Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101940**

ID профиля: **175283**

Вариант 21

Чистовик
Вариант 21

№1 $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, где a_1 – первый член прогрессии, d – разность

$a_1, d \in \mathbb{Z}$, $d>0$, поскольку прогрессия возрастающая и разность между двумя целыми числами – целое число.

$$S = \frac{(a_1+a_7)\cdot 7}{2} = \frac{7\cdot(a_1+a_1+6d)}{2} = 7a_1+21d$$

$$a_8 \cdot a_{17} > S+27$$

$$a_{11}\cdot a_{14} < S+60$$

$$a_8\cdot a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2 + 23a_1d + 112d^2$$

$$a_{11}\cdot a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2 + 23a_1d + 130d^2$$

$$a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27$$

$$7a_1+21d+60 > a_1^2+23a_1d+130d^2$$

Значит

$$a_1^2+23a_1d+112d^2+7a_1+21d+60 > 7a_1+21d+27+a_1^2+23a_1d+130d^2$$

$$33 > 18d^2$$

$d^2 < 1\frac{15}{18}$, поскольку $d\in\mathbb{Z}$ и $d>0$ $d<\sqrt{1\frac{15}{18}}$, $d=1$, так как

$$1 < \sqrt{1\frac{15}{18}} < 2$$

$d=1$, теперь

$a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+48$ $\qquad$ $7a_1+21+60 > a_1^2+23a_1+130$

$a_1^2+16a_1+64>0$ $\qquad$ $a_1^2+16a_1+49<0$

$(a_1+8)^2>0$ $\qquad$ $a_1 \in \left(\frac{-16-\sqrt{60}}{2}; \frac{-16+\sqrt{60}}{2}\right)$

$a_1 \neq -8$ $\qquad$ т.к. $a\in\mathbb{Z}$, $7<\sqrt{60}<8$

$$a_1 \in (-12; -4)$$

Чистовик

Вариант 21

$a_1 = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

Проверка:

a_1	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
S	-63	-56	-49	-42	-35	-28	-21	-14	-7
$a_8 a_{17}$	-20	-20	-18	-14	-8	0	10	22	36
$a_{11} a_{14}$	-2	-2	0	4	10	18	28	40	54
	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	X

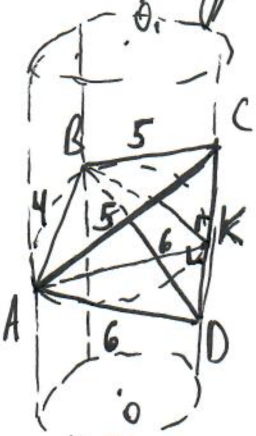
Ответ: a_1 может принимать значения: -11; -10; -9; -7; -6; -5;

Чистовик

Вариант 21

№ 2

Тетраэдр будет выглядеть приблизительно следующим образом:



Заметим, что $\triangle BCA$ и BDA – р/б

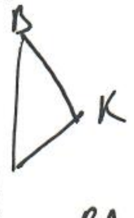
Также обратим внимание на то, что т.к. $CD \parallel OO_1$ (OO_1 – ось цилиндра) и точки C и D принадлежат цилиндру, то $CD \in$ цилиндру.

При этом радиус цилиндра будет являться радиусом описанной окружности $\triangle BKA$, поскольку точки $B, K, A \in$ цилиндру и лежат в плоскости $\parallel$ плоскости основания, потому что $BK \perp KC$, $AK \perp KC$, $KC \perp$ плоскости основания цилиндра.

Пусть $CK = x$, $KD = y$, тогда $BK = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{36 - y^2}$ (по Th Пифагора)

$AK = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{36 - y^2}$ $\triangle BKA$ – р/б.

Посмотрим на сам $\triangle BKA$



Радиус описанной около него окружности, ~~а значит и радиус цилиндра будет наименьшим если BK и AK будут наименьшими~~.

не может быть меньше чем $\frac{BA}{2}$, значит наименьший радиус – $\frac{BA}{2}$

Тогда $\triangle BKA$ – вписанный, BA – диаметр, $\angle BKA$ – прямой

$BK = \frac{BA}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{2}$ $25 - x^2 = 8$ $x = \sqrt{17}$

$\sqrt{36 - y^2} = 2\sqrt{2}$ $36 - y^2 = 8$ $y = 2\sqrt{7}$

$CD = CK + KD = x + y = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

$CD = DK - CK = y - x = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

3

Чистовик Вариант 21

Поэтому C и D могут быть как по одну сторону от K, так и по разные.

Ответ: $2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$ $(2\sqrt{7}-\sqrt{17}$ и $2\sqrt{7}+\sqrt{17})$

Чистовик Вариант 21

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

Разберёмся для начала со всеми возможными a и b.

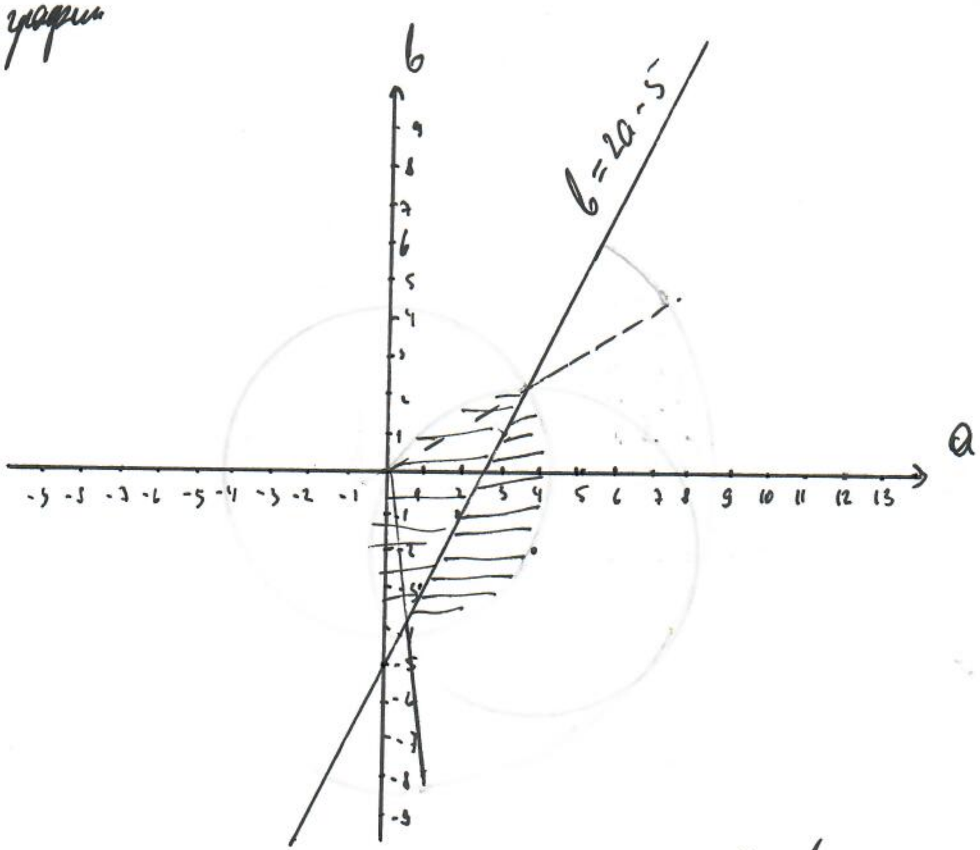
Если $8a-4b \le 20$ $b \ge 2a-5$, иначе $b \le 2a-5$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$ $a^2+b^2 \le 20$ – круг с $R=\sqrt{20}$, центр $(0;0)$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$ – круг с $R=\sqrt{20}$, центр $(4;-2)$

Построим график



▨ область – множество подходящих нам значений a и b. выше прямой, внутри круга и ниже прямой внутри другого.

Теперь заметим, что в координатах xOy $(x_и y)$ это будет множество подходящих кругов с центром в координатах a, b.

5

Чистовик Вариант 21

Тогда искомая фигура M будет состоять из двух половин, каждая из которых — круговой сегмент радиуса $2\sqrt{20}$ и двух частей, частей круга радиуса $\sqrt{20}$. Половина этой фигуры изображена на графике

$$S = 2\left(\frac{\pi\cdot 4\cdot 20 - \pi\cdot 20}{360}\cdot 2 + 2\cdot\frac{\pi\, 20\cdot\beta}{360}\right)$$

Попробуем успеть найти эти точки и углы

$a^2+b^2 = a^2-8a+16+b^2+4b+4$

$8a-4b=20 \quad b=2a-5$

$4a^2-20a+25+a^2=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0$

$\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} = 2\pm\sqrt{3}$ $\qquad (2+\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}-1)$ и $(2-\sqrt{3};\ -1-2\sqrt{3})$

$b = 2\sqrt{3}-1;\ -1-2\sqrt{3}$

$AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2} = \sqrt{12+48} = \sqrt{60}$

6

Черновик

№1 $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$

$a_8 a_{17} > S + 27$

$a_{11} a_{14} < S + 60$

$a_1 - ?$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = \frac{(a_1 + a_7) 7}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 6d) 7}{2} = 7a_1 + 21d$

$a_8 a_{17} = (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2$

$a_{11} a_{14} = (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) = a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$7a_1 + 21d + 60 > a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 + 7a_1 + 21d + 60 > a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 + 7a_1 + 21d + 27$

$33 > 18d^2$

$1\frac{15}{18} > d^2$, поскольку $d > 0$ (прогрессия возрастающая) и $d \in Z$, поскольку каждый член прогрессии – целое число, а значит и разность между ними всегде целое число, то $d = 1$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1 + 8)^2 > 0$

$a_1 \neq -8$

$7a_1 + 81 > a_1^2 + 23a_1 + 130$

$\frac{-16 \pm \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2}$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$a \in \left(\frac{-16 - \sqrt{60}}{2}; \frac{-16 + \sqrt{60}}{2}\right)$

$7 < \sqrt{60} < 8$

$a \in (-12; -4)$

-4 5 -1 1 10

-3 6 2 11

-2 7

$a_1 =$	S	$a_8 a_{17}$	$a_{11} a_{14}$
-11	-56	-20	-2
-10	-49	-18	0
-9	-42	-14?	4
-7	-28	0	18
-6	-21	10	28
-5	-14	22	40

Черновик

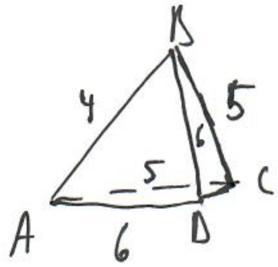
№2 $AB=4$

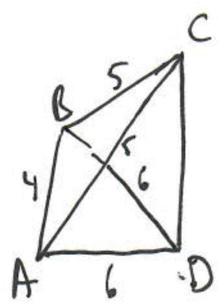
$AC=CB=5$

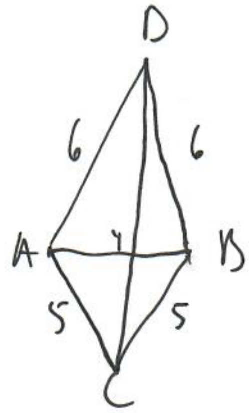
$AD=DB=6$

$CD \parallel OO_1$

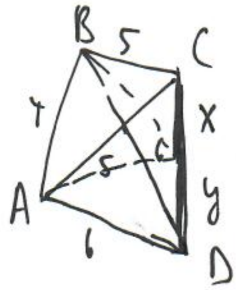
$CD-?$



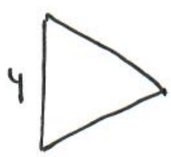




$\sqrt{36-4}=\sqrt{32}$



2



$\sqrt{25-x^2}$

$\sqrt{36-y^2}$ Отлично.
Он же вырожден.

$x=5$ $x+y=11$

$y=6$ $y-x=1$

№3 Черновик

$a^2+b^2 \le 8a$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

$a=1$
$b=1$ ✓

$1+1 \le \min(4, 20)$

$16+4$

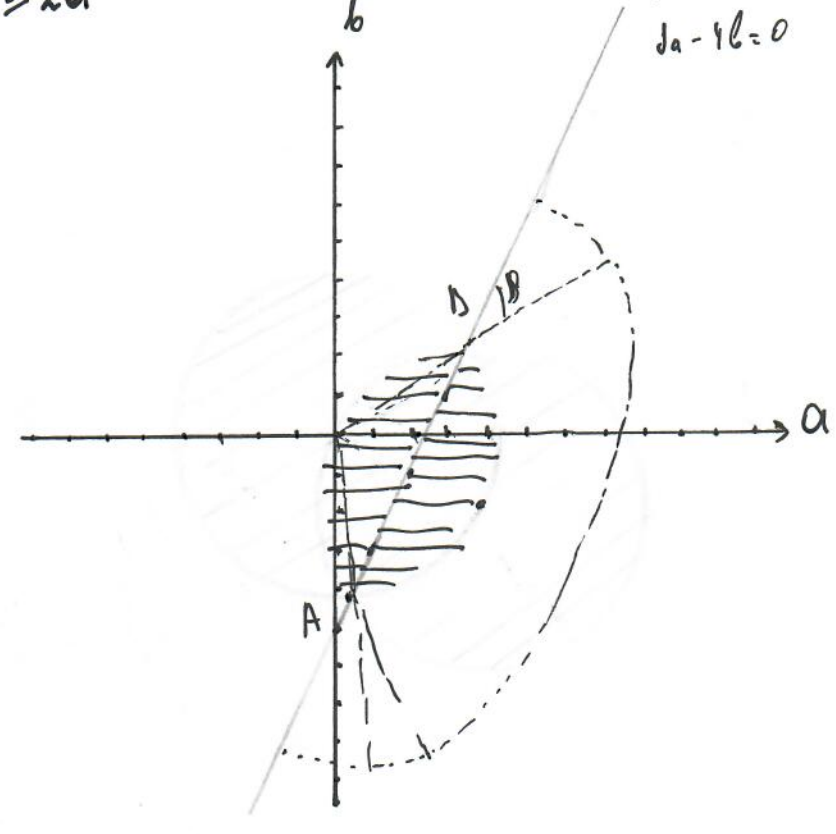
$4 \quad 2$

~~$a^2+b^2 \le 20$~~

~~$a=1 \quad b=2$~~

~~$b \ge 2a$~~

$8a-4b=20$
$8a-4b=0$



$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

$8a-4b \le 20$

$2a-b \le 5$

$b \ge 2a-5$

$a^2+b^2 \le 20 \leftarrow 8a-4b \ge 20$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101940**

ID профиля: **175283**

Вариант 21

Чистовик

Вариант 21

№ 4 a, b, c

$НОД(a; b; c) = 35$ – Во всех трёх есть как минимум $5 \cdot 7$

$НОК(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$ – Во всех трёх нет ничего кроме $5^{k} \cdot 7^{l}$, при этом

~~$НОД(a, b, c) \cdot НОК(a, b, c) = 5^{19} \cdot 7^{17}$~~

$k_{max} = 18 \quad l_{max} = 16.$

В каждом есть минимум 1 5 и 7, но их не может быть больше чем у трёх, итого

мы имеем

$5; 5^{18}; 5^{n} \quad n \in [1; 18]$

$7; 7^{16}; 7^{m} \quad m \in [1; 16] \quad n, m \in N$

Итого у нас вариантов

Для min $18 \cdot 16$, переставим 5 и 7 $(3!)^2$

$18 \cdot 16 \cdot (3!)^2 - 2(18 + 16 - 1)(3!)^2$

$n = 1 \quad m = 1 \quad n = 1 \quad m = 1$

это случаи когда $n = 18$ или $m = 16$ или $n = 18, m = 16$ и мы посчитали

дважды $5^{18}; 5^{18}$; 1 и так подобное, что $18 + 16$ случаев -1, т.к. что

так мы дважды вычитаем случай, когда $n = 18, m = 16$.

$18 \cdot 16 \cdot (3!)^2 - 2(18 + 16 - 1) \cdot (3!)^2 = 36 \cdot (288 - 66) = 36 \cdot 222 = \cancel{9180}\ 7992$

$(\cancel{18 \cdot 510 = 9 \cdot 1020})\ 888 \cdot 9 = 7992$

Ответ: ~~9180~~ 7992 вариантов

1

Чистовик

Вариант 21

№5

Заметим, что $x > 1{,}5$ и $x \neq 2$ — условие существования log-ов.

$x+1 > \sqrt{2x-3}$, $2x^2-3x+5 > x+1$

А вот $2x^2-3x+5 \vee 4x^2-12x+9$

$$2x^2-9x+4 \vee 0$$

$$(x-0{,}5)(x-4) \vee 0$$

То есть, если $x \in [0{,}5; 4]$, то ≤ 0, иначе ≥ 0

Так вот: при $x \in [0{,}5; 4]$, точнее $x \in (1{,}5; 2) \cup (2; 4]$

Очевидно, что

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1 = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$$

Потому что первый log в этой тройке тогда ≤ 1, а два других ≥ 1.

$x = 4$

$\log_{25} 25 + 1 = \log_{\sqrt{5}} 5 = \log_5 25 = 2$, верно.

$f_3(x)' = 0$ нет решений.

На этом промежутке $\left(\dfrac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x+1)}\right)' = \dfrac{\dfrac{\ln(x+1)}{2x^2-3x+5} - \dfrac{\ln(2x^2-3x+5)}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$ $\quad f_3(x)' < 0$

$$\left(\frac{2\ln(x+1)}{\ln(2x-3)}\right)' = 2\,\frac{\dfrac{\ln(2x-3)}{x+1} - \dfrac{\ln(x+1)}{2x-3}}{\ln^2(2x-3)}$$

$f_2(x)' = 0$ $\quad f_2(x)' > 0$

$x = 4$

Значит max 1 пересечение и мы его нашли.

Значит дальше пересечений тоже не будет.

В общем, корень здесь всего один и это он, $x = 4$

Ответ: $x = 4$.

При прочих условиях, всего три варианта:

$1 = 2 = 3(+1)$

$1 = 3 = 2(+1)$

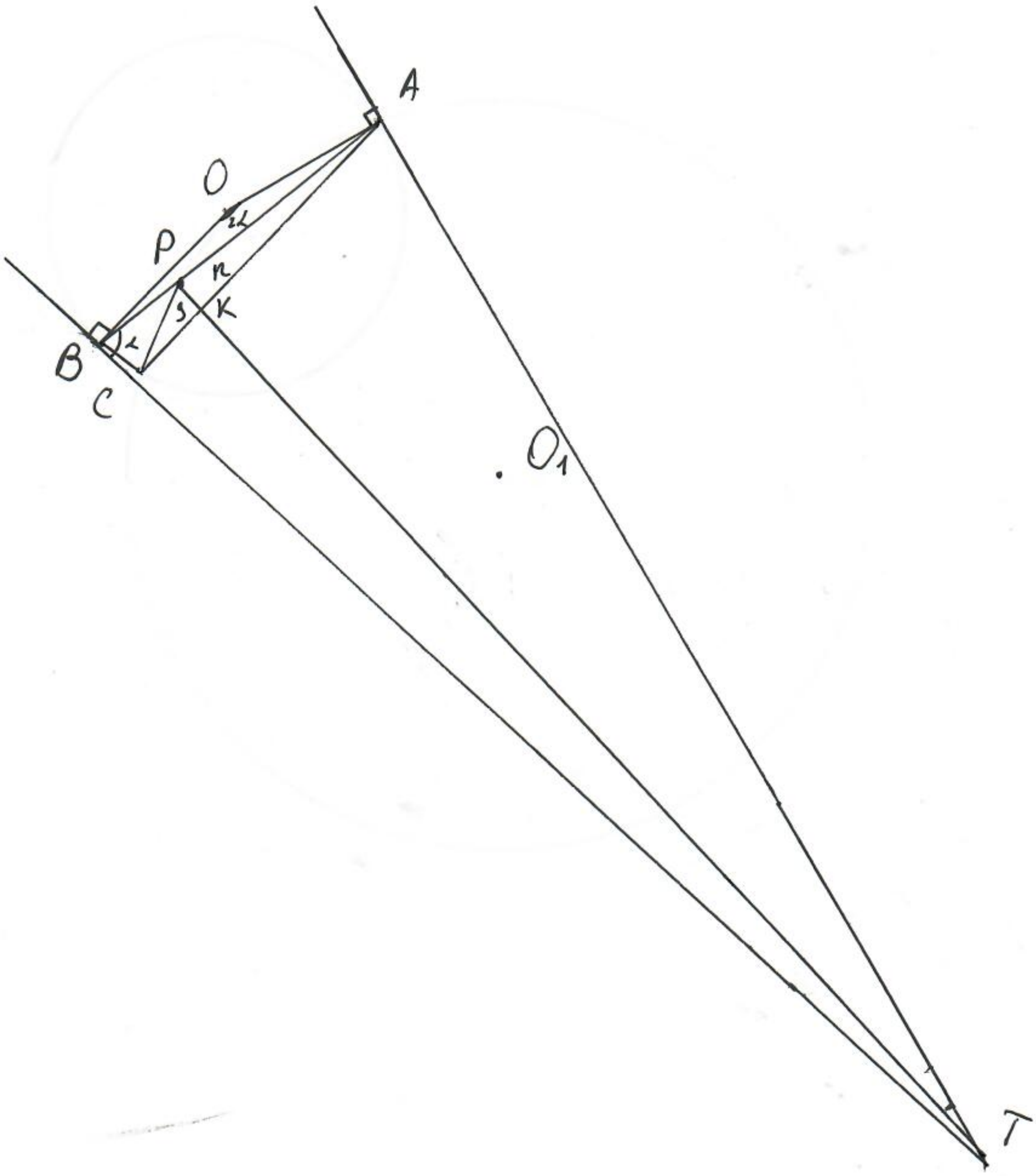
$2 = 3 = 1(+1)$

2

и все они не работают, поскольку...

и $f_1(x)'$ будет < 0 и они как-то строго упорядочены

Чистовик
Вариант 21



$x+1 \vee \sqrt{2x+3}$

$x^2+2x+1 \vee 2x-3$

$x^2+4 \vee 0$

$x+1 > \sqrt{2x+3}$

$2x^2-3x+5 \vee x+1$

$2x^2-4x+4 \vee 0$

$x^2-2x+2 \vee 0$

$(x-1)^2+1>0$

$2x^2-3x+5 > x+1$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+3)} = \frac{\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)} = \frac{\ln((2x^2-3x+5)(x+1))}{2\ln(x+1)}$$

$$\frac{\ln((x+1)(2x-3))}{\ln(2x-3)} = \frac{\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)} = \frac{\ln(2x-3x+5)}{2\ln(x+1)}$$

$x \neq 2$ $\quad 2x^2-3x+5 \vee (2x-3)^2$

log $\quad$ при $x \in [0{,}5; 4]$

$\geq$

иначе

$\leq$ $\quad 5^{25}$

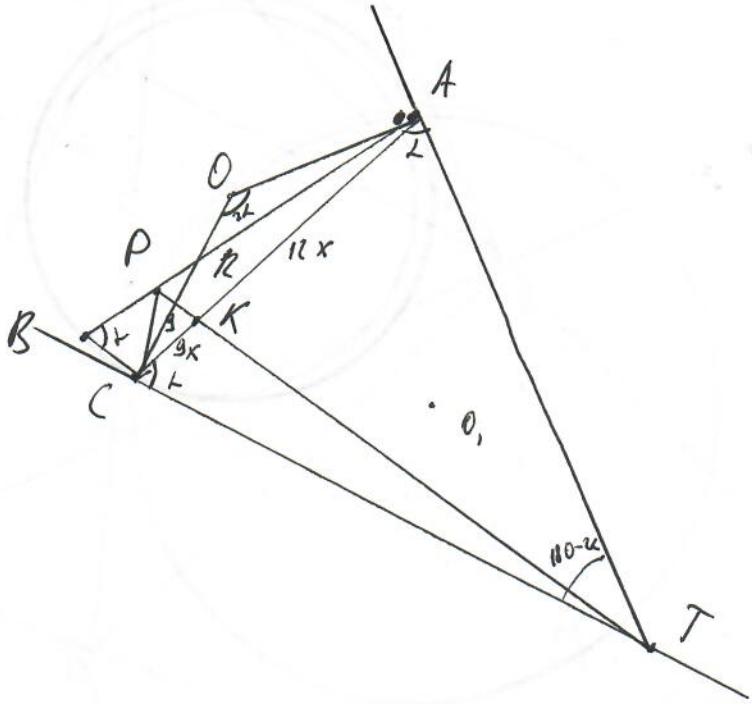
$x \in [1{,}5; 4]$, $x \neq 2$

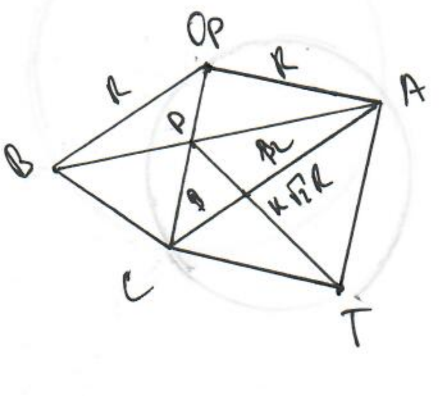
$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1 = \log_{\sqrt{2x+3}}(x+1) = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$$

$x = 4$

$$(\log_{25}25)+1 = \log_{\sqrt{5}}5 = \log_5 25 = 2$$

чернетка





Черновик

№ 4

a, b, c

$НОД(a;b;c) = 35$ – Наибольший общий делитель

$НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$ – Наименьшее общее кратное

$НОК(a;b;c) = \dfrac{abc}{НОД(a;b;c)} = 5^{17} \cdot 7^{15}$

Значит множители в составе чисел a, b и c – только 1, 5, 7.

$НОД(a;b;c) = 35$

В каждом есть $5 \cdot 7$, но нет трех 5^a и 7^b, $a>1$, $b>1$

Max степень 5 то – 18 Max степень 7 – 16

$5^{18}, 5 \; 5^{1-18} \; (5^n)$

$7^{16}, 7 \; 7^{1-16} \; (7^m)$

$18 \cdot 16 \cdot (3!)^2 = 18 \cdot 16 \cdot 36 - (18 + 16 - 1) \cdot 36$

Итого вариантов:

$5^{18}, 5, 5^n$

7^{16} и 7^{16}

5^{18} и 5^{18}

$17 \cdot 15 \cdot 36 + (18 + 16 - 1) \cdot 36$

$18 \cdot 16 - 17 \cdot 15 = 18 + 16 - 1$

$18 \cdot 15 + 18 - 17 \cdot 15 = 18 + 16 - 1$

$15 = 15$ ✓

$18 \cdot 16 \cdot (3!)^2 - (3!)^2 \cdot (18 + 16 - 1) = (3!)^2 \cdot (18 \cdot 16 - 33)$

$18 \cdot 510 =$

$= 9 \cdot 1020 = 9180$

$180 + 60 + 48 = 288$

$288 - 33 = 255$

255×36: 1530, 765, 9180.

36×33: 108, 108, 1188

$888 \times 9 = 7992$

222

$444 \cdot 18$

$888 \cdot 9$

Черновик

№5

$\log_{\sqrt{2x+3}}(x+1)$

$2x^2-3x+5=0$

$\cancel{\ldots}$ $D<0$

всегда >0.

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\cancel{(2x-3)(x+1)=}$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\cancel{2x+3}$

$2x-3=a$

$x=b$

$x+1 \vee \sqrt{2x+3}$

$x^2+2x+1 \vee 2x-3$

$x^2+4 \vee 0$

$x+1>\sqrt{2x+3}$

$2x^2\,3x+5$

Всего 3 варианта

$1=2 \quad 2=3 \quad 1=3$

$2\log_a(b+1)$

$2\log_{ab+5}(a)$

$\log_{b+1}(ab+5)$

$\log_{\sqrt{2x+3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+3)}=\frac{\ln(2x+3)}{\ln(2x^2-3x+5)}$

$2x^2-3x+5>0,\ \neq 1$

$2x-3>0 \quad \neq 1 \quad x>1{,}5$

$x+1>0 \quad \neq 1 \quad x\neq 2$

$x>-1$

$2x^2-3x+4\neq 0$

$2x^2-3x+5 \vee 2x-3$

$(2x-3)(x-1)+5 \vee 0$

$2x^2-3x+5>2x-3$

$2x^2-3x+5 \vee x+1$

$2x^2-4x+4 \vee 0$

$x^2-2x+2 \vee 0$

$\cancel{x(x-1{,}5)+2-0{,}5x \vee 0}$

$(x-1)^2+1>0$

$\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}$

$\frac{9\pm 7}{4}=4;\ 0{,}5$

$2x^2-3x+5 \vee (2x-3)^2$

$2x^2-3x+5 \vee \cancel{2x-3}\ 4x^2-12x+9$

$0 \vee 2x^2-9x+4$

$0 \vee (x-0{,}5)(x-4)$