Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102234**

ID профиля: **849388**

Вариант 21

Чистовик

№1

① $S_7 = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{7}{2}(a_1+a_7)$, тогда: (d-разность арифмет. прогрессии).

② $$\begin{cases}(a_{11}-3d)\cdot a_{17} > \frac{7}{2}(a_1+a_7)+27\\ a_{11}\cdot(a_{17}-3d) < \frac{7}{2}(a_1+a_7)+60\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{11}\cdot a_{17}-a_{17}\cdot 3d > \frac{7}{2}(a_1+a_7)+27 & (1)\\ a_{11}\cdot a_{17}-a_{11}\cdot 3d < \frac{7}{2}(a_1+a_7)+60 & (2)\end{cases}$$

Чтобы сложить части неравенств домножим (2) на (-1):

$$\oplus\begin{cases}a_{11}\cdot a_{17}-a_{17}\cdot 3d > \frac{7}{2}(a_1+a_7)+27\\ a_{11}\cdot 3d - a_{11}\cdot a_{17} > -\frac{7}{2}(a_1+a_7)-60\end{cases}$$

$$-a_{17}\cdot 3d + a_{11}\cdot 3d > -33$$

$$a_{11}\cdot 3d - a_{17}\cdot 3d > -33 \quad (\cdot(-1))$$

$$a_{17}\cdot 3d - a_{11}\cdot 3d < 33$$

$$d(a_{17}-a_{11}) < 11$$

$$d(\cancel{a_{11}}+6d-\cancel{a_{11}}) < 11$$

$$6d^2 < 11$$

$$d^2 < \frac{11}{6} \Rightarrow d \in \left(-\sqrt{1\tfrac{5}{6}}; \sqrt{1\tfrac{5}{6}}\right).$$

③ т.к арифметическая прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $a_2 = a_1 + d$, где $a_2, a_1 \in Z$ $\Rightarrow$ $d \in Z$ $\Rightarrow$ из получившегося промежутка d может принимать значения $-1; 0; 1$, но т.к. прогрессия (арифметич.) возрастает $\Rightarrow$ $d = 1$, иначе она либо убывающая, либо неизменная.

~~④ Теперь подставим $d = 1$ в выражение $(a_1+7d)\cdot(a_1+16d) > a_1+$~~

④ Теперь подставим $d = 1$ в формулу суммы $S_7 = \frac{a_1+(a_1+6d)}{2}\cdot 7 \Rightarrow$

$$S_7 = \frac{a_1+a_1+6}{2}\cdot 7 = \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7 = (a_1+3)\cdot 7 = 7a_1+21$$

⑤ Из условия: $a_8 \cdot a_{17} > S+27 \iff (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21+27 \iff$

$\iff (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+48$

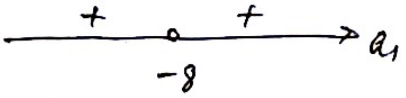
⑥ Подставим $d=1$: $(a_1+7)(a_1+16) > 7a_1+48$

$a_1^2+16a_1+\cancel{7a_1}+112 > \cancel{7a_1}+48$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$a_1^2+2\cdot 8a_1+8^2>0$

$(a_1+8)^2>0$



$\Downarrow$

$a_1 \in (-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$.

~~Ответ: $a_1 \in (-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$.~~

⑦ Из условия: $a_{11}\cdot a_{14} < S+60 \iff (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21+60 \iff$

$\iff (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+81$

⑧ Подставим $d=1$: $(a_1+10)(a_1+13) < 7a_1+81$

$a_1^2+13a_1+10a_1+130 < 7a_1+81$

$a_1^2+23a_1-7a_1+130-81<0.$

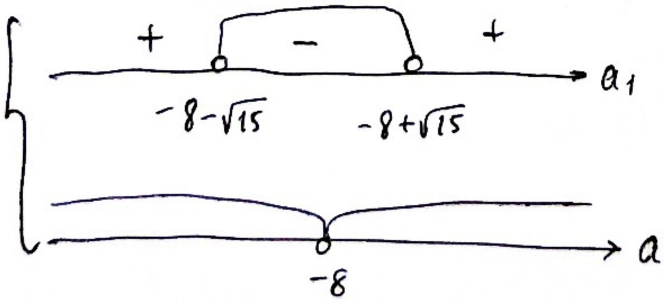
$a_1^2+16a_1+49<0$

⑨ Решим уравнение $a_1^2+16a_1+49=0$

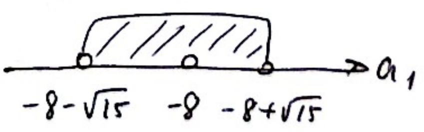
$D=256-196=60$

$$\left[\begin{array}{l} a_1=\frac{-16+\sqrt{60}}{2}=\frac{-16+2\sqrt{15}}{2}=-8+\sqrt{15} \\ a_2=\frac{-16-\sqrt{60}}{2}=-8-\sqrt{15} \end{array}\right.$$

⑩ Тогда:



$\Rightarrow$



Чистовик

⑪ Следовательно, $a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8) \cup (-8; -8+\sqrt{15})$

Т.к. по условию $a_1 \in Z$, а $\begin{cases} (-8-\sqrt{15}) > -12 \\ -8-\sqrt{15} < -11 \end{cases}$ и $\begin{cases} -8+\sqrt{15} < -4 \\ -8+\sqrt{15} > -5 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Среди всех возможных целых значений a_1:

$a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$. $\Rightarrow a_1 \in [-11; -5]/\{-8\}$

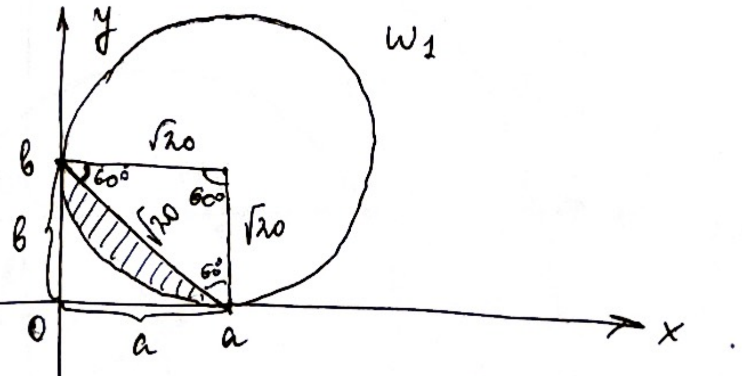
Ответ: $a_1 \in [-11; -8) \cup (-8; -5]$, а именно $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$.

N 3

1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20$ $\rightarrow$ (ур-ие прямой $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы имеем внутренность окружности $R=\sqrt{20}$, (w_1) с центром $(a;b)$.

2) при $20 < 8a-4b$ имеем $a^2+b^2 \leq 20$:



Имеем $a^2+b^2 \leq 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ гипотенуза треугольника при $a^2+b^2=20$ равна $\sqrt{20}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $(x-a)^2+(y-b)^2=20$ имеем равносторонний треугольник $\Rightarrow$ площадь фигуры соответственно равна:

$$S(M) = \frac{60^\circ \pi R^2}{360^\circ} - \frac{R^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{6}^{\backslash 2 \backslash 12} - \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}^{\backslash 3} = \frac{2\pi R^2 - 3R^2 \cdot \sqrt{3}}{12} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20 - 3 \cdot 20\sqrt{3}}{12} = \frac{20}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \cong \frac{5}{3}(6{,}28 - 3\sqrt{3})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S(M) = \frac{5}{3}(6{,}28 - 3\sqrt{3})}$$

3) при $8a-4b < 20$ имеем $a^2+b^2 \leq 8a-4b$

пограничное значение:

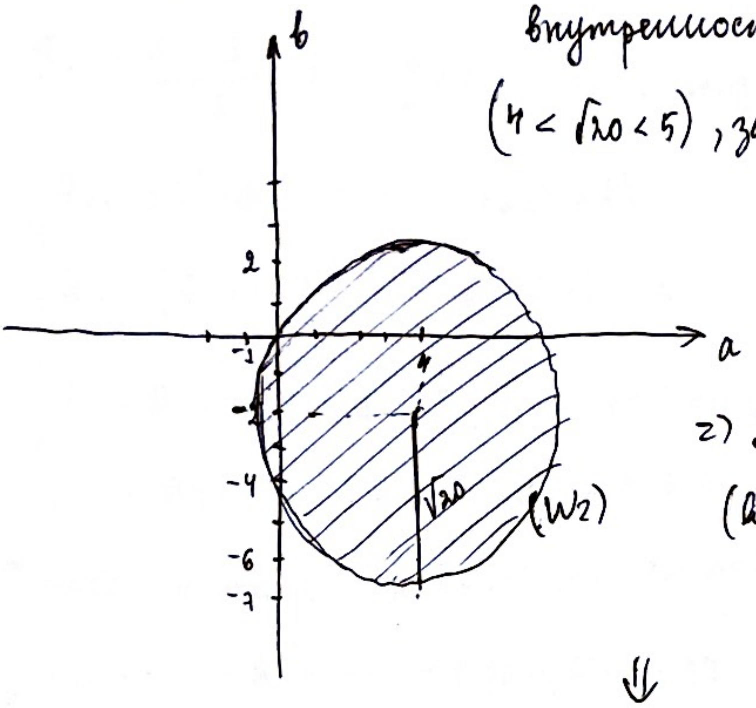
$a^2+b^2-8a+4b \leq 0$

$a^2-2 \cdot 4a+16-16+b^2+4b+4-4 \leq 0$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20$

Чистовик

Рассмотрим $(a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20$ в системе координат $(a;b)$



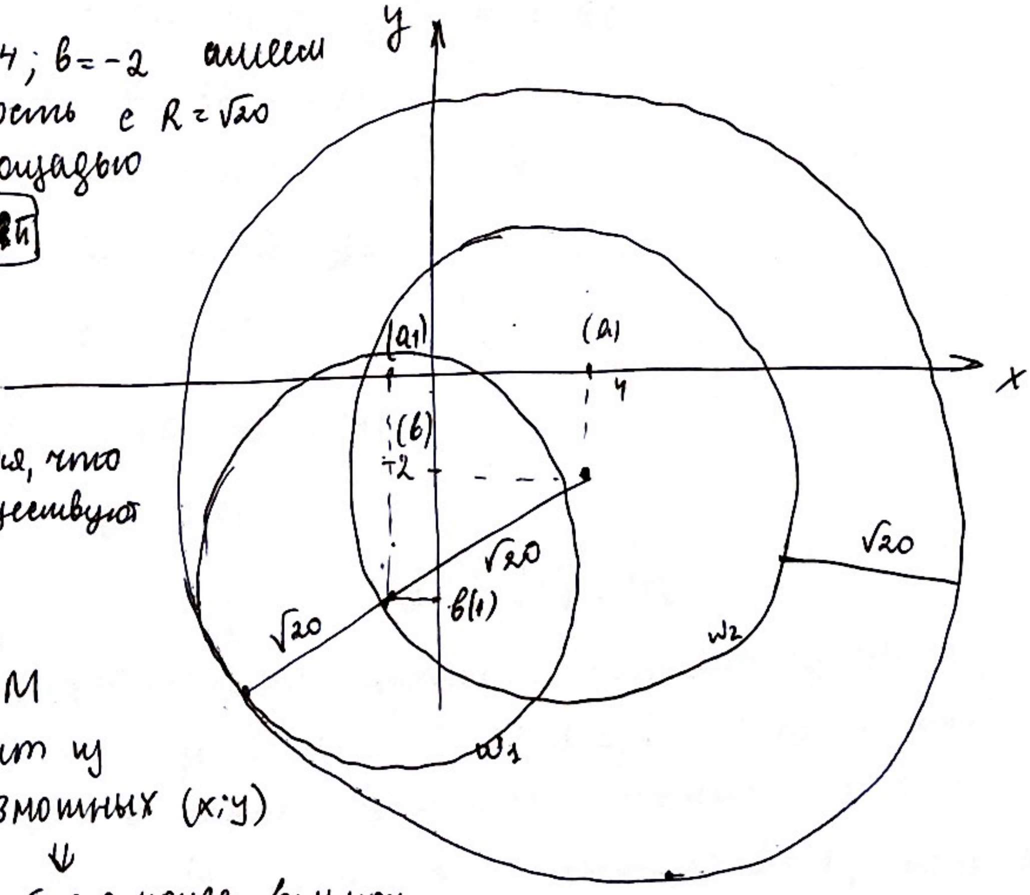
внутренность окружности ($R=\sqrt{20}$, с центром $(4;-2)$) $(4<\sqrt{20}<5)$, за исключением границы (W_2)

$\Rightarrow S_{(a,b)} = \pi \cdot 20 = 20\pi$

$(a;b)$ - центр нашей основной окружности (w_1) находится в диапазоне этой окружности (W_2)

$\Downarrow$

Так, при $a=4$; $b=-2$ имеем окружность с $R=\sqrt{20}$ и площадью $\boxed{S(M)=20\pi}$



Учитывая, что $(a;b)$-существуют для $(x;y)$

$\Downarrow$

Фигура M состоит из ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ $(x;y)$

$\Downarrow$

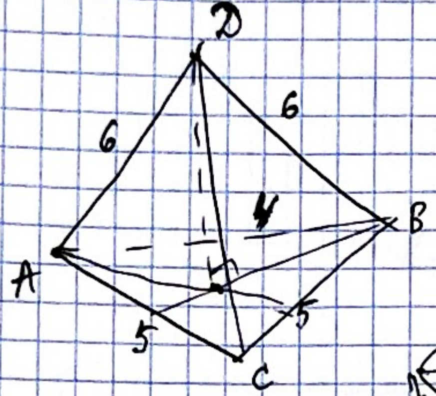
Радус общего круга, внутри которого расположены все возможные варианты фигур(окружностей), (образованного окружностью (мал.) и кольцом*) $= \sqrt{20}+\sqrt{20} = 2\sqrt{20} \Rightarrow$

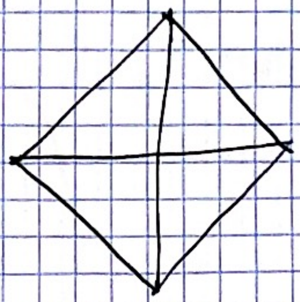
$\Rightarrow S(M)$ (в этом случае) $= \pi(2\sqrt{20})^2 = \pi \cdot 4 \cdot 20 = 80\pi$

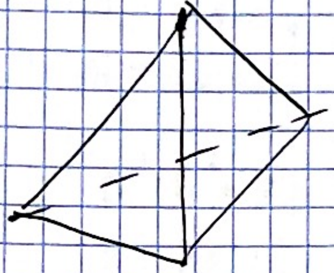
Ответ: либо $\frac{5}{3}(6,28-3\sqrt{3})$, либо 80π.

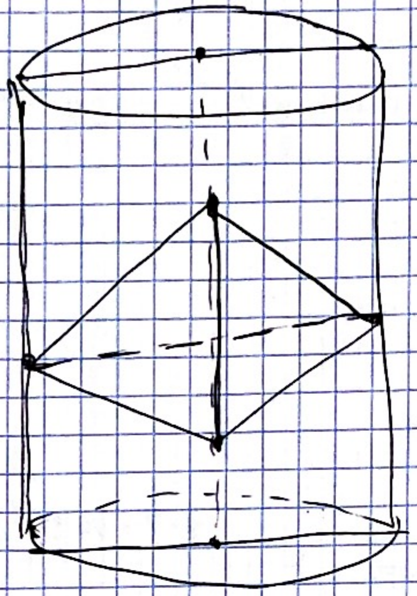
(*кольцо образовано серией всех возможных окружностей типа w_1)

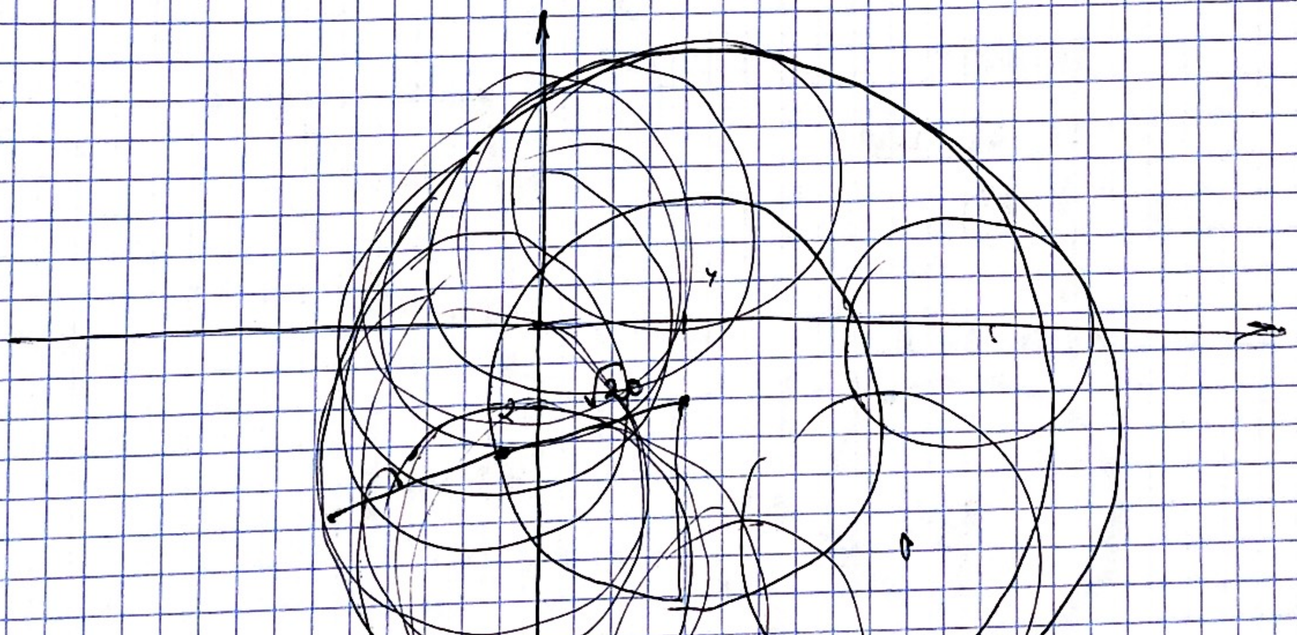
Черновик
№3.











№6 №3

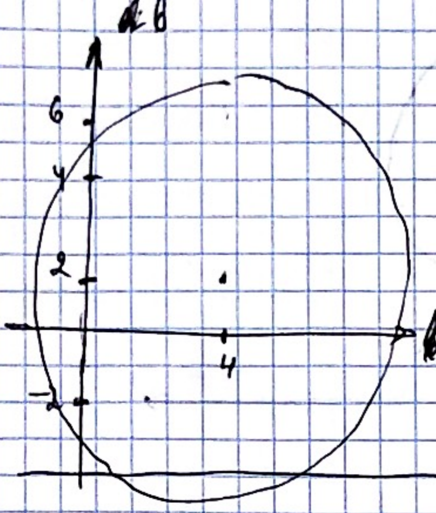
Черновик

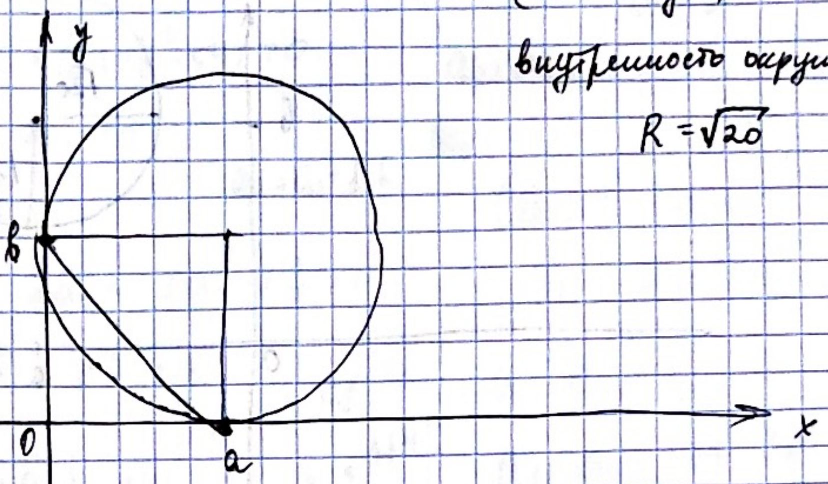
②

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20.$

внутренность окружности

$R=\sqrt{20}$





$\sqrt{20}$ $\sqrt{25}$ $4<\sqrt{20}<5$

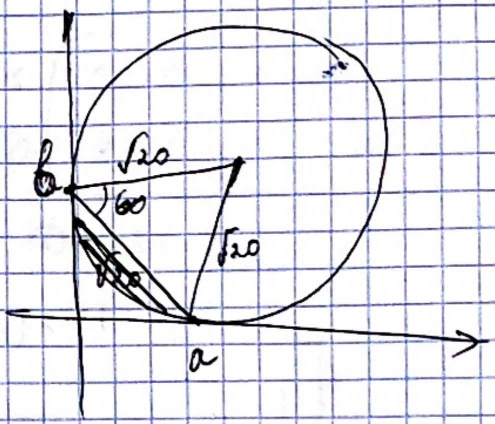
$\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$

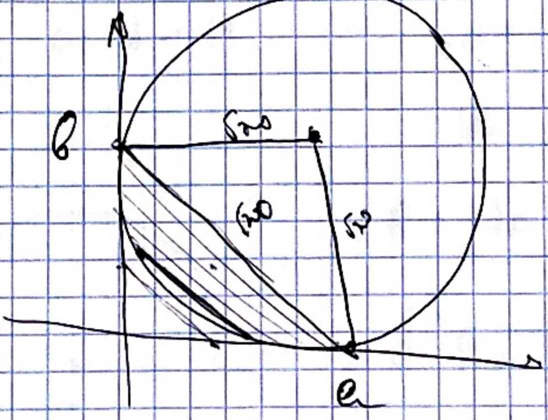
$a^2+b^2=8a-4b$

$a^2-8a+b^2+4b=0$

$a^2-2\cdot4a+16-16+b^2+2\cdot2b+4-4$

$2a>b+20.$





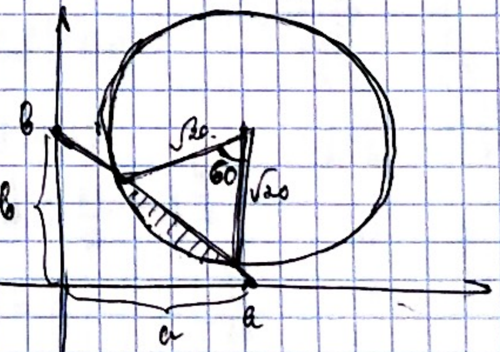
$4(2a-b).$

при $8a-4b>20$

$2a-b>20.$

$\Downarrow$

$a^2+b^2\le20$



$\frac{1}{6}$ от πR^2

$\frac{\alpha\cdot\pi R^2}{360}-r^2\cdot\sin\alpha$

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ \times\ 2 \\ \hline 6,28 \end{array}$$

$3\sqrt{3}$

при $2a-b>20.$

$a>\frac{b}{2}+10.$

$a^2+b^2\le2a-5.$

$8a-4b$

когда $2a-b<5$, то

$a^2+b^2\le2a-5$

$a^2-2a+b^2+5\le0.$

$8a-4b,\ 20$

$(2a-b;\ 5)$

черновик ③

$\underline{2a_1^2} + \underline{32a_1d} + \underline{14a_1d} + 224d^2 > \underline{7a_1} + \underline{42a_1d} + 54$

$a_1 + a$

~~$a_8 a_{17}$~~

$2a_1^2 + a_1(32d + 14d - 42d - 7) + (224d^2 - 54) > 0$

$2a_1^2 + a_1(4d - 7) + (224d^2 - 54) > 0$

пусть $(4d-7) \in \mathbb{Z}$

$\parallel$ γ $\qquad \parallel$ b

$a_7 = a_1 + d\cdot 6$

$(a_{11} - 3d)\cdot a_{17}$

$a_{11}\cdot(a_{17} - 3d)$

$2a_1^2 + \gamma a_1 + b > 0$

$D = \gamma^2 - 8b$

$a_1 + 4d$

$a_{11}\cdot a_{17} - a_{17}\cdot 3d$

$a_{11}\cdot a_{17} - a_{11}\cdot 3d$

$$\begin{cases} a_{11}\cdot a_{17} - a_{17}\cdot 3d > \frac{7}{2}(a_1 + a_7) + 27 \\ a_{11}\cdot a_{17} - a_{11}\cdot 3d < \frac{7}{2}(a_1 + a_7) + 60 \end{cases}$$

$\overset{6}{\frown}\ \overset{9}{\frown}\ 1+4$

$1\,2\,3\,4\,5$

$$\begin{cases} a_{11}\cdot a_{17} - a_{17}\cdot 3d > \frac{7}{2}(a_1 + a_7) + 27 \\ a_{11}\cdot 3d - a_{11}\cdot a_{17} > -\frac{7}{2}(a_1 + a_7) - 60 \end{cases}$$

$\frac{a_1 + a_5}{2}\cdot 5$

$6 \quad 3 \quad ⑤$

$$\boxed{\begin{matrix} a_8\cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11}\cdot a_{14} < S + 60 \end{matrix}}$$

$D = 256 - 0$

$-a_{17}\cdot 3d + a_{11}\cdot 3d > -33$

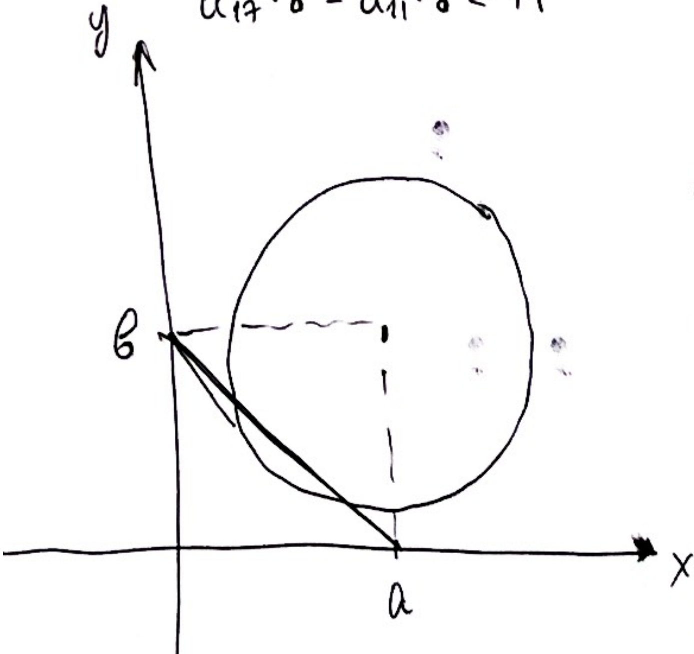
$a_{17}\cdot 3d - a_{11}\cdot 3d < 33$

$a_{17}\cdot d - a_{11}\cdot d < 11$

$d(a_{17} - a_{11}) < 11.$

$d < \frac{11}{a_{17} - a_{11}}$

$\begin{array}{r} 64 \\ \times 4 \\ \hline 256 \end{array}$



$\begin{array}{r} 130 \\ -81 \\ \hline 49 \end{array}$

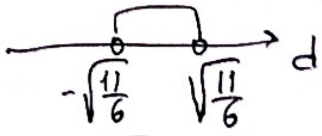
$R = \sqrt{20}.$

$\frac{a_1 + a_1\cdot 6d}{2} =$

$\begin{array}{r} 81 \\ +49 \\ \hline 130 \end{array}$

$d(\cancel{a_{11}} + 6d - \cancel{a_{11}}) < 11$

~~$a_{11}\ 6d^2 \ a_{11}$~~



$-\sqrt{1\frac{5}{6}}$ $\quad \sqrt{1\frac{5}{6}}$

$7d < 11$

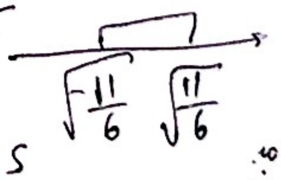
$d < \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}$

$\begin{array}{r} 23 \\ -7 \\ \hline 16 \end{array}$

$\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}.$

$d = 1.$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 7 \\ \hline 4 \end{array}$



$\frac{a_1 + a_7}{2}\cdot 7 = S$

$\frac{a_1 + (a_1 + 6d)}{2} = S$

~~$a_1 + 6d$~~

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \end{array}$

$\begin{array}{r} 96 \\ +16 \\ \hline 112 \end{array}$

~~112~~

$\frac{2a_1 + 6d}{2} = S$

$\frac{2a_1 + 6}{2} = S$

$\begin{array}{r} 112 \\ -48 \\ \hline 64 \end{array}$

$S = \boxed{a_1 + 3}$

$\begin{array}{r} 64 \\ +48 \\ \hline 112 \end{array}$

$\underbrace{\underbrace{16 + 16}_{32} + \underbrace{16 + 16}_{32} + \underbrace{16 + 16}_{32} + 16}$

$64 \quad 96$

$a_2 = a_1 + d$

черновик ④

44

$(a_1 + \overset{7}{[illegible]})(a_1 + \overset{16}{[illegible]}) > a_1 + 3 + 27$

$a_1^2 + 16a_1 + 7a_1 +$

$D = 256 - 4 \cdot 49 < 60$

$256 - 196 =$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 4 \\ \hline 196 \end{array}$

$16^2 - 14^2$

$2 \cdot 30$

$\begin{array}{r} 256 \\ -196 \\ \hline 60 \end{array}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline +96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$

$\begin{array}{r} 98 \\ \times 2 \\ \hline 196 \end{array}$

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array}$

$\sqrt{60} = \sqrt{12 \cdot 5} =$

$= \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}.$

$-\sqrt{64} + \sqrt{15}$

$-8 + \sqrt{15}$

$-12 + 8$

-4

$64 - 16 \cdot 8 + 49$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \end{array}$

8

$\begin{array}{r} 128 \\ -64 \\ \hline 64 \end{array}$

$-64 + 49$

$256 - 16 \cdot 16 + 49$

$-8 - \sqrt{15} \ V \ -12$

$>$

$-\sqrt{15} \ V \ -4$

$>$

$-\sqrt{15} \ V \ -\sqrt{16}$

$>$

$-8 - \sqrt{15} \ V \ -11$

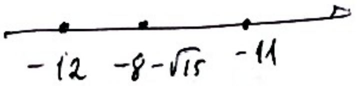
$<$

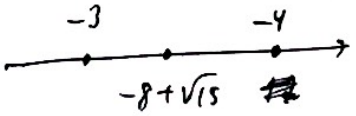
$-\sqrt{15} \ V \ -3$

$<$

$-\sqrt{15} \ V \ -\sqrt{9}$

$<$





$-8 + \sqrt{15} \ V \ -4$

$<$

$\sqrt{15} \ V \ \sqrt{46}$

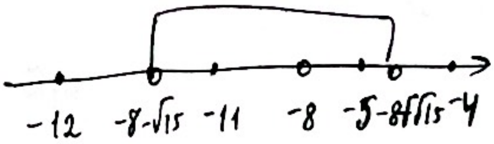
$<$

$-8 + \sqrt{15} \ V$

$> \ -5$

$\sqrt{15} \ V \ \sqrt{9}$

$>$



$-11; -10; -9; -7; -6,$

$-11; -10; -9; -7; -6; -5.$

$-8 + \sqrt{15} \ V -4$

$<$

$\sqrt{15} \ V \ \sqrt{16}$

$<$

$-8 + \sqrt{15} < -8 + \sqrt{6}$

$-8 + \sqrt{15} \ V \ -5$

$\sqrt{15} \ V$

Черновик ⑤

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = 3{,}5(a_1 + a_7)$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$ $\qquad$ $a_8 \cdot a_{17} > 3{,}5(a_1 + a_7) + 27$

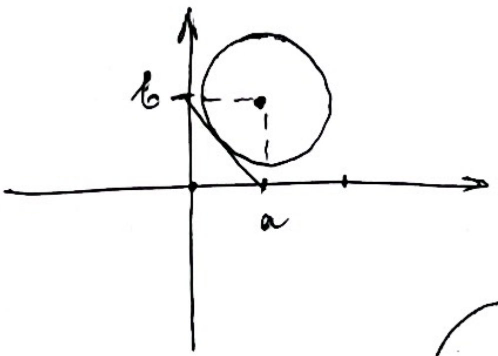
$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$ $\qquad$ $a_{11} \cdot a_{14} < 3{,}5(a_1 + a_7) + 60$

$a_7 = d(n-1) + a_1$

N3.

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 20 \\ a^2 + b^2 \leq \min(8a - 4b, 20). \end{cases}$

окружность ц $(a;b)$
радиус $\sqrt{20}$

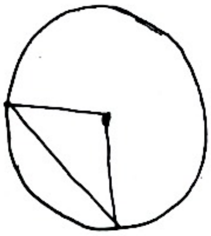


$8a - 4b$ $\quad$ $4(2a - b)$.

$4 \cdot 5$.

$\min(2a - b, 5)$

при $x = 0$
$y \geq 0$; $a^2 + b^2 \leq 20$



$a^2 + b^2 \leq 20$.

$S = (a_1 + a_7) \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{2}(a_1 + a_7)$

$a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11}$
$a_7 + d + d + d + d$

d - целое число.

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$a_{11} \quad a_{14}$

$(a_7 + d) \cdot (a_7 + d(10)) > S + 27$

$(a_7 + d) \cdot (a_7 + 10d) > \frac{(a_1 + a_7) 7}{2} + 27$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > \frac{7}{2}(a_1 + a_7) + \frac{27}{1} \backslash 2$

$2(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7(a_1 + a_1 \cdot 6d) + 54$

$(2a_1 + 14d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 42d \cdot a_1 + 54$

1
27
×2

4
5

2
16
×14

+164
16

224

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102234**

ID профиля: **849388**

Вариант 21

Чистовик

~~№~~ №5

① пусть $c = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{(2x-3)}(x+1)^2 = 2\log_{(2x-3)}(x+1)$

$b = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

$a = \log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ (на ОДЗ)

② ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x-3 \neq 1 \\ 2x-3 > 0 \\ x+1 > 0 \\ 2x^2-3x+5 > 0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \\ x+1 \neq 1 \\ \log_{x+1}(2x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ x > -1 \\ x \in R \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1{,}5; 2) \cup (2; +\infty).$$

③

$$\begin{cases} a \cdot b = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) \cdot \log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \cdot 2 = \\ \quad = \log_{(x+1)}(2x-3) \cdot 2 \text{ (по св-ву логарифмов)} \\ c = \dfrac{2}{\log_{(x+1)}(2x-3)} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$abc = 4$

④ 1 случай: • пусть $a = b$, тогда:

$$\begin{cases} b = a \\ c = a-1 \end{cases} \Rightarrow a^2(a-1) = 4$$

$$a^3 - a^2 - 4 = 0$$

• $(a-2)\underset{\varnothing}{(a^2+a+2)} = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 = 2x^2-3x+5 \\ 2x-3 > 0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \\ 2x^2-3x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+5-2x+3 = 0 \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \Leftrightarrow$$

на ОДЗ: $2x^2 - 5x + 8 = 0$

$D = 25 - 64 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корней нет

Чистовик

⑤ 2 случай: пусть $a = c$, тогда:

$$\begin{cases} c = a \\ b = a - 1 = c - 1 \end{cases} \Rightarrow \cancel{a^2(a-1) = 4} \quad c^2(c-1) = 4$$

$$c^3 - c^2 - 4 = 0$$

$$\bullet\ (c-2)\underset{\varnothing}{(c^2+c+2)} = 0 \iff c = 2 \iff \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2 \iff$$

$$\iff 2\log_{2x-3}(x+1) = 2 \iff \log_{2x-3}(x+1) = 1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x+1 = 2x-3 \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \iff x = 4$$

⑥ 3 случай: пусть $b = c$, тогда:

$$\begin{cases} b = c \\ a = c - 1 = b - 1 \end{cases} \quad b^2(b-1) = 4$$

$$b^3 - b^2 - 4 = 0.$$

$$\bullet\ (b-2)\underset{\varnothing}{(b^2+b+2)} = 0 \iff b = 2 \iff \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) = 2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 - 3x + 5 = (x+1)^2 \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \underset{\text{на ОДЗ}}{\iff} 2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 2x + 1 \iff$$

$$\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad D = 25 - 16 = 3^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

x_2 не принадлежит ОДЗ $\Rightarrow \boxed{x = 4}$.

Ответ: $x = 4$.

Чистовик

№4

1) т.к. НОД$(a;b;c)=35$, то все три числа делятся на 35

2) т.к. НОК$(a;b;c)=35^{16}\cdot 5^2$, то возможны случаи, когда двое из чисел $(a;b;c)$ делятся на 5, а третье $\not\vdots\, 5$ или когда одно из трех чисел делится на 25, а два других $\not\vdots\, 25$, $\not\vdots\, 5$

3) НОК – наименьшее число, которое нацело делится на каждое из трех чисел $(a;b;c)$

4) если
$$a=35^n\cdot\alpha$$
$$b=35^m\cdot\beta$$
$$c=35^k\cdot\gamma$$
, где $(n+m+k)=16$, $\alpha;\beta;\gamma$ – выбор из $\{1;25;5\}$.

$\Downarrow$

5) Все возможные случаи:

α	β	γ	
1	5	5	6 случаев выбора α, β, γ
5	1	5	
5	5	1	
1	25	1	
1	1	25	
25	1	1	

6) Будем ориентироваться по степени n числа 35, чтобы $n+m+k=16$:

Заметим, что все возможные варианты перестановок $n, m,$ ~~и~~ k образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=1$, где $S_{14}=\frac{1+a_1+13d}{2}\cdot 14=$

$=\frac{1+1+13}{2}\cdot 14=15\cdot 7=105$

$\left(\underbrace{1+2+3+4+5\ldots+a_{14}}_{14}\right)$

n	m	k	
14	1	1	1
13	2	1	2
13	1	2	
12	2	2	3
12	3	1	
12	1	3	
11	1	4	4
11	4	1	
11	2	3	
11	3	2	

n	m	k	
10	2	3	5
10	3	2	
10	2	4	
10	4	2	
10	3	3	
…			
1	1	14	14
1	14	1	
1	…		

Следовательно, существует 105 вариантов

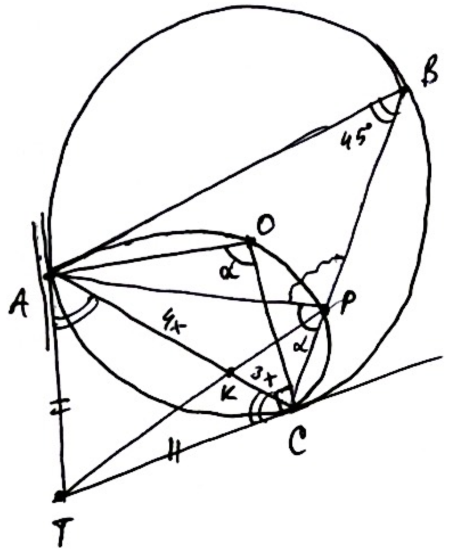
Чистовик

выбрать n, m и k для каждого случая (a; b; c)

7) Помимо этого, мы также имеем 6 различных случаев (варианта) выбора α, β и γ (из п.5) $\Rightarrow$ Всего возможно выбрать натуральных троек (a, b, c): $105\cdot 6 = 630$ (вариантов).

Ответ: 630.

№6.



1) т.к. треугольник ABC – остроугольный, то центр O лежит внутри треугольника

2) $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ – как вписанный

$\angle APC = \angle AOC$ – как опирающиеся на одну дугу и вписанные

3) $\angle CAT = \angle TCA = \angle ABC$ – по теореме об угле между хордой и касательной

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC = S_{APC} + S_{APB} = 21 + S_{APB} = 21 + \frac{AP\cdot PB\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{2} =$

$= 21 + \frac{1}{2}(AP\cdot PB\cdot\sin\alpha) =$

$= 21 + \frac{1}{2}\left(\frac{42}{PC}\cdot PB\cdot\sin\alpha\right) =$

$= 21 + \frac{1}{2}\left(\frac{PB}{PC}\cdot 42\cdot\sin\alpha\right) =$

$= 21 + \frac{1}{2}\left(\frac{4\cdot 42}{3}\cdot\overset{=1}{\sin\alpha}\right) =$

$= 21 + \frac{4\cdot\cancel{21}^{7}}{\cancel{3}} = 21 + 28 =$

$= 49.$

$$\begin{cases} S_{APK} = \frac{1}{2}\cdot AK\cdot h = \frac{AP\cdot PK\cdot\sin\angle APK}{2} = 12 \\ S_{PKC} = \frac{1}{2}\cdot KC\cdot h = \frac{PK\cdot PC\cdot\sin\angle KPC}{2} = 9 \end{cases}$$

$S_{APC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot h = 21$

5) $\frac{AP}{PK}\cdot\frac{\sin\angle APK}{\sin\angle KPC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{AK}{KC}$

$\sin(\angle APK + \angle KPC) = \sin\alpha$

6) $\angle\alpha = 90^\circ$ (опирается на диаметр)

$\frac{AP\cdot PC}{2} = 21 \Rightarrow AP\cdot PC = 42$

$AP = \frac{42}{PC}$

Ответ: а) 49

14 13 12 13
1 2 3
1 1 2

Черновик

①

$$\begin{array}{r} \overset{3}{105} \\ \times\ 6 \\ \hline 630 \end{array}$$

$a = 35^n \cdot \alpha$

$b = 35^k \cdot \beta$

$c = 35^t \cdot \gamma$

где $\{\alpha; \beta; \gamma\} : \{1; 5; 25\}$.

a =	1	1	1	5	5	25
b =	5	25	1	1	5	1
c =	5	~~4~~1	25	5	1	1

6 случаев.

$n + k + t = 16$, тогда

~~n от 1 до 14~~

$\underbrace{14}_{n}$ $\underbrace{14}_{k}$ $\underbrace{14}_{t}$

для n: от 1 до 14

$5 = 2 + 3 = 4 + 1$

$6 = 2 + 3 = 2 + 4 = 3 + 3$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Сумма 16

14	1	1	1
13	2	1	2
13	1	2	
12	2	2	3
12	3	1	
12	1	3	
11	1	4	4
11	4	1	
11	2	3	
11	3	2	
10	2	3	5
10	3	2	
10	2	4	
10	4	2	
10	3	3	
9			
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			
1			

$$\begin{array}{r} \overset{3}{15} \\ \times\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots$

Черновик

№4.

②

Наибольш. общ. делитель $(a;b;c) = 5 \cdot 7 = 35$.

и ⓐ и ⓑ, и ⓒ делятся на 35.

Наименьшее общее кратное $(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$(5^{18} \cdot 7^{16})$ делить на a, на b, на c

a). $35 \cdot k(19)$ $5^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^{16} = 35^{16} \cdot 5^2$

b) $35 \cdot l(11)$ $7^2 \cdot 5^2$

c) $35 \cdot n(2)$

где k, l, n – простые разные числа

b) $5^2 \cdot l$

c) $7^2 \cdot n$

$35^{16} \cdot 5 \cdot 5$

35^{16}

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

НОК: $2^6 \cdot 3$.

~~а, в или с делится на~~

если (a) делится на 5, (b) делится на 5

Число, которое целиком делится и на ⓐ, и на ⓑ, и на ⓒ

НОД$(a;b;c) = 35$ все числа $(a;b;c)$ делятся на 35

НОК$(a;b;c) = 35^{16} \cdot 5^2$ число наименьшее, которое делится на все 3 числа

$a = 35 \cdot l$

$b = 35 \cdot k$

$c = 35 \cdot d$

либо l делится на 5, k делится на 5

$k \vdots 5$, $d \vdots 5$

$l \vdots 5$, $d \vdots 5$

либо $l \vdots 25$; $k \vdots 25$; $d \vdots 25$.

НОД$(a;b;c) = 5 \cdot 7$

Если $(l; k)$; $(l; d)$; $(k; d) \vdots 5$, то:

$\downarrow\downarrow$

$a = 35^t \cdot 5$ $b = 35^n \cdot$

3 числа в сумме: 16.

для a м.б. от 1 до 14

для b м.б. от 1 до 14

для c м.б. от 1 до 14

14^3

$a = 35^{14} \cdot l$

$b = 35^{1} \cdot k$

$c = 35^1 \cdot n$

$a = 35^{12}$

$b = 35^2$

$c =$

$\underbrace{\quad}_{a}^{14} \underbrace{\quad}_{b} \underbrace{\quad}_{c}$

Черновик ③

① при $a = b$, $c = a - 1$:

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

① пусть $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = c$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = a$

$\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) = b$

тогда: $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x-3}(x+1)^2$

$2x-3 \neq 1$ $\quad 2x \neq 4$ $\quad x \neq 2$

$D = 9 - 40$

$2x^2-3x+4 \neq 0$

$D = 9 - 32$

$2x-3 \neq 1$

$2x \neq 4$

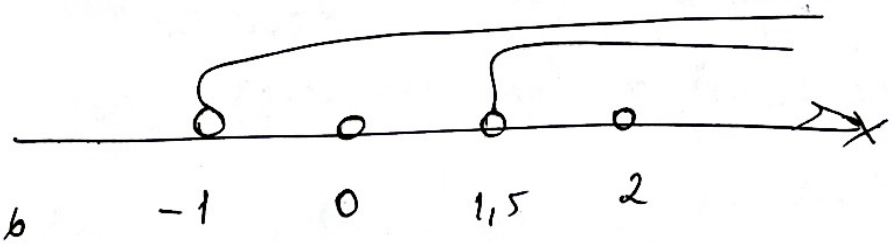
$x \neq 2$

$D = b^2 - 4ac$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$D = 16 - 16 = 0$

$x_1 = \frac{4}{2} = 2$



$\begin{array}{r} \overset{2}{16} \\ \times 4 \\ \hline 64 \end{array}$

$x > 1,5.$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot \overset{8}{8} = 64$

$2x^2-3x+4 = 0$

$D = 25 -$

$D = 9 - 4\cdot 8 = 9 - 32$

$b = c$: b^2

$\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) = \cancel{2}\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2$

$\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) - \log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2 = 0.$

$D = 25 - 16$

Черновик ④

НОД (Наибольший общий делитель) = 35 = 5·7.

12 | 2   38 | 2
6 | 2   19 | 19
3 | 3   1 |
1 |

②

$НОД(a; b; c) = 5 \cdot 7$

$НОК(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

НОК (Наименьшее общее кратное)

12 | ②   38 | ②
6 | 2   19 | 19
3 | 3   1 |
1 |

6   13

$$\begin{array}{l|l} a^3 - a^2 - 4 & a-2 \\ \underline{-\ a^3 - 2a^2} & \overline{a^2 + a + 2} \\ \quad a^2 - 4 & \\ \quad \underline{-\ a^2 - 2a} & \\ \qquad 2a - 4 & \\ \qquad \underline{-\ 2a - 4} & \\ \qquad\quad 0. & \end{array}$$

N 2

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \text{ⓒ} = 2\log_{(2x-3)}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \text{ⓐ} = 2\log_{(2x^2-3x+5)}|2x-3|$

$\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) = \text{ⓑ} = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

$\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2 \cdot \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) = \log_{(x+1)}(2x-3)^2$

$2\log_{(x+1)}(2x-3)$ и $2\log_{(2x-3)}(x+1)$

~~$a+b+c = \log_{(2x-3)}(x+1)^2 + \log$~~

$(a-2)(a^2+a+2) = 0.$

$\boxed{a = 2}.$

$a = b$; $c = a - 1.$

	1	-1	0	-4
2	0 1	1	2	0

$a^2 + a + 2$

$a \cdot b = \log_{(x+1)}(2x-3)^2 = 2\log_{(x+1)}(2x-3)$ k

$c = \log_{(2x-3)}(x+1)^2 = 2\log_{(2x-3)}(x+1) = \dfrac{2}{\log_{(x+1)}(2x-3)}$

$\begin{cases} ab = 2k \\ c = \dfrac{2}{k} \end{cases}$ $abc = \dfrac{2k \cdot 2}{k} = 4.$

$\pm1, \pm2; \pm4$

$64 - 16 - 4$

$a \cdot b \cdot c = 4$

$a^2 \cdot c = 4.$

$a^2(a-1) = 4$

$a^3 - a^2 = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0.$

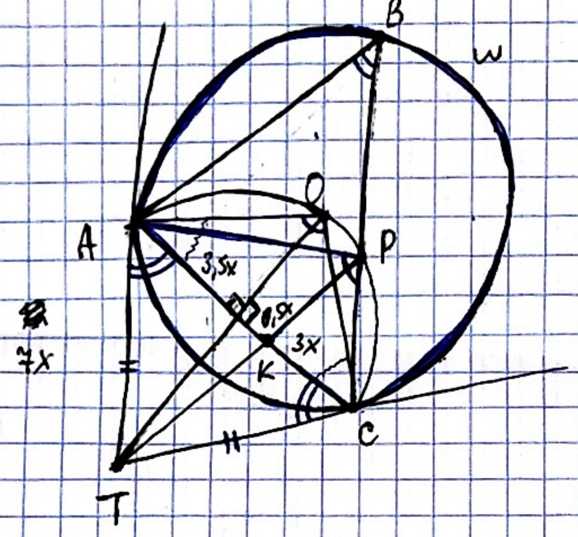
черновик
№6. 21 ⑤

$\frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$ $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$.

$S(APK) = 12$ Найти: $S(ABC)$

$S(CPK) = 9$

O-центр окружности



$\begin{cases} AK \cdot h = 24 \\ KC \cdot h = 18 \end{cases}$

$AC \cdot h =$

$TC^2 =$

① S_{APK}

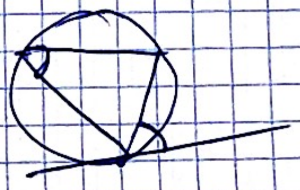
$\angle AOC = 2\angle ABC$

$S_{APK} + S_{CPK} =$

$2x \neq 4$

$2x - 3 \neq 1$

$S(ABC) = AB \cdot BC$



① если $\angle TAC = \beta$, то $\angle AOC = 2\beta$

② $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{\angle APK}{2}$

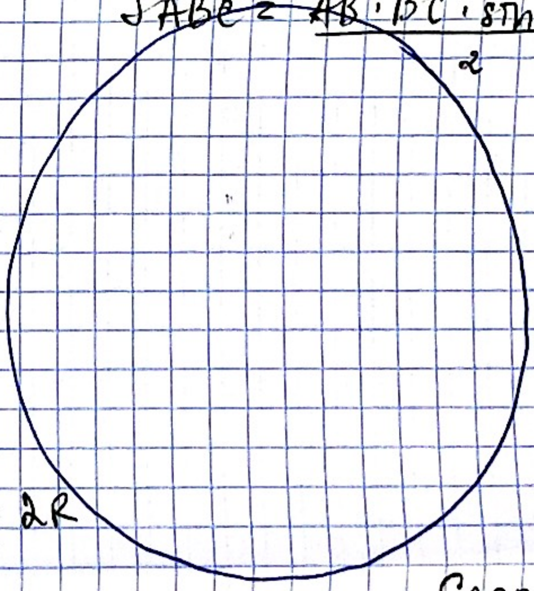
$S_{\triangle APC} = 21. = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin\alpha}{2}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\beta}{2}$

③ ~~$\angle A$~~ $\angle CAO = 90^\circ - \beta$

~~$\angle P$~~

$\angle OCA =$



$S_{APK} =$ ~~AP·PK~~

$AK \cdot h_1 = 12$

$S_{CPK} = KC \cdot h_1 = 9.$

$\frac{AC}{\sin\angle APC} = 2R$

$S_{ABC} = AC \cdot h_2$

$S_{APB} = \frac{AP \cdot PB (\sin 180 - \beta \cdot 2)}{2}$

$S_{APK} = \frac{AP \cdot PK \cdot \sin\angle APK}{2} = 12$

$S_{CPK} = \frac{CP \cdot PK \cdot \sin\angle KPC}{2} = 12$

$\div \begin{cases} AP \cdot PK \cdot \sin\angle APK = 24 \\ CP \cdot PK \cdot \sin\angle KPC = 24 \end{cases}$

~~S_{APB}~~

$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{\sin\angle APK}{\sin\angle KPC} = 1.$

~~$\frac{AP}{PC}$~~