Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102098**

ID профиля: **801902**

Вариант 21

Вариант 21 Чистовик.

N1 $S = \sum_{i=1}^{7} a_i$

$\{a_i\}$ - возраст. арифметич. прогрессия, $a_i \in \mathbb{Z}$

$a_8 a_{17} > S + 27$

$a_{11} a_{14} < S + 60$

$a_1 - ?$

1

$a_n = a_1 + d(n-1)$ - общий вид члена арифм. прогрес, где d-разность прогрессии, $n \geq 1$. В нашем случае $d > 0$. (т.к $a_i \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$).

$$S = a_1 + \underbrace{(a_1+d)}_{a_2} + \underbrace{(a_1+2d)}_{a_3} + \dots + \underbrace{(a_1+6d)}_{a_7} = 7a_1 + 21d$$

$$a_8 \cdot a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2$$

$$a_{11} \cdot a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$$

Если $x > y$, а $z > w$, то $x + z > y + w$

Таким образом $\cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 60 >$
$> \cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1d} + 130d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 27$

$33 > 18d^2$, при этом $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

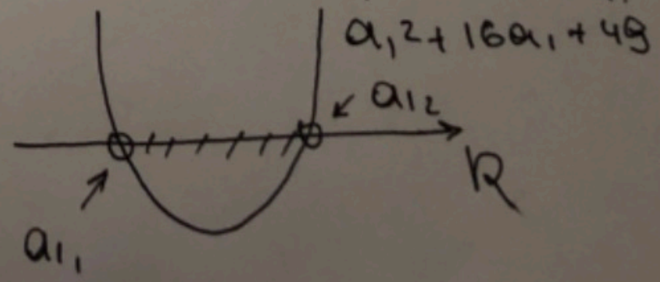
$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \Rightarrow (a_1+8)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -8$ - решен. неравенства.

Найдем корни!

$\frac{D}{4} = 64 - 49 = 15$

$a_{1,2} = -8 \pm \sqrt{15}$



Решение неравенства: Вар. 21. чистовик

$a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15})$

Решение системы неравенств

(2)

$$\left[\begin{array}{l} a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8) \\ a_1 \in (-8; -8+\sqrt{15}). \end{array}\right.$$

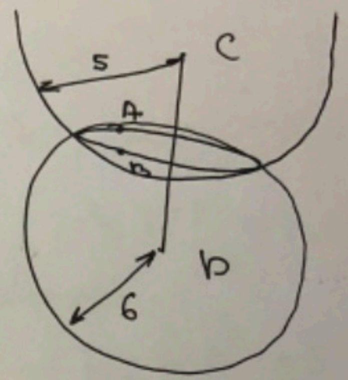
Таким образом, т.к $a_1 \in Z$, нам подходят значения: $-11, -10; -9; -7; -6; -5$.

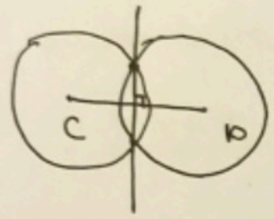
<u>Ответ:</u> a_1 может быть равно

$-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

№2. $AB=4$, $AC=CB=5$, $AD=DB=6$. Чистовик.

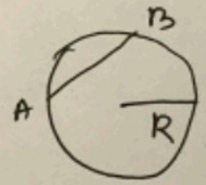
Представим 2 сферы: с центром в точке C с $R=5$, и с центром в т. D и радиусом 6. Точки A и B лежат, очевидно, на пересеч. этих сфер - окружности, при этом эти окружности лежат в плоскости, перпенд. CD (это можно доказать, взяв 2 плоск. сечения, проход. через точки C и D)





$\Rightarrow AB \perp CD$

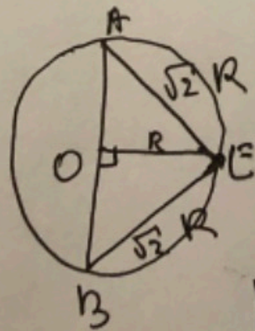
Раз $AB \perp CD$, $AB \parallel$ плоскости основан. цилиндра



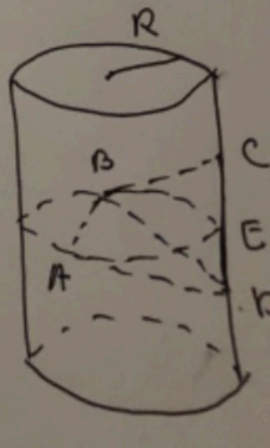
$\Rightarrow R \geq \frac{AB}{2} = 2$.

3

$R_{min} = 2$, точки A и B лежат на диаметре цилиндра. Пусть E - точка пересеч. окружности, парал. основан. цилиндра, на которой лежат точки A и B.

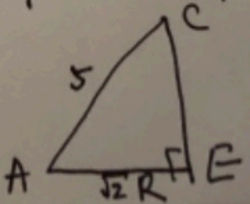


$OE \perp AB$, т.к точки A и B равноудал от прямой (CD)



Рассмотрим прямоуг Δ.

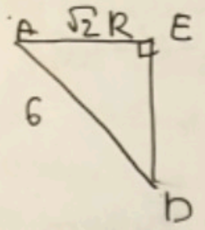
ΔAEC:



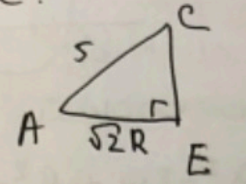
чистовик

4

ΔAED:



ΔAEC:



$R = 2$

$$\left.\begin{aligned} CE^2 &= 25 - 8 = 17 \\ DE^2 &= 36 - 8 = 28 \end{aligned}\right\} \text{ по т. Пифагора}$$

$$CD = CE + DE = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$$

Ответ: $CD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b,\ 20) \end{cases}$$

$M = \{ (x,y) : \exists\, a, b$, $S_M - ?$

Рассмотрим второе неравенство:

$$a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b;\ 20) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 8a - 4b \\ a^2 + b^2 \le 20 \end{cases}$$

Будем решать эквивал. систему неравенств

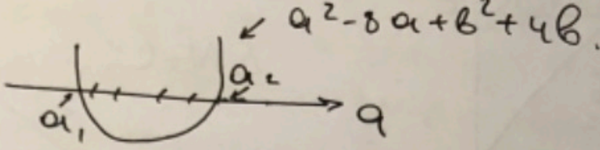
$a^2 + b^2 - 8a + 4b \le 0$ — попроб. разрешить

$a^2 - 8a + b^2 + 4b \le 0$ относительно a.

$\frac{D}{4} = 16 - b^2 - 4b$.

AB = 4, AC = CB = 5, AD = DB = ...

Чистовик.



Если $\frac{D}{4}<0$, то корней a_1 и a_2 не будет, => все значен. a^2-8a+b^2+4b будут больше 0, т.е неравенство не будет иметь решений, потребует $\frac{D}{4}\geq 0$

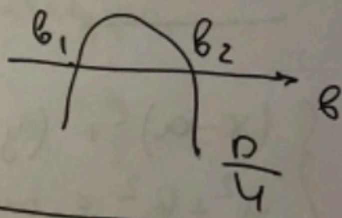
5

$\frac{D}{4}=-b^2-4b+16\geq 0$

$\frac{D'}{4}=4+16=20$, => $b_{1,2}=-(2\pm\sqrt{20})$.

$\frac{D}{4}\geq 0$, когда

$b\in[-2-\sqrt{20};-2+\sqrt{20}]$.



В таком случае $a\in[4-\sqrt{16-b^2-4b};$ $4+\sqrt{16-b^2-4b}]$.

при этом должно выполняться

$a^2+b^2\leq 20$.

$|a||b|\leq\sqrt{20}$ => $\begin{cases} b\in[-\sqrt{20};-2+\sqrt{20}] \\ a\in[4-\sqrt{16-b^2-4b}; \\ \quad 4+\sqrt{16-b^2-4b}] \\ a^2\leq 20-b^2 \end{cases}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102098**

ID профиля: **801902**

Вариант 21

Вариант 21 Чистовик.

№4. т.к НОК $(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$, в разложении на множители чисел a, b, c присутствуют только 5 и 7, т.е $a = 5^{n_1} \cdot 7^{m_1}$

$b = 5^{n_2} \cdot 7^{m_2}$

$c = 5^{n_3} \cdot 7^{m_3}$

где $n_i, m_j = 0, 1, 2 \ldots$ - неотриц. целые числа

При этом хотя бы одно из чисел n_1, n_2, n_3 равно 1 (иначе в НОДе будет степень 5 выше 1) и одно хотя бы из чисел m_1, m_2, m_3 равно 1 (иначе в НОДе будет степень 7 выше 1)

т.к НОК $(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$, $\max(n_1; n_2; n_3) = 18$

$\max(m_1; m_2; m_3) = 16$.

Ограничения на числа n_i не связаны с огранич. числа m_j; их можно выбирать независимо => число способов выбрать 6 чисел $n_1; n_2; n_3; m_1; m_2; m_3$ равно произвед. чисел способов выбрать отдельно по 3 числа $n_1; n_2; n_3$ и $m_1; m_2; m_3$. Чтобы подобрать тройку n_1, n_2, n_3 выберем одно из них равное 1, это можно сделать 3-мя способами, потом выберем еще одно, равн. 18, это 2 способа → 6 способов выбрать одно число равным 1, а другое равным 18. Третье число может принимать значения 1, 18 или от 2 до 17. Таким образом, если одно из чисел n_1, n_2, n_3 равно 1, другое 18, а третье от 2 до 17, то существует $6 \cdot 16 = 96$ способов их выбрать. Если же

третье число равно 1, то таких Чистовик.
способов 3: (1; 1; 18), (1; 18; 1), (18; 1; 1).
Если третье число равно 18, то таких способов тоже 3. Общее число способов выбрать числа n_1, n_2, n_3 равно $96+3+3=102$
(числа $n_1, n_2, n_3 \neq 0$ т.к НОД = 35, т.е a, b, c дел. на 5.) 2

Теперь посчитаем количество способов выбрать числа m_1, m_2, m_3. Аналогично $6 \cdot 14 = 84$ способа, когда все числа различные, и 6 способов, когда 2 из них ~~совпадают~~ совпадают. => всего $84+6=90$ способов выбрать тройку чисел m_1, m_2, m_3.

Таким образом, существует $102 \cdot 90 = 9180$ способов выбрать 6 чисел $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$, а их выбор эквивалентен подбору тройки чисел a, b, и c.

Ответ: 9180 способов.

21102098 (U801902 M1300562)

чистовик.

Вариант 21. чистовик.

№5. $A = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $B = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$,

$C = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-3 \neq 1, >0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1, >0 \\ x+1 \neq 1, >0 \end{cases}$ Обозначим

$a = 2x-3$
$b = x+1$
$d = 2x^2-3x+5$.

3

В таком случае числа запишутся

$\log_{a^{\frac{1}{2}}}(b)$, $\log_d a^2$, $\log_b d$

$\log_b d = \frac{\log_a d}{\log_a b}$ - формула замены основания логарифма.

$\Rightarrow \begin{cases} A = 2\log_a b \\ B = 2\log_d a \\ C = \frac{\log_a d}{\log_a b} \end{cases}$, $\log_a d = \frac{1}{\log_d a} \rightarrow$

$\rightarrow C = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_d a} = \frac{1}{\frac{A}{2} \cdot \frac{B}{2}} = \frac{4}{AB} \Rightarrow$

$A \cdot B \cdot C = 4$, Пусть числа x, y, z таковы, что

$\begin{cases} xyz = 4 \\ x = y = z+1 \end{cases} \rightarrow$

$(z+1)^2 \cdot z = 4$, $z^3 + 2z^2 + z - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (z-1)(z^2+3z+4) = 0$ $z=1$ - корень

$z^2+3z+4=0$

$D = 9-16 < 0 \Rightarrow$ других корней нет,

$z = 1$, $x = y = 2$

21102098 (U801902 M1300562)

Рассмотрим второй случай. чистовик

$d = a^2 = b^2$

(5)

$$\begin{cases} 2x^2-3x+5=(2x-3)^2 \\ 2x^2-3x+5=(x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+5=4x^2-12x+9 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-9x+4=0 \\ (x-1)(x-4)=0 \end{cases} \rightarrow D=81-32=49$$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm 7}{4}=\frac{1}{2};4$$

$$\Rightarrow \boxed{x=4}$$

3

Проверим ОДЗ: $a=2x-3=5$; $a=b=5$, $d=25$ - подходит.

Рассмотрим 3-й случай $a=b=d$

$$\begin{cases} 2x-3=x+1 \\ 2x-3=2x^2-3x+5 \end{cases}$$ - нет корней (см 1. случай) $\Rightarrow$ корней нет,

значит подходит только $x=4$

Ответ: $x=4$.

Чистовик.

Таким образом, ~~которая~~ два из чисел A, B и C равны 2, а одно = 1.

1) Предположим, A = 1, B = C = 2.

(4)

$$\begin{cases} A = 2\log_a b = 1 \Rightarrow a = b^2 \\ B = 2\log_d a = 2 \Rightarrow a = d \\ C = \frac{\log_a d}{\log_a b} = 2 \Rightarrow d = b^2 \end{cases}$$ согласуется $a = d = b^2$

2) Предположим, что B = 1, A = C = 2, тогда:

$$\begin{cases} A = 2\log_a b = 2 \Rightarrow a = b \\ B = 2\log_d a = 1 \Rightarrow d = a^2 \\ C = \log_b d = 2 \Rightarrow d = b^2 \end{cases}$$ согласуется $a = b$; $d = a^2 = b^2$

3) Предположим, что C = 1, B = A = 2, тогда:

$$\begin{cases} A = 2\log_a b = 2 \Rightarrow a = b \\ B = 2\log_d a = 2 \Rightarrow a = d \\ C = \log_b d = 1 \Rightarrow b = d \end{cases}$$ согласуется $a = b = d$

Таким образом, система уравнений на x:

$$\left[\begin{array}{l} a = d = b^2 \\ d = a^2 = b^2 \\ a = b = d \end{array}\right.$$ при ОДЗ $a \neq 1, a > 0, b \neq 1, b > 0, d \neq 1, d > 0$.

Рассмотрим первый случай $a = d = b^2$

$$2x - 3 = 2x^3 - 3x + 5 = (x+1)^2$$

$$\begin{cases} 2x - 3 = 2x^2 - 3x + 5 \\ 2x^2 - 3x + 5 = (x+1)^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 8 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow D = 25 - 16 \cdot 4 < 0 -$$ нет корней.

$\Rightarrow$ корней нет.

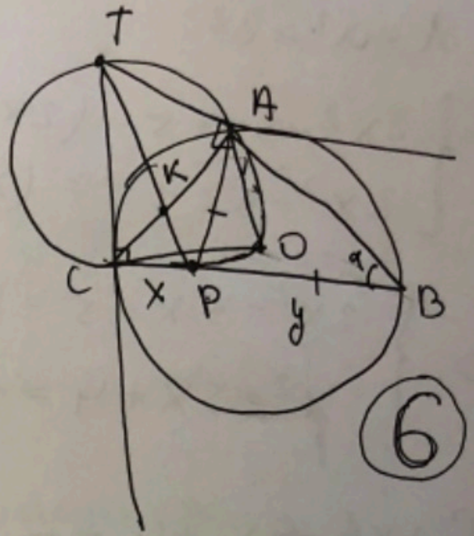
№6.

1) $S_{APK}=12$

$S_{CPK}=9$

S_{ABC} - ?

Чистовик.



Расст. 4-х-угольн. AOCT.
$\angle OAT$ и $\angle OCT$ - прямые,
т.к (CT) и (AT) - касат.
2 => 4-х угольн.
AOCT - вписанный =>
точка T лежит на окружн,
проходящ. через точки
3 A, O, C.

Обозначим угол $\widehat{ABC}=\alpha$, $CP=x$, $PB=y$

$\widehat{APC}=\widehat{AOC}$, т.к опир. на одну и туже дугу окружн, проходящ. через точки A, O, P, C, T.

$\widehat{AOC}=2\alpha$, т. к это центр. угол, опир. на одну и ту же дугу окружн. ω, что и $\angle\alpha$.

$\Rightarrow \widehat{APC}=2\alpha$

$\widehat{APB}=180^\circ-2\alpha$

$\widehat{PAB}=180^\circ-\alpha-\widehat{APB}=180^\circ-\alpha-(180-2\alpha)=\alpha$.

$\Rightarrow \triangle PAB$ - р/б; $AP=y=PB=y$.