Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101850**

ID профиля: **863816**

Вариант 21

Чистовик ①

№1

$$a_8 a_{17} > S + 27$$
$$a_{11} a_{14} < S + 60$$

$$S = \frac{2a_1 + d \cdot 6}{2} \cdot 7$$

$$(a_{11} - 3d)(a_{14} + 3d) > S + 27$$

$$\underbrace{a_{11} a_{14}}_{\overset{\wedge}{S+60}} + 3d(a_{11} - a_{14}) - 9d^2 > S + 27$$

$$3d(a_{11} - a_{14} - 3d) > -33$$

$$3d(a_1 + 10d - a_1 - 13d - 3d) > -33$$

$$6d^2 < 11 \Rightarrow d < \sqrt{\tfrac{11}{6}},$$

т.к. $d \in$ целым числам и прогр. возр. то $d = 1$

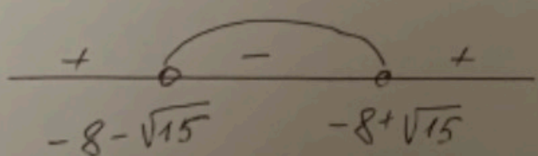
$$d = 1: \quad (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7(a_1 + 3) + 60$$

$$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$$

$$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \qquad D/4 = 8^2 - 49 = 64 - 49 = 15$$

$$-8 \pm \sqrt{15}$$

$$(a_1 - (-8 + \sqrt{15}))(a_1 - (-8 - \sqrt{15})) < 0$$

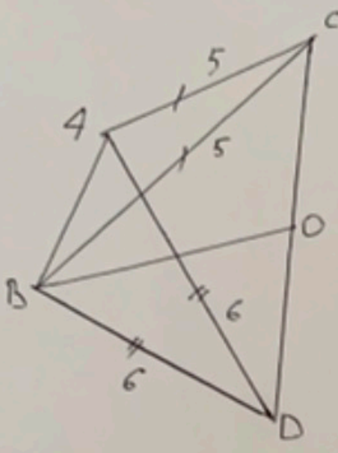


$$-8 - \sqrt{15} < -11$$
$$-8 + \sqrt{15} > -5$$

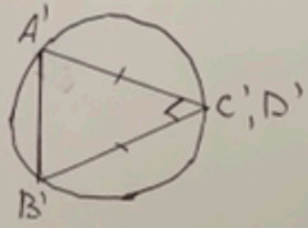
Ответ: $a \in \{-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5\}$

Чистовик (2)

№2



Спроецируем ортогонально (вдоль оси цилиндра) все точки на плоскость основания цилиндра, получим:



Т.к. проецируем вдоль оси цилиндра => C' и D' совпадут при проекции

т.к. $\exists$ симметрия относительно плоскости α делящей AB пополам и перпендикулярной AB => ($AB=DB$; $BD=AD$; $CD \in \alpha$) => $AB \perp CD$ => при проекции $AB=A'B'$; радиус цилиндра перейдёт в себя.

Радиус минимален, когда $A'B'$ - диаметр => $B'C'=A'C'=2\sqrt{2}$ ($A'B'C'$ прямоугольный равнобедренный треугольник)

Опустим перпендикуляр из B на CD (т. O)

$BO=AO$ (симметрия) $BO=B'C'=2\sqrt{2}$

$CO=\sqrt{|BC|^2-|BO|^2}=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$

$OD=\sqrt{|BD|^2-|BO|^2}=\sqrt{36-8}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

Ответ: $CD=\sqrt{17}\pm 2\sqrt{7}$ т.к. O может попасть на продолжение отрезка CD

21101850 (U863816 M1300985)

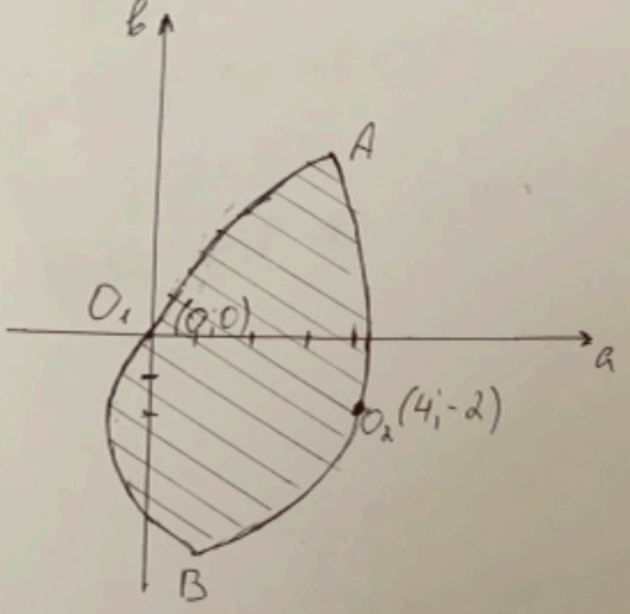
Чистовик ③

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 & (*) \end{cases}$$

$$a^2+b^2 \le 8a-4b \Rightarrow a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20 \Rightarrow$$
$$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$$

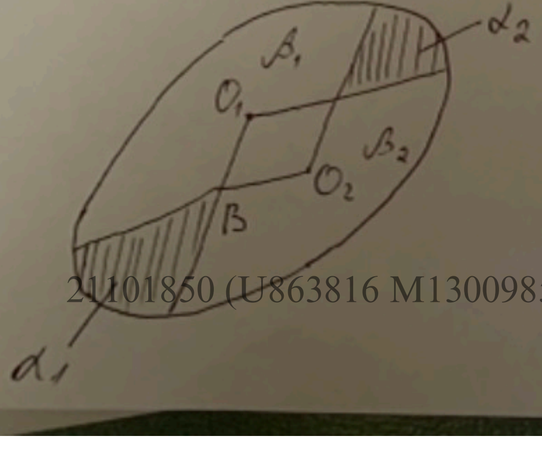
Нарисуем область (*):



Чтобы уравнение (1) имело решение нужно, чтобы расстояние от $(x; y) \in M$ до области (*) было меньше 20

т.е. если „раздуть" (для каждой точки области нарисовать круг радиусом $\sqrt{20}$ и объединить все круги) то получим M

Схематично изобразим:



внешний контур - область M

внутренний контур - область (*)

Чистовик ④

α_1 – сектор с центром в т. A, $r=20$

α_2 – " – в т. B, $r=20$

β_1 – " – в т. O_2, $r=40$

β_2 – " – в т. O_1, $r=40$

$M = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \alpha_1 \cup \alpha_2$

$\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = 60$ ($O_1O_2 = O_1A = AO_2 = BO_1 = BO_2$)

$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi r^2 \cdot \frac{1}{6} = \pi 20^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{200}{3}\pi$

$\beta_1 = \beta_2 = \pi r^2 \cdot \frac{2}{6} = \pi 40^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1600}{3}\pi$

β_1 и β_2 пересекаются по BO_1AO_2 $\Rightarrow$ надо будет вычесть площадь этого ромба

$S_{BO_1AO_2} = 2\cdot(20)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 200\sqrt{3}$ – как 2 равностор. $\triangle$

$S_M = S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} + S_{\beta_1} + S_{\beta_2} - S_{BO_1AO_2} =$

$= \frac{400}{3}\pi + \frac{3200}{3}\pi - 200\sqrt{3} = \frac{3600}{3}\pi - 200\sqrt{3} = 1200\pi - 200\sqrt{3}$

Ответ: $1200\pi - 200\sqrt{3}$.

Черновик

№1

$a_1, a_2, a_3 \ldots$

$a_8 a_{12} > S + 27$

$a_{11} a_{14} < S + 60$

$a_1 - ?$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7(a_1 + 3) + 60$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

$S = \frac{2a_1 + d\,6}{2} 7$

$D/4 = 64 - 49 = 15$

$-8 \pm \sqrt{15}$

$(a_{11} - 3d)(a_{14} + 3d) > S + 27$

$\approx -8 - 4 < -11$

-12

$a_{11} a_{14} + 3d(a_{11} - a_{14}) - 9d > S + 27$

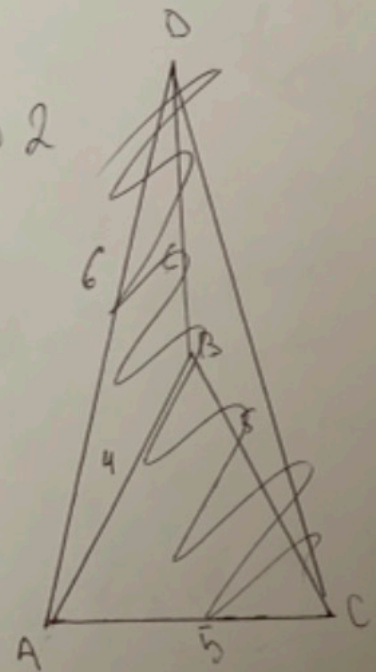
$\approx -8 + 4 \quad > -5$

$3d(a_{11} - a_{14} - 3d) > -33$

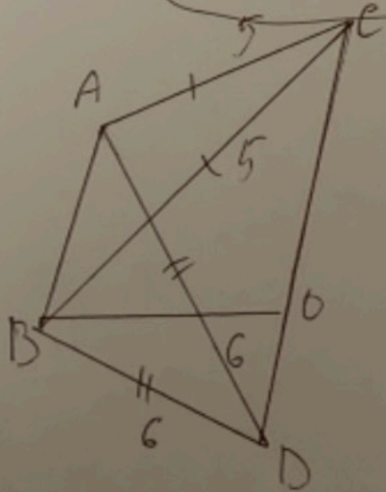
-4

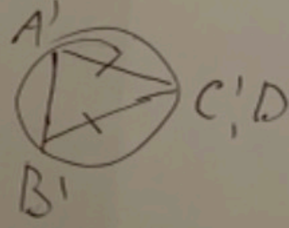
$3d(a_1 + 10d - a_1 - 13d - 3d)$

№2



$CD = CO + OD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$





$AB = DB,\ BD = AD$

$CD \in \alpha$

$AB \perp CD$

$AB = A'B'$

$B'C' = A'C' = 2\sqrt{2}$

$BO = AO = B'C' = 2\sqrt{2}$

$CO = \sqrt{|BC|^2 - |BO|^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$

$OD = \sqrt{|BD|^2 - |BO|^2} =$

$= \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Черновик

№3

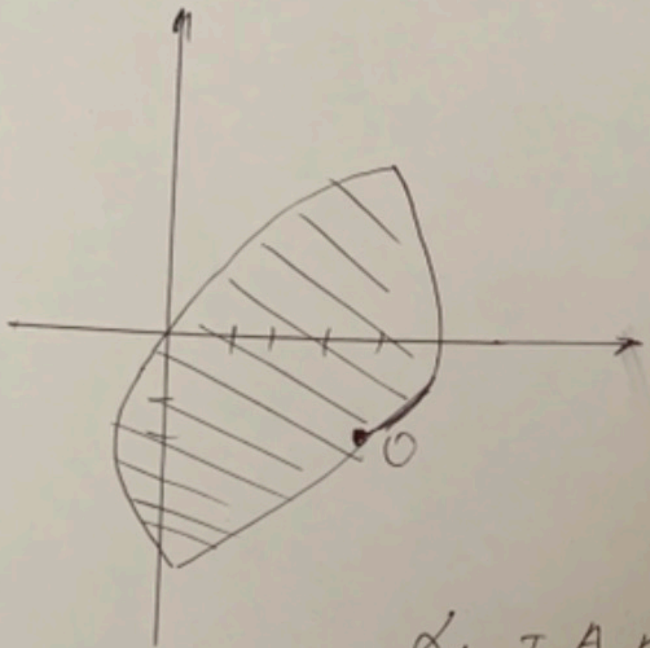
$\cancel{x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2\le 20}$

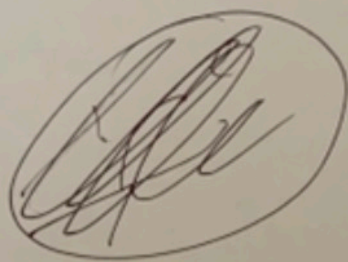
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

$a^2+b^2\le 8a-4b \Rightarrow a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$





α_1 т. A, $r=20$

α_2 т. B, $r=20$

β_1 т. O_2 $r=40$

β_2 т. O_1 $r=40$

α: $\pi r^2\cdot\frac{1}{6}=\pi\cdot 20^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{200}{3}\pi$

β: $\pi r^2\cdot\frac{2}{6}=\pi\cdot 40^2\cdot\frac{2}{6}=\frac{1600}{3}\pi$

$S_{BO_1AO_2}=2(20)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=200\sqrt{3}$

$S_m=\frac{400}{3}\pi+\frac{3200}{3}\pi-200\sqrt{3}=\frac{3600}{3}\pi-200\sqrt{3}$ //

$1200\pi-200\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101850**

ID профиля: **863816**

Вариант 21

Чистовик 1

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; в; c) = 35 \\ \text{НОК}(a; в; c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases} \quad (*)$$

НОК нацело делится только на 5; 7 =>

a; в; c – состоят только из 5; 7.

Сопоставим каждому числу пару $x_i; y_i$:

Пример: $a = 5^2 7^3 \Leftrightarrow x = 2;\ y = 3$

$a \leftrightarrow x_1; y_1$; $в \leftrightarrow x_2; y_2$; $c \leftrightarrow x_3; y_3$, тогда

$$(*): \begin{cases} \min(x_1; x_2; x_3) = 1 \\ \min(y_1; y_2; y_3) = 1 \\ \max(x_1; x_2; x_3) = 18 \\ \max(y_1; y_2; y_3) = 16 \end{cases}$$

Пусть $x_1 = 18$, $x_3 = 1$, тогда

x_2 – любое число от 1 до 18

для всех троек $(x_1; x_2; x_3)$ – $\overbrace{6 \cdot 16 + 3 \cdot 2}^{102}$

соотв. случаю $x_1 > x_2 > x_3$ — $x_1 > x_2 > x_3$ либо $x_1 = x_2 > x_3$

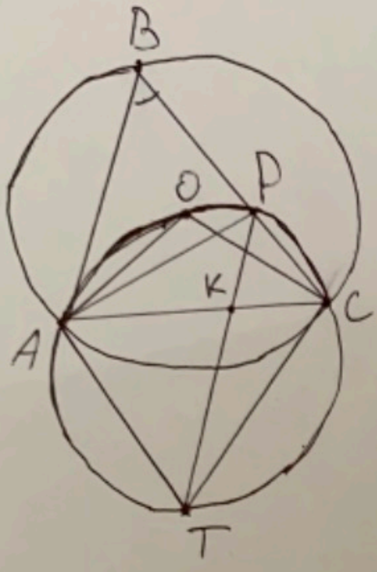
для всех троек $(y_1; y_2; y_3)$ – $\overbrace{6 \cdot 14 + 6}^{90}$ вариантов

$x; y$ – независимы => всего $102 \cdot 90 = 9180$ вариантов

Ответ: 9180 вариантов.

Чистовик 2

№6



т.к. $OC \perp CT$, $OA \perp AT$, то T лежит на окр., опис. вокруг AOC. Тогда $\angle TPC = \angle TAC = \angle ABC$ (посл. р-во, т.к. угол между касательной и хордой)

Значит $KP \parallel AB \Rightarrow \frac{CK}{AC} =$

$= \frac{S_{CKP}}{S_{APC}} = \frac{9}{12+9} = \frac{3}{7} \Rightarrow$

$S_{ABC} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 S_{CKP} = 49$

Чистовик 3

№5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$,

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

ОДЗ: $x > -1$
$x > \frac{3}{2}$

$\underbrace{\log_a b}_{x}$, $4\underbrace{\log_c a}_{y}$, $\underbrace{\log_b c}_{z}$

$xyz = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$

тогда, если t, t одинаков и
$t-1$ - 3е число

то $t^2(t-1)=4$
$t^3 - t^2 - 4 = 0$

	1	−1	0	−4
	1	1	2	0

$t=2$ $(t-2)(t-t+2)=0$

$\boxed{t=2}$

Черновик

4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 35 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 5^2 7^3$

$x = 2 \quad y = 3$

$a \; x_1 y_1 \quad b \; x_2 y_2 \quad c \; x_3 y_3$

$\min(x_1; x_2; x_3) = 1 \qquad (x_1 x_2 x_3) - 3 \cdot 16 + 3 \cdot 2$

$\min(y_1; y_2; y_3) = 1 \qquad (y_1 y_2 y_3) - 3 \cdot 18$

$\max(x_1; x_2; x_3) = 18$

$\max(y_1; y_2; y_3) = 16 \qquad 9324$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times \quad 9 \\ \hline 2916 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 102 \\ \times \quad 90 \\ \hline 9180 \end{array}$$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \qquad \log_{\sqrt{2x-3}}$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

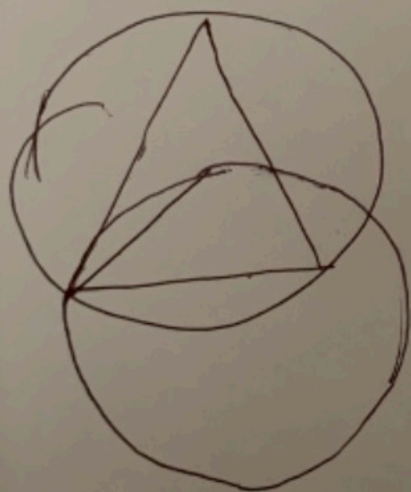
$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) + 1$

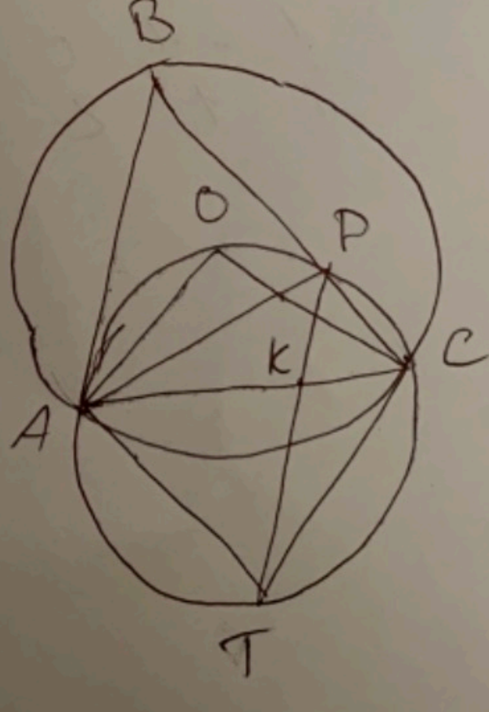
$t^2(t-1) = 4 \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

$t = 2$

21101850 (U863816 M1300986)




B
O
P
K
C
A
T