

$=2x^2+2x-3x-3=$

$=\underline{2x^2-x-3}$

$-\ \underline{2x+8=-2(x+4).}$

$-2^x\ \underline{(x+4)^{-3}}=$

$\parallel\ 5^{-5}.$

$x-4.$

$\cancel{2x^2-3x+5=2x+8=2x^3}$

$2x^2-3x+5+2x-8=2x^2-3x-3$

$4x^2-12x+9 \qquad (2x^2-3x+5)(x+1).$

21102398 (U128885 M1297614)