Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101861**

ID профиля: **850075**

Вариант 21

Чистовик

Задание 1.

a_1 – 1-ый член прогрессии $\qquad S = 7a_1 + 21d$

d – разность

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_{17} = a_1 + 16d$ $\Rightarrow a_8 a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) =$

$= a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = a_1 + 13d$ $\Rightarrow a_{11} a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > S + 27$

$a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60$

$$d^2 > \frac{S+27-(a_1^2+23a_1 d)}{112}$$

$$d^2 < \frac{S+60-(a_1^2+23a_1 d)}{112}$$

$\Rightarrow a_{11} a_{14} - a_8 a_{17} < 33$

$18d^2 < 33 \Rightarrow d^2 = 1$

Т.к. прогрессия возрастает, то $\underline{d = 1}$

$a_8 \cdot a_{17} = a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + \overbrace{21+27}^{48}$

$a_{11}\ a_{14} = a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + \overbrace{60+21}^{81}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Rightarrow (a_1+8)^2 > 0 \quad ; D = 64 - 49 = 15$

$-8 - \sqrt{15} < a_1 < \sqrt{15} - 8 \Rightarrow$

$a_1 = -11$

$a_1 = -10$

$a_1 = -9$

$a_1 = -8$

$a_1 = -7$

$a_1 = -6$

$a_1 = -5$

Ответ: $-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5$

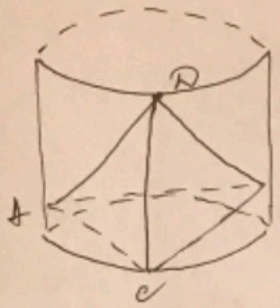
1

21101861 (U850075 M1299203)

Чистовик

Задание 2

I случай



$AB = 4$

$AC = CB = 5$

$AD = BD = 6$

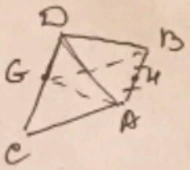
○ Допустим, C — ось цилиндра

симметрия

$$\left.\begin{matrix} \text{Т.к. } CD \parallel C \\ AC = CB \\ AD = DB \end{matrix}\right\} \triangle ACD = \triangle CBD \Rightarrow AB \perp CD$$

Также мы знаем, что нам нужен ~~[illegible]~~ цилиндр с $\min R \Rightarrow$ т.к. $AB \geq D$ (диаметр) $\Rightarrow$

$D_{min} = AB \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 2$



H — середина AB

т.к. AB — диаметр, то $AH = HB = \rho(H; CD) =$

$= HG = 2$

$AG = GB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

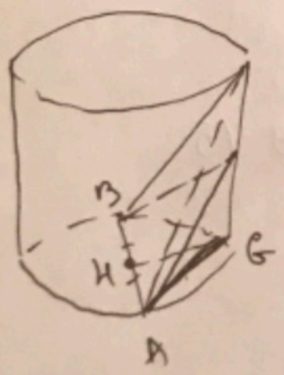
$CG = \sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$

$DG = \sqrt{AD^2 - AG^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28}$

$\Downarrow$

$CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

II случай



Аналогично AB — диаметр

$HG = 2 = \rho(H, CD) \Rightarrow AG = 2\sqrt{2}$

$CG = \sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{28}$

$DG = \sqrt{AD^2 - AG^2} = \sqrt{17}$

$\Downarrow$

$CD = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

2

Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{28}$; $\sqrt{28} - \sqrt{17}$

Чистовик

Задание 3

$$M: \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) & (2) \end{cases}$$

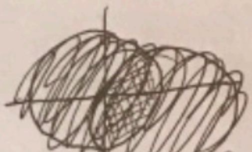
(1) => это круг с центром (a, b) и $R=\sqrt{20}$

=> Найдем все возможные $(a; b)$ из второго неравенства

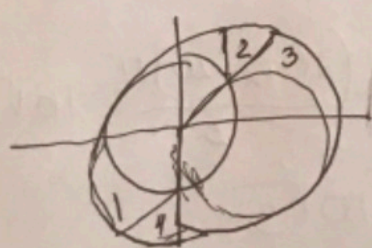
$$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-8a+16+b^2+4b+4-16-4 \le 0 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$



Фигура M получается „смешиванием" всех кругов с центром в указанной выше области. Найдем ее S



Разобьем на 4 части

1 = 3 в силу симметрии

2 = 4

⇓

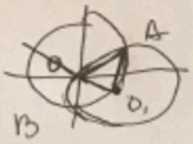
надо найти только S_1 и S_2

③

21101861 (U850075 M1299203)

Листовик

Задача 3 (продолжение)



$OO_1 = OA = O_1A = \sqrt{20} \Rightarrow$

$\triangle OO_1A$ – р/с $\Rightarrow \angle AOO_1 = 60^\circ$

Аналогично

$OB = O_1B = OO_1 = \sqrt{20} \Rightarrow \triangle OO_1B$ – р/с

1) ~~Фигура 1 – разность 2х секторов концентр. кругов радиус. $\sqrt{20}$ и $2\sqrt{20}$ с углом 120°~~

$\cancel{S_1 = \frac{1}{3}\left(\pi(2\sqrt{20})^2 - \pi(\sqrt{20})^2\right)} = \frac{1}{3}(4\cdot 20 - 20)\pi = \frac{60\pi}{3} = 20\pi$

2) ~~Фигура 2~~

S фигуры 1 $= \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{20}\cdot 2\right)^2 = \frac{20\cdot 4}{3}\pi$

S фигуры 2 – сектор круга

$\frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{1}{6}\pi\cdot 20 = \frac{20}{6}\pi$

S ромба $= \frac{2(\sqrt{20})^2\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}$

S итог: $\frac{20\cdot 4}{3}\pi\cdot 2 + \frac{20\pi}{6}\cdot 2 - 10\sqrt{3} = \frac{(80\cdot 2 + 20)\pi}{3} - 10\sqrt{3} =$

$= 60\pi - 10\sqrt{3}$

Ответ: $60\pi - 10\sqrt{3}$

4

Черновик

$\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 - S$ => $a_1 + a_7 : 2$

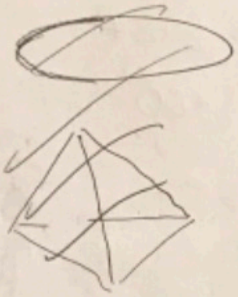
чёт; ч ч; нечёт неч

$a_8\, a_{17} > S+27$ – нечёт

$a_{11}\, a_{14} < S+60$

Если a_1 – ч, a_7 – ч

a_8 – нечёт; a_{17} – чёт



AB – диаметр

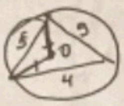
AH = HB

$\rho(H;B) = 2\sqrt{2}$

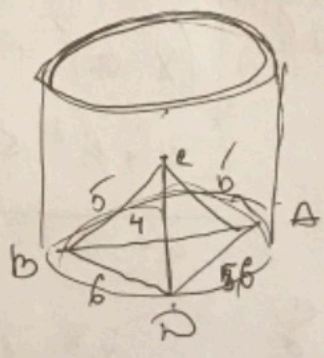
$CB = \sqrt{28}$

1) $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$



2)



$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20$

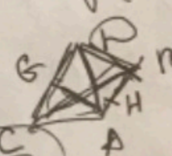
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \le 20$

$a^2 + b^2 \le 20 - x^2 + 2ax - y^2 + 2yb$

$a^2+b^2 \le \min(8a - 4b, 20)$

AH = HB

$\rho(H; CD) = HB = 2$

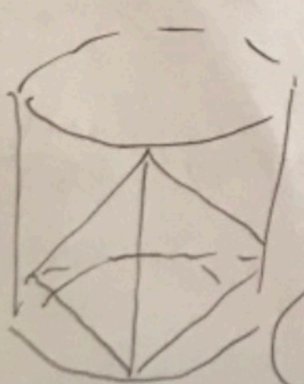


$AG = 2\sqrt{2}$

4

$D_{min} = AB$;

$R = 2$



$CG = \sqrt{17}$

$DG = \sqrt{28}$

$CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

Черновик

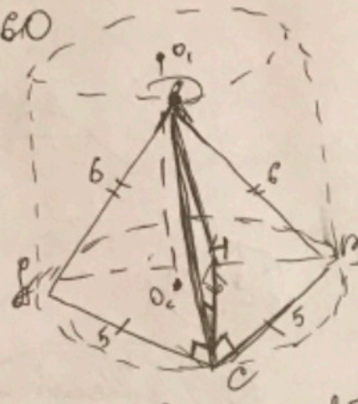
$\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 - S$ (сумма первых 7 членов) a_1 - ?

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

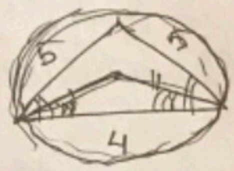
$a_{11} a_{14} < S+60$

O_1O_2 - ось цилиндра

$\triangle BCD = \triangle BCD$



$\frac{\begin{matrix}25\\ \times 36\end{matrix}}{61}$



M - фигура в декартовой плоскости $S_{\text{фигуры}}$ M - ?

состоит из (x, y)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20\\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

$\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 - S$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$a_{11}\cdot a_{14} < S+60$

0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5 5,5 6 6,5 7

7 8 11 14

7,5 8 8,5 9 9,5

17

0,1 0,2 0,3 0,4 0,5

$\frac{0,8}{2} = 0,4$

$\frac{0,5+3,5}{2}\cdot 7 = 14$

$\frac{\begin{matrix}5,5\\ \times 7\end{matrix}}{38,5}$

$\frac{0,1+0,7}{2}\cdot 7$

$\frac{\begin{matrix}0,4\\ \times 7\end{matrix}}{2,8}$

4

0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5

7 11 14 15

1,6 1,7 1,8

17

0,8 · 1,7

Черновик

$\times\begin{array}{r}16\\7\\\hline 112\end{array}$

a^2+

$a_8=a_1+7d$

$a_{17}=a_1+16d$

$a_{11}=a_1+10d$

$a_{14}=a_1+13d$

$a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d+$
a_1+5d+a_1+6d

$S=7a_1+21d$

$a_1^2+23a_1d+112d^2>S+27$

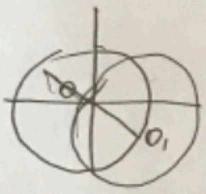
$a_1^2+23a_1d+130d^2<S+60$

$\Downarrow$

$\boxed{a_{11}a_{14}-a_8a_{17}<33}$

$18d^2<33$

$d^2=1;\ d=1$



№3

$(x-a)^2+(y-b)^2\leq 20$ – кр-г

$a^2+b^2\leq 8a-4b$

$a^2+b^2\leq 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2\leq 20$

$S_1=\frac{1}{3}(\pi(2\sqrt{20})^2-\pi(\sqrt{20})^2)=$
$=\frac{1}{3}(4\cdot 20-20)\pi=20\pi$

$\boxed{60\pi-10\sqrt{3}}$

$S_{фиг.1}=\frac{1}{3}\pi R^2=\frac{20\cdot 4}{3}\pi$

$S_{фиг\,2}=\frac{20}{6}\pi$

$S_{иск}=\frac{20\cdot 4}{3}\pi\cdot 2+\frac{20\pi}{6}\cdot 2-10\sqrt{3}$

21101861 (U850075 M1299203)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101861**

ID профиля: **850075**

Вариант 21

Чистовик

Задание 4

$НОД(a, b, c) = 35$

$НОК(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

1) Разделим числа на НОД => получим, что одно число не кратно 5, другое – 7 и это должны быть разные числа

=> числа имеют вид

$7^x \quad 7^y 5^a \quad 5^b$

$0 \le x, y \le 15$ $\qquad$ $0 \le a, b \le 17$

Далее либо x, либо $y = 15$; второе ≤ 15 $\qquad$ либо a, либо $b = 17$, второе < 17

всего способов выбрать

упорядочим 3-ку чисел

$2 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 6 = 6912$

выбрать 1 $\quad$ выбрать остав. из x и y $\quad$ аналогично для a и b

Посчитаем кол-во повторов:

все 3 совпасть не могут =>

могут совпасть 2

Рассмотрим 3 случая

1) $\overset{x}{1} \quad \overset{y}{5^{17} 7^{15}} \quad \overset{x}{1}$ => – 3 варианта

2) $\overset{x}{7^{15}} \quad \overset{x}{7^{15}} \quad \overset{y}{5^{17}}$ => – 3 варианта

3) $\overset{y}{7^{15}} \quad \overset{x}{5^{17}} \quad \overset{x}{5^{17}}$ => – 3 варианта

1

Т.е. всего: $6912 - 9 = 6903$

Ответ: 6903

Чистовик

Задание 5

Допустим,

$\log_{\sqrt{2x-1}}(x+1) = a$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = b$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = c$

ОДЗ:

$2x-3>0$

$2x-3\neq 1$

$2x^2-3x+5>0$

$2x^2-3x+5\neq 1$

$x+1>0$

$x+1\neq 1$

$$abc = \frac{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2}{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)} \cdot \frac{1}{\log_{x+1}(\sqrt{2x-3})} =$$

$$= 4$$

Т.к. 2 числа равны, а третье на 1 меньше, то:

$a \cdot a(a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

Первый корень данного уравнения мы угадали. $\to a = 2$.

$$\begin{array}{r|l} a^3 - a^2 - 4 & a-2 \\ \hline -\ a^3 - 2a^2 & a^2+a+2 \\ \hline a^2 - 4 & \\ -\ a^2 - 2a & \\ \hline -4+2a & \\ -\ 2a-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$a^3 - a^2 - 4 = (a-2)(a^2+a+2) = 0$

1) a^2+a+2

$D = 1-8 = -7 < 0 \Rightarrow$ корней нет

Σ

2). • $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2$

$x+1 = 2x-3 \Rightarrow -x = -4;\ x = 4$ – удовлетворяет ОДЗ

• $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2$

$(\underbrace{2x^2-3x+5}_{>0})^2 = (\underbrace{2x-3}_{>0})^2$ из ОДЗ $\Rightarrow$ $2x^2-3x+5 = 2x-3$

$2x^2-5x+8 = 0$

$D = 25-64 < 0$

Задание 5 (продолжение) Чистовик

$\cdot \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$(x+1)^2=2x^2-3x+5$

$x^2+2x+1=2x^2-3x+5$

$x^2-5x+4=0$

$D=25-16=9$

$\left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=1 \end{array}\right.$ – не удовлетворяет ОДЗ

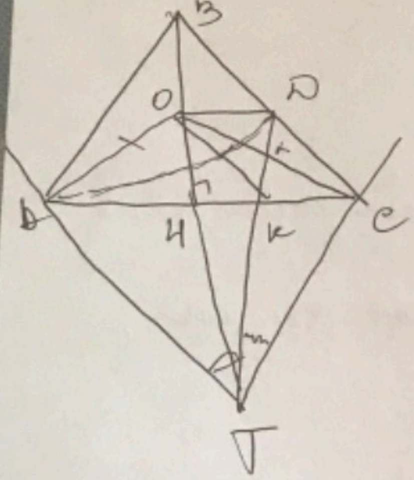
Ответ: 4

3

21101861 (U850075 M1299204)

Чистовик

Задание 6



$\angle OAT = \angle OCT = 90°$ (т.к. касат.)

$\Rightarrow$ OT – диаметр окр., описанной около $\triangle AOC$ $\Rightarrow$

$\angle OPT = 90°$

$AK \cdot KC = PK \cdot KT$ (пр-ие хорд)

и $\triangle AKT \sim \triangle PKC$

$\triangle APK \sim \triangle TKC$

OH – серединный перпендикуляр

$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$

Пусть $AK = 4x$; $AH = 3,5x$
$KC = 3x$

$HK = 0,5x$

4

Черновик

№4

Допустим (1) и (2) равны

Черновик

$2x-3=(2x^2-3x+5)^2$

$x+1=4x^2-12x+9$

$4x^2-13x+8=0$

$D=169-128$

$\frac{13\pm\sqrt{41}}{8}$

$16 \times 8 = 128$

$169-128=41$

1

$4x^2-12x+9=2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{81-32}=\sqrt{49}=7$

$x_1=\frac{9+7}{4}=4$

$x_2=0,5$

$2x^2-3x+5=x+1$

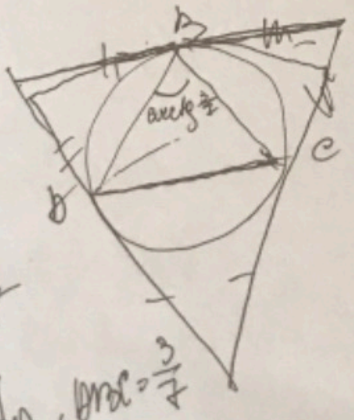
$0,25-1,5+5=1,5$

$S_{\triangle ABC}=$

$S_{\triangle ABK}=12$

$S_{\triangle CBK}=9$

2



$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{3}{7}$

AC ? $\operatorname{arctg}\angle ABC=\frac{3}{7}$

Черновик

№4

(a, b, c)

$НОД(a;b;c) = 35$

$НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

№15

$2x-3 \geq 0$

$x \geq \frac{3}{2}$

$x - ?$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ (1)

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ (2)

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$ (3)

среди (1); (2) и (3) два из них равны, а какое-то третье меньше на 1

$x \geq \frac{3}{2}$

$\boxed{x \geq 2}$

49 64 81

$x=6$

$x+1 \neq 1$

$2x-3 \neq 1$

$2x^2-3x+5 \geq 0$

$2x^2-3x+5 \neq 1$

$\sqrt{2x-5} - Z$

5 15

14

$\log_9 7$

$14 \times 3 = 42$

$x \geq 2$

$a: 5^{18} \cdot 7^{16}$

$14 \times 14 = 56 + 14 = 196$

$196 - 37 = 159$

189 625

6/14/26/42

Допустим (1) и (3) равны =>

$-2x^2 - 8 = 0 \quad (\cdot 2)$

$-2x^2 + 4x - 4 = 0$

$2x - 3 = (x+1)^2$

$(x+1) = (2x^2-3x+5)$

$2x - 3 - x^2 - 2x - 1 = 0$

$x + 1 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$

$-8 - 4x + 4 = 0$

$-4x - 4 = 0$

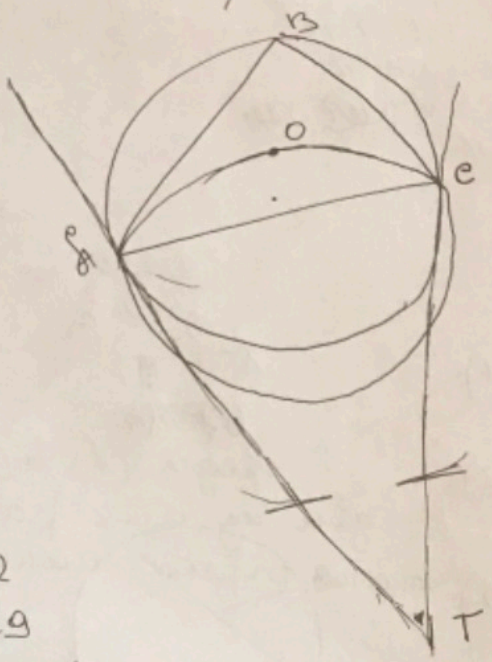
$x = -1$

$1 \quad 5^{12} 7^{15} \quad 1$

$7^{15} \quad 5^{12} \quad 5^{12}$

21101861 (U850075 M1299204)

Черновик



$(2x-3)^2$

$\frac{\log_2 4}{\log_2 8}$

$\log_{24}$

$S_{\triangle APK} = 12$

$\triangle\ S_{\triangle BPK} = 9$

$НОД(a, b, c) = 35$

$НОК(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 1$$

$2\cancel{\log}$

$$2\log_{2x-3}(x+1) - \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 1$$

Черновик

Задание 25

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = a$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = b$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = c$

ОДЗ: $2x-3>0$

$2x-3 \neq 1$

$2x^2-3x+5>0$

$2x^2-3x+5 \neq 0$

$x+1>0$

$x+1 \neq 1$

$$abc = \frac{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2}{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)} \cdot \frac{1}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}}$$

4

$\boxed{abc = 4} \Rightarrow$

$a \cdot a \cdot (a-1) = 4$

$a^2(a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$a = 2$

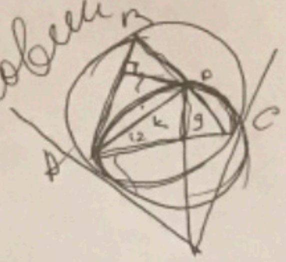
$\Updownarrow$

$(a^2+a+2)(a-2) = 0$

$x \in R$

$$\begin{array}{l|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \hline -\;a^3-2a^2 & a^2+a+2 \\ \quad a^2-4 & \\ -\;a^2-2a & \\ \quad -4+2a & \\ -\;2a-4 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Чернобыль



$S_o APK = 12$

$S_o CPK = 8$

$S_o ABC = S_o ABP + \underbrace{S_o APK + S_o KPC}_{21}$

НОД $(a, b, c) = 35$

НОК $(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$AK \cdot KC = PK \cdot KT$

ОК - серед. пер.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 6 \\ \hline 192 \\ \times\ 36 \\ \hline 1152 \\ 576 \\ \hline 5\ldots2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 192 \\ \times\ 36 \\ \hline 1152 \\ 576 \\ \hline 6912 \end{array}$$

$7^x \quad 7^y 5^a \quad 5^b$

$0 \le x, y \le 15 \qquad 0 \le a, b \le 17$

$2 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 6$

$6912 - 9 = 6903$

x y x
1 $5^{12} 7^{15}$ 1

x x y
7^{15} 7^{15} 5^{17}

y x x
7^{15} 5^{12} 5^{12}