Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102079**

ID профиля: **875064**

Вариант 21

Черновик $AB=4$; $AC=CB=5$; $AD=DB=6$ Черновик

$a_8 a_{10} > S+27$ $a_{11}a_{14} < S+60$ все возможные значения a_1

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$

$AB < AC < AD$, т.к. $AC = CB$ и $AD = DB$ то, $AB < CB < DB$. Рассмотрим все возможные тетраэдры $ABCD$, чтобы каждый такой тетраэдр вписать в цилиндр, по вершины касаются боковой поверхности цилиндра, и ребро CD должно быть параллельно оси цилиндра. Радиус цилиндра минимальный для тетраэдра. Допустим

Представим разные случаи расположения тетраэдра в цилиндре

В каждом случае расположения тетраэдра должны учитываться два фактора: все вершины находятся на боковой поверхности и CD должно было параллельно оси

При взятии в учет длины сторон могут различаться не равны что свойство что наш тетраэдр не [illegible]. Зависимость их от св-ва оси

В каждом случае нашу фигуру надо представить, в котором стоит опираясь на какие-то [illegible], [illegible]. Однако что все

Выбираем разные случаи [illegible] При учете всех факторов мы можем представить

Арифметическая [illegible], прогрессия-прогрессия с положительной разностью

Впишем тетраэдр в цилиндр, представим разные случаи.

$\min(x; y)$ — минимальное из двух чисел x и y

$a_8 a_1 \cdot 7 >$

$a_{11} a_{14} <$ } знаки разные могут исходить

M — фигура внутри

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

S_M ?

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le \min$

$\min(x; y)$

$8a-4b$

Черновик Черновик

Чистовик

1) Пусть a_n - возраст. последовательность, шаг которой $=d$. $d>0$ сумма первых $a_1+a_2+a_3 \ldots + a_7 = 7 \cdot \frac{a_1+a_7}{2}$. Тогда запишем усл. в форме системы уравнений.

$$\begin{cases} a_8 a_{17} > 7(a_1+3d)+27 \\ a_{11} a_{14} < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1-7(a_1+3d) > 27-7\cdot16\cdot d \\ a_1^2+23da_1-7(a_1+3d) < 60-10\cdot13d \end{cases}$$

Так как левая часть нерав. одинакова а знак отличается, то можем сложить эти неравенства.

$60-10\cdot13d > 27-7\cdot16d \Rightarrow 33 > 18d$ Таким образом, макс $d=1$, подставим его в систему, чтобы выразить a_1.

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1-7(a_1+3) > 27-7\cdot16 \\ a_1^2+23a_1-7(a_1+3) < 60-10\cdot13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ (a_1+8)^2<15 \end{cases}$$

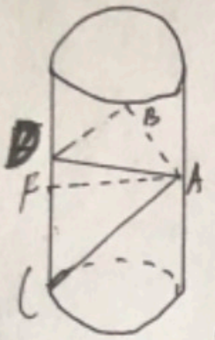
$$\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1+8 \in (-\sqrt{15};\sqrt{15}) \end{cases}$$

Поскольку все элементы последовательности целые, то $a_1+8 \in$
$\in [-11;-5]$

Ответ: $[-11;-5]$

Чистовик

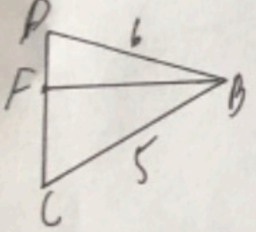
2)



Если CD парал-но оси цилиндра, тогда BA парал-но основанию цилиндра, иначе не было бы двух р/б Δов. Высоты треугольников ΔCAD и ΔCBD равно F, так как $\Delta CBD = \Delta CAD$; $BF = FA$.

Рассмотрим ΔBFA: BA - хорда окружности, таким образом минимальный радиус ≥ 2. Рассмотрим радиус$=2$, BA - диаметр $\Rightarrow AF = BF = 2\sqrt{2}$

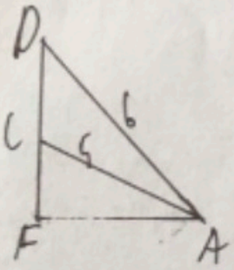
$DF = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$; $CF = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$, таким обр. $CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$.



Проверим, могут ли существовать такие Δки

$AD + AF > DF$

$AD + AC > CD$



$DC = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

Ответ: $CD = \sqrt{28} \pm \sqrt{17}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102079**

ID профиля: **875064**

Вариант 21

Черновик

Остроугольный треуг ABC.

ω – описанная окружность.

O – центр описанной окружности

$A, O, C \in \omega$

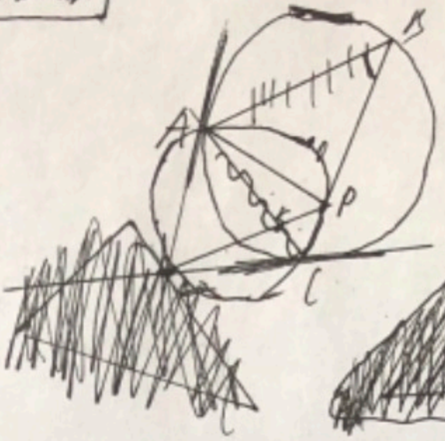
$\omega \cap BC = P$

$TP \cap AC = K$

$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

ω проходит через точки A, O, C.



$8-6+5$

$2x^2-3x+4\neq -4$

$x(2x-3)\neq -4$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$

$x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$2x^2-3x+5>0$ $\quad 2x^2-3x+5=0$ $\quad D=9-40=$

x принимает любые знач

$2x^2-3x+5\neq 1$

$2x^2-3x+4\neq 0$ $D<0$ нет корн

$2x-3\neq 0$

$x\neq\frac{3}{2}$

Представим

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$x\in(-1;0)\cup(0;+\infty)$

$x\neq 0$, $x\neq\frac{3}{2}$, $x\neq 2$

$0{,}5-0{,}75+5$

$4{,}75$

$2x^2-3x+4\neq 0$ $\quad D=9-32$

$\log_{x+1}(2x^2-3x$

НОД $=35=(a;b;c)\vdots 5$ и 7

комбинации 96 6

$\log_{\sqrt{2x-3}}$

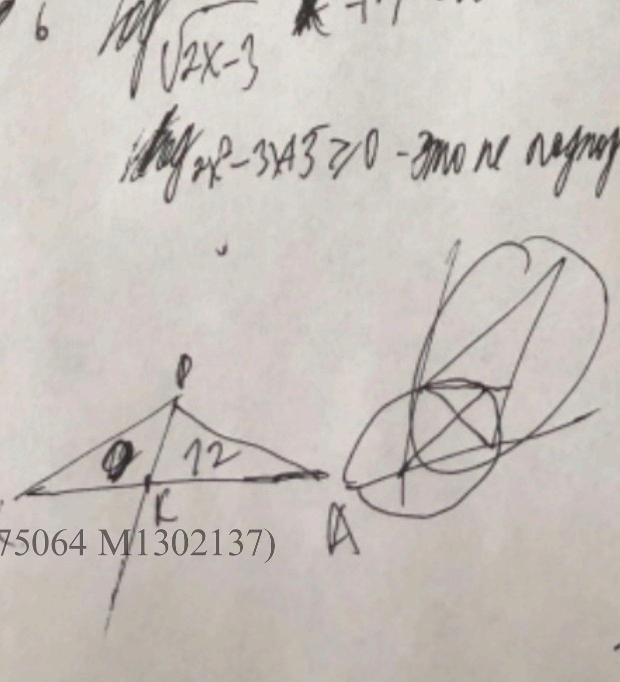
$x+1=1$

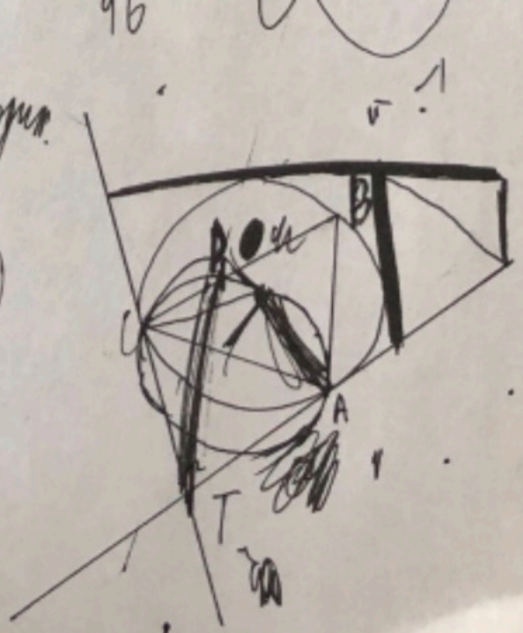
32

3

96

$\log_{2x^2-3x+5}\geq 0$ – это не подходит.





Чистовик

4) $a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2}$
$b = 5^{b_1} \cdot 7^{b_2}$
$c = 5^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

В таком случае ~~$\begin{cases} \max(a_1, b_1, c_1) = 18 \\ \max(a_2, b_2, c_2) = 16 \\ \min(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ \min(a_2, b_2, c_2) = 1 \end{cases}$~~

$$\begin{cases} \max(a_1, b_1, c_1) = 18 \\ \max(a_2, b_2, c_2) = 16 \\ \min(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ \min(a_2, b_2, c_2) = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим a_1, b_1, c_1 их значения различны, в таком случае рассчитаем кол-во возможных вариантов:

одно число = 1
второе = 18
~~третье число лежит в промежутке~~ [illegible] третье лежит в промежутке от 2 до 17.

кол-во вариантов $= 2 \cdot 3 \cdot 16 = 96$, если среди (a_1, b_1, c_1) существуют повт. значения, то два числа равны 1, третье равно $= 18$. Возможна ситуация наоборот: $2 \cdot 3$ (кол-во вариантов 6). Итого кол-во комбинаций $(a_1, b_1, c_1) = (2 \cdot 3 \cdot 16) + 2 \cdot 3$, также можно посчитать для $(a_2, b_2, c_2) = ((2 \cdot 3 \cdot 14) + 2 \cdot 3)$.
Перемножаем и получаем: $6^2 \cdot 17 \cdot 15 = 9180$

Ответ: 9180

$\boxed{\text{Чистовик}}$

б) $\angle ABC = \beta \Rightarrow \angle AOC = 2\beta \Rightarrow \angle CAT = \angle ACT = \beta \Rightarrow \angle COA + \angle CTA = \pi$

Таким образом точка T располож. на окружности, которая описана около APC. $\angle CPA = \angle COA = 2\beta$ и $\angle TPC = \beta$. PK - бис-са $\angle TPC$, $\angle PAB = \angle CPA - \angle CBA =$
$= \beta = \angle CBA \Rightarrow \triangle APB$ р/б. $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow S_{ABC} =$

$S_{APB} + S_{APC} = S_{APC} \cdot \left(1 + \frac{AP}{PC}\right) = \frac{S_{KPA}}{}$