Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102221**

ID профиля: **175465**

Вариант 21

Чистовик. 1

1. Пусть d – разность прогрессии. Т.к. прогрессия возрастающая, то $d>0$
Т.к. все члены целые, то d – целое.

$S = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$

$a_8\cdot a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) > S+27 \Leftrightarrow (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27 \Leftrightarrow$
$a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27 \; (1)$

$a_{11}\cdot a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60 = 7a_1+21d+60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_1^2+23a_1d+130d^2 < 7a_1+21d+60 \; (2)$

Складывая нер-ва (1) и (2), имеем: $a_1^2+23a_1d+112d^2+7a_1+21d+60 > a_1^2+23a_1d+130d^2+7a_1+21d+27 \Leftrightarrow 33 > 18d^2 \Leftrightarrow d^2 < \frac{11}{6} \Rightarrow d=1 \; (d>0, d\in\mathbb{Z})$

Подставляем в нер-во (1): $a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27 \Leftrightarrow a_1^2+16a_1+64>0$
$\Leftrightarrow (a_1+8)^2>0 \Leftrightarrow a_1\in(-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$

Подставляем в нер-во (2): $a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+21+60 \Leftrightarrow a_1^2+16a_1+49<0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a_1+8+\sqrt{15})(a_1+8-\sqrt{15})<0 \Leftrightarrow a_1\in(-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15})$

$-8-\sqrt{15} < -8-\sqrt{9} = -11$; $-8+\sqrt{15} > -8+\sqrt{9} = -5$
$-8-\sqrt{15} > -8-\sqrt{16} = -12$; $-8+\sqrt{15} < -8+\sqrt{16} = -4$
$\Rightarrow a_1\in[-11;-5]$

Учитывая, что $a_1\in(-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$, получаем $a_1\in\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$

Чистовик. ②

3.
$$a^2+b^2 \le \min(8a-4b;\,20) \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 8a-4b\ge 20\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ 8a-4b<20\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ b\le 2a-5\end{cases}\\ \begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2\le 20\\ b> 2a-5\end{cases}\end{array}\right.$$

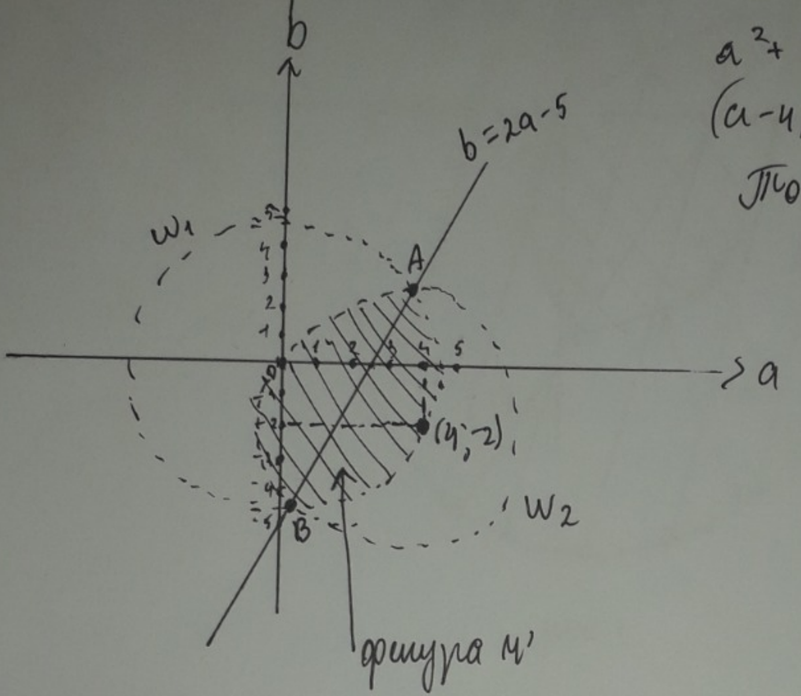


рис.1.

$a^2+b^2=20$ – окруж. ω_1

$(a-4)^2+(b+2)^2=20$ – окруж. ω_2

Точки пересечения прямой $b=2a-5$ с ω_1:

$$a^2+(2a-5)^2=20 \iff$$
$$\iff a^2-4a+1=0 \iff a=2\pm\sqrt{3}$$

Точки пересечения прямой $b=2a-5$ с ω_2:

$$(a-4)^2+(2a-5+2)^2=20 \iff$$
$$\iff a^2-4a+1=0 \iff a=2\pm\sqrt{3}.$$

Значит, обе окружности пересекаются в точках $A(2+\sqrt{3};\,2\sqrt{3}-1)$ и $B(2-\sqrt{3};\,-2\sqrt{3}-1)$ на прямой $b=2a-5$. А совокупности систем неравенств, а, значит, и нер-ву $a^2+b^2\le\min(8a-4b;\,20)$ будет удовлетворять пересечение кругов ω_1 и ω_2

В координатах x,y каждая точка найденного множества будет являтся центром круга с радиусом $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Все точки (x,y) попавшие в один из этих кругов являются точкой фигуры M. Фигуру M получаем из M', поместив в каждую точку M' круг радиуса $2\sqrt{5}$ (см рис. 2).

продолжение. 3

чистовик

③

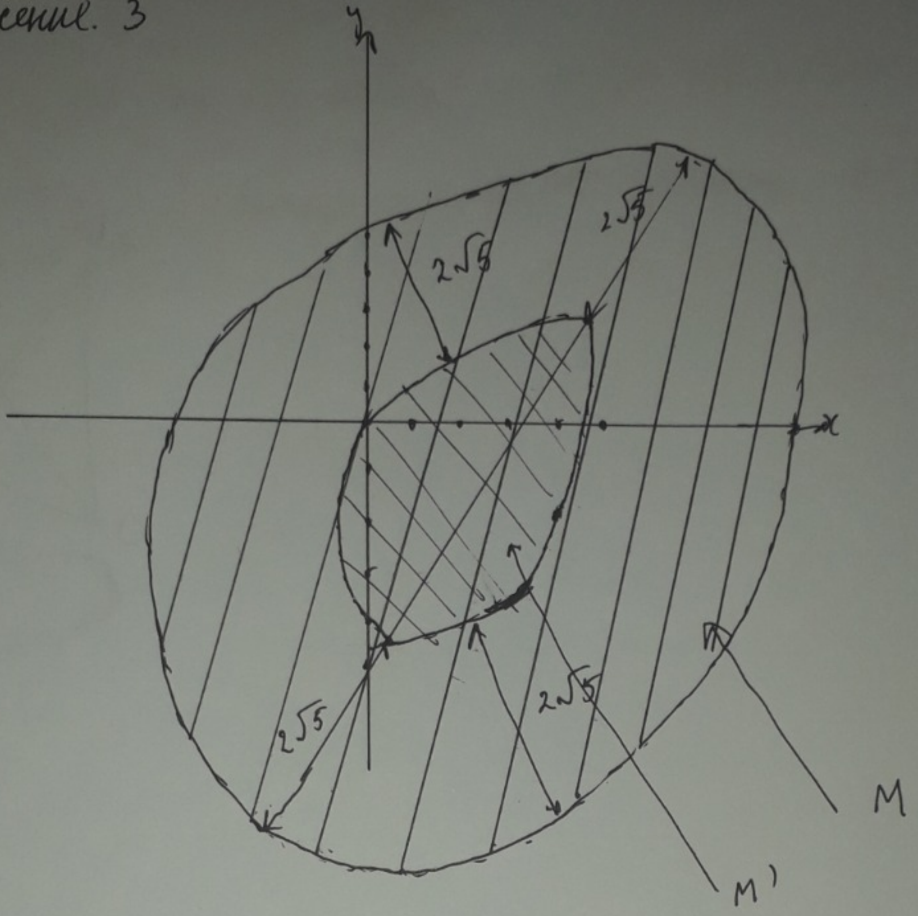
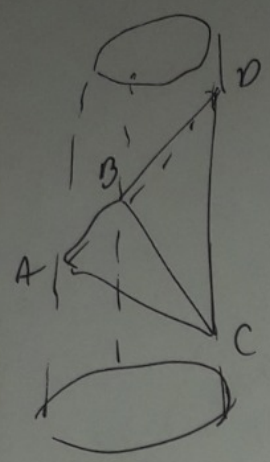


рис. 2

Чистовик

④

2. Т.к. CD || оси, то CD лежит на боковой поверхности цилиндра

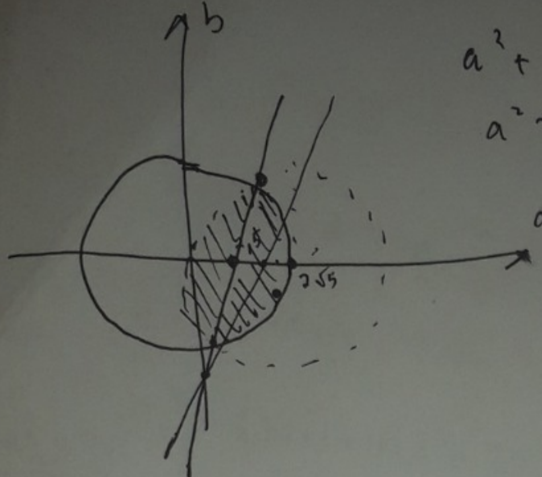


Минимум когда AB - диаметр ц-ра

21102221 (U175465 M1297695)

черновик

5



$$a^2 + (2a-5)^2 = 20$$

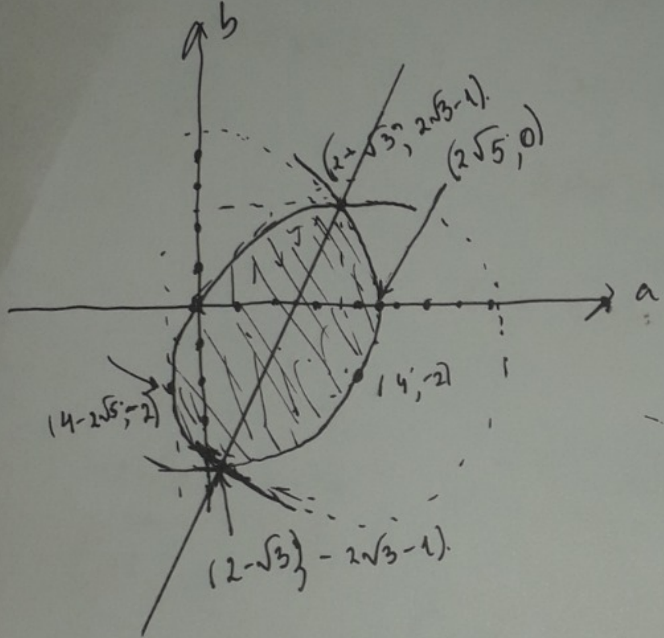
$$a^2 + 4a^2 - 20a + 25 = 20$$

$$a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$4 + 2\sqrt{3} - 5 = 2\sqrt{3} - 1$$

$$4 - 2\sqrt{3} - 5. \quad -2\sqrt{3} - 1$$



черновик ⑥

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \qquad S_n = a_1 + a_1 + d + \ldots + a_1 + (n-1)d = \frac{2na_1}{2} + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27 \iff a_1^2 + 16a_1d + 7a_1d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60 \iff a_1^2 + 13a_1d + 10a_1d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 60 > \cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1d} + 130d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 27$

$60 > 18d^2 + 27 \qquad 33 > 18d^2 \qquad 11 > 6d^2, d \in \mathbb{Z}, d > 0 \quad d^2 < \frac{11}{6} < 2 \quad d^2 = 1 \; d = 1$

$a_1 + d - a_1 \wedge$

$d > 0$

$256 - 4 \cdot 49 = 60$

$4(50 - 1) = 200 - 4$

$+ \qquad - \qquad +$

$-8 - \sqrt{15} \qquad -8 + \sqrt{15}$

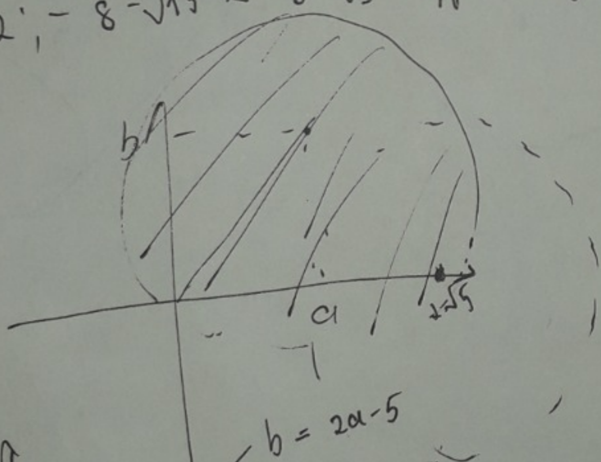
-4

-12

$\frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -8 \pm \sqrt{15} \qquad 256 - 200 + 4 = 60$

$-12; \; -8 - \sqrt{15} < -8 - \sqrt{9} = -11 \qquad -8 + \sqrt{15} > -8 + \sqrt{9} = -8 + 3 = -5$

$b \leq 2a - 5$



$a^2 + b^2 \leq 20 \quad 2a - b \leq 5$

$\cancel{b =}$

$a^2 + b^2 \leq 8a - 4b$

$8a - 4b < 20$

$2a - b < 5$

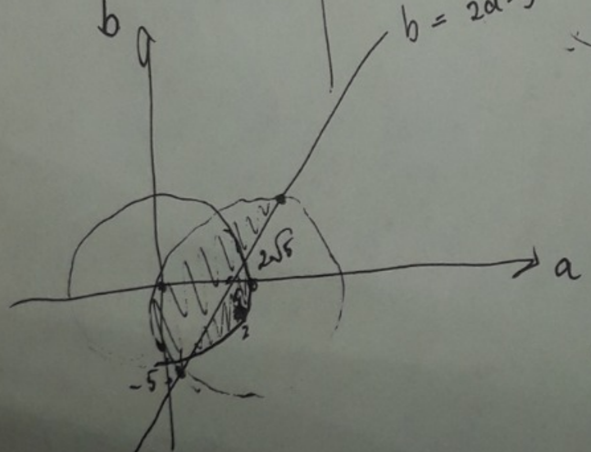
$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \leq 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \leq 20$

$(2a-3)^2$

$a^2 - 8a + 16 + 4a^2 - 12a + 9 \leq 20$

$5a^2 - 20a + 5 = 0$



$2 + \sqrt{3} \vee 2\sqrt{5}$

$4 + 3 + 4\sqrt{3} \vee 20$

$4\sqrt{3} \vee 13$

$a^2 - 4a + 1 = 0$

$D = 16 - 4 = 12 \quad a_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

21102221 (U175465 M1297695)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102221**

ID профиля: **175465**

Вариант 21

3) ~ $\log_a a^2 = \log_b c$ ... $2\log_c a = \frac{1}{\log_c b}$ ... 1 ... $\log_c b$

Чистовик Вариант 21. ①

4. Все числа имеют вид $5^{a}\cdot 7^{b}$, причём, т.к. НОД$(a,b,c) = 35 = 5\cdot 7$, то $x, y \geq 1$. Пусть $a = 5^{x_1}\cdot 7^{y_1}$; $b = 5^{x_2}\cdot 7^{y_2}$; $c = 5^{x_3}\cdot 7^{y_3}$

$x_1, x_2, x_3 \leq 18$, причём одно из чисел равно 18; $y_1, y_2, y_3 \leq 16$, причём одно из них равно 16 (т.к. НОК$(a,b,c) = 5^{18}\cdot 7^{16}$)

Также среди чисел x_1, x_2, x_3 одно равно 1, и среди чисел y_1, y_2, y_3 одно равно 1, иначе в НОД(a,b,c) 5 или 7 входили бы в степени большей

Один из трёх иксов делаем 1, один из оставшихся двух – 18, третий икс принимает значение от 1 до 18. Аналогично, один игрек из трёх равен 1, один из двух оставшихся равен 16, третий – от 1 до 16. Тогда имеем $3\cdot 2\cdot 18\cdot 3\cdot 2\cdot 16 = 3^4\cdot 2^7$ вариантов

Пусть мы имеем расстановку x_1, x_2, x_3: 1; 18; x ($x_1 = 1$; $x_2 = 18$; $x_3 = x$, x принимает значения от 1 до 18). Тогда имеем 6 расстановок для y_1, y_2, y_3

	$(x_1; y_1)$	$(x_2; y_2)$	$(x_3; y_3)$
1)	(1; 1)	(18; 16)	$(x; y)$
2)	(1; 1)	(18; y)	(x; 16)
3)	(1; 16)	(18; 1)	$(x; y)$
4)	(1; 16)	(18; y)	(x; 1)
5)	(1; y)	(18; 1)	(x; 16)
6)	(1; y)	(18; 16)	(x; 1)

y – число от 1 до 16.

При $y = 16$ варианты 1 и 2 совпадают (18 совпадений при x от 1 до 18), также совпадают варианты 4 и 6 (18 совпадений при x от 1 до 18) и 3 и 5 (18 совпадений)

При $y = 1$ совпадают 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4

1) ~~Все~~ x_1, x_2, x_3 различны и y_1, y_2, y_3 различны. Тогда вариантов:

$3\cdot 2\cdot 16\cdot 3\cdot 2\cdot 14 =$ ~~один~~ $= 2^7\cdot 3^2\cdot 7$ (один икс $= 1$, другой – 18, третий от 2 до 17, один игрек $= 1$, другой 16, третий от 2 до 15)

2) иксы равны 1; 1; 18; игреки различны: вариантов: $3\cdot 3\cdot 2\cdot 14 = 3^2\cdot 2^2\cdot 7$

3) иксы равны 1; 18; 18 игреки различны: вариантов: $3\cdot 3\cdot 2\cdot 14 = 3^2\cdot 2^2\cdot 7$

продолжение 4. чистовик. 2

4) иксы равны 1; 1; 18 а) игреки равны 1; 1; 16, вар.: $3\cdot 3 = 9$

б) игреки равны 1; 16; 16, вар.: $3\cdot 3 = 9$

5) иксы равны 1; 18; 18 а) игреки равны 1; 1; 16, вар: $3\cdot 3 = 9$

б) игреки равны 1; 16; 16, вар: $3\cdot 3 = 9$

6) иксы различны а) игреки равны 1; 1; 16, вар: $3\cdot 2\cdot 16\cdot 3 = 2^5\cdot 3^2$

б) игреки равны 1; 16; 16, вар: $3\cdot 2\cdot 16\cdot 3 = 2^5\cdot 3^2$

Всего $2^7\cdot 3^2\cdot 7 + 2^3\cdot 3^2\cdot 7 + 36 + 2^6\cdot 3^2 = 9180$

Ответ: 9180

Чистовик

5. ОДЗ:
$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ \sqrt{2x-3}\neq 1 \\ x+1>0 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \\ x>-1 \\ x\in(-\infty;+\infty) \\ x\in(-\infty;+\infty). \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

На ОДЗ:

1) $$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)-1=\log_{x+1}(2x^2-3x+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2x-3}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \\ 2\log_{2x-3}(x+1)=\log_{x+1}(x+1)(2x^2-3x+5) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2x-3}(x+1)=\dfrac{1}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)} \\ 2\log_{2x-3}(x+1)=\dfrac{\log_{2x-3}(x+1)+\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}{\log_{2x-3}(x+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

$t=\log_{2x-3}(x+1)$, $D<0$

$$\Rightarrow 2\log^3_{2x-3}(x+1)-\log^2_{2x-3}(x+1)-1=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+t+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \log_{2x-3}(x+1)=1 \Leftrightarrow x+1=2x-3 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$$

$$\boxed{2x-3=a;\ x+1=b;\ 2x^2-3x+5=c}$$

2) $$\begin{cases} \log_{\sqrt{a}}b=\log_b c \\ \log_{\sqrt{a}}b=\log_c a^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_a b=\log_b c. \\ 2\log_a b=\log_c a^2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\log_b a}=\log_b c \\ \dfrac{2}{\log_b a}=\dfrac{\log_b a^2c}{\log_b c} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log^2_b c=\cancel{\log_b a}\cdot(2\log_b a+\log_b c) \Leftrightarrow \log^2_b c=\frac{4}{\log_b c}+\log_b c \Leftrightarrow$$

$D<0$

$$\Leftrightarrow t^3-t^2-4=0\ (t=\log_b c) \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+5=x^2+2x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ — не удов. ОДЗ} \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \underline{x=4}$$

чистовик

3) $\begin{cases} \log_c a^2 = \log_b c \\ \log_b c = \log_{\sqrt{a}} b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_c a = \dfrac{1}{\log_c b} \\ \dfrac{1}{\log_c b} = \dfrac{\log_c b}{\log_c \sqrt{a}} + 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{\log_c b} = \dfrac{\log_c b}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\log_c b}} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{t} = 4t^2 + 1$ $(t = \log_c b)$ $\Leftrightarrow 4t^3 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(2t^2+t+1) = 0$ $D<0$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{2x^2-3x+5}(x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{2x^2-3x+5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 3x + 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$ $x = 1$ не удов. ОДЗ $\Rightarrow x = 4$

Ответ: $x = 4$.

продолжение 5.

$2x-3$ $\quad 3 \pm 9-4\cdot5\cdot2$ черновик

$\frac{3}{4}$ $\quad \frac{9}{8}-\frac{9}{4}+5$

$\log_a b = \frac{\log_{a^n} b}{\log_{a^n} a} = n\log_{a^n} b$ $\quad$ 5

$\log_{\frac{1}{2}} x =$ $\quad 2x^2-3x+4\neq 0$

$9-4\cdot4\cdot2$ $\quad \log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$

$\log_{\sqrt{2}} x = 2\log_2 x$ $\quad \log_2 4 + \log_{2^2} 6$

$\frac{2\log_{\sqrt{2}} x}{\log_{\sqrt{2}} 2} = \log_{\sqrt{2}} x$ $\quad 6$ $\quad 2x^2-3x+5$ $\quad \log_2 4 = 2$

$\log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{\sqrt{2x-3}} x+1 - 1$

$\cdot\frac{1}{2}$

$\log_{\sqrt{2}} 2$ $\quad \log_2 2 = 1$ $\quad 2\log_{2x-3} x+1 = \log_{2x^2-3x+5} 2x-3$

$\log_b a = \frac{1}{\log_b c}$

$2\log_b a = \log_a a\cdot c = \frac{\log_b ac}{\log_b a}$ $\quad 2\log_b^2 a = \log_b a + \cancel{\log_b c}$ $\quad \frac{1}{\log_b a}$

$(2t-1)(2t^2+t+1)$ $\quad 2t^3 = t^2+1$

$4t^3+\cancel{2t^2}+\cancel{2t}-\cancel{2t^2}-t$ $\quad 2t^3-t^2-1=0$

-1

$4t^3+t-1$ $\quad (t-1)(2t^2+t+1)$

$2t^3+t^2+t-2t^2$

$-t-1$

$2t^3-t^2-1$

$(t-2)(t^2+t+2)$

21102221 (U175465 M1297696)