Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101721**

ID профиля: **845034**

Вариант 21

Чистовик (1)

1. Пусть d - шаг прогрессии.

Тогда $S = \frac{a_1 + (a_1+6d)}{2} \cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7$

$a_8 = a_1+7d, \quad a_{17} = a_1+16d,$

$a_{11} = a_1+10d, \quad a_{14} = a_1+13d$

Получаем систему

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > (a_1+3d)\cdot 7+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < (a_1+3d)\cdot 7+60 \end{cases}$$

Можно сложить неравенства:

$(a_1+7d)(a_1+16d) + (a_1+3d)\cdot 7+60 > (a_1+10d)(a_1+13d) + (a_1+3d)\cdot 7+27$

$(a_1+7d)(a_1+16d)+33 > (a_1+10d)(a_1+13d)$

$a_1^2+23a_1d+112d^2+33 > a_1^2+23a_1d+130d^2$

$18d^2 < 33$

Если прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow$ её шаг тоже должен быть целым числом. В нашем же случае получается, что $d^2 < \frac{33}{18} < 2 \Rightarrow$ единственное значение d - 1

Переписываем систему

$$\begin{cases} (a_1+7)(a_1+16) > (a_1+3)\cdot 7+27 & (1) \\ (a_1+10)(a_1+13) < (a_1+3)\cdot 7+60 & (2) \end{cases}$$

(1): $a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27$

$a_1^2+16a_1+64 > 0$

$(a_1+8)^2 > 0$

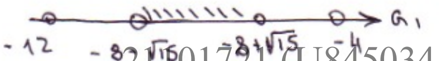
$a_1 \neq -8, \; a \in R$

(2): $a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+21+60$

$a_1^2+16a_1+49 < 0$

$D = 256-196 = 60$

$a_{1,2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2}$

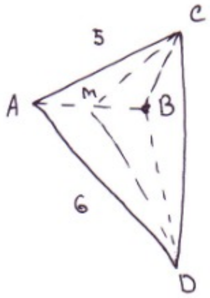


Отсюда следует, что $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

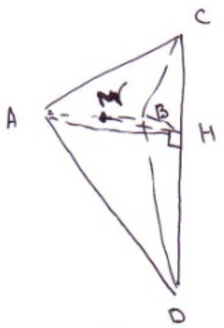
Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$

Чистовик (2)

2.

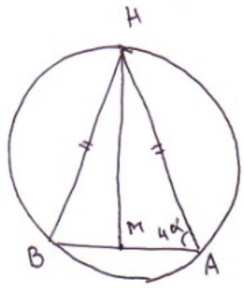


Для начала докажем, что $AB \perp CD$.
Для этого проведём плоскость CMD, где M - середина AB. CM - медиана и высота, т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow AB \perp MC$. Аналогично $AB \perp MD$. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. Тогда $AB \perp (CMD)$. Значит, она перпендикулярна также любой прямой лежащей в данной плоскости, т.е $AB \perp CD$. Значит, AB перпендикулярна оси цилиндра. Проведём высоту из точки M в точку H, лежащую на CD:



$\triangle ABH$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, т.к $CD \perp MH$, $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp (ABH)$
Радиус цилиндра равен радиусу описанной около $\triangle ABH$ окружности. Обозначим $AH = a$, $AM = 2$ по условию, $\angle BAH = \alpha$

$$2R = \frac{BH}{\sin\alpha} = \frac{a}{\left(\frac{HM}{a}\right)}.$$



Нужно заметить, что $\triangle ABH$ - равнобедренный, т.к является проекцией $\triangle ABC$ на плоскость, содержащую сторону основания AB. Тогда $BH = AH = a$

$$HM = \sqrt{a^2 - 2^2} = \sqrt{a^2 - 4},$$

тогда $R = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-4}}$. Чтобы узнать наименьшее значение, найдём производную по a:

$$R' = \frac{2a \cdot 2\sqrt{a^2-4} - a^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-4}} \cdot a}{4a^2 - 16} = 0$$

$a \neq 2 \Rightarrow 4a^2 - 16 \neq 0$, $a^2 - 4 \neq 0$

$$2a \cdot 2\sqrt{a^2-4} - a^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-4}} \cdot a = 0$$

$$2a \cdot (2a^2 - 8) - a^3 \cdot 2 = 0$$

продолжение на след. листе →

Чистовик (3)

$2a^3 - 16a = 0$, $a \neq 0$ =>

$2a^2 - 16 = 0$

$a = 2\sqrt{2}$

Тогда

$AH = 2\sqrt{2}$,

$CH = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$

$DH = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$

$CD = DH + CH = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Ответ: $CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Черновик ①

d - шаг.

$a_8 = \cancel{a_1 + 8d} = a_1 + 7d$ $\quad S = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7$

$a_{17} = a_1 + 16d$ $\quad a_1 +$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = a_1 + 13d$

$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > (a_1 + 3d) \cdot 7 + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < (a_1 + 3d) \cdot 7 + 60 \end{cases}$

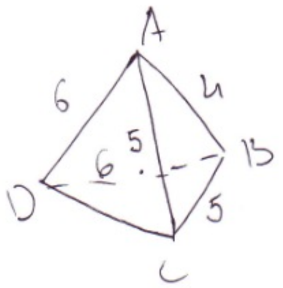
$\times 23$
23
69
46
549

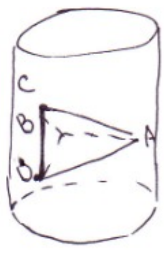
1) $a_1^2 + 7da_1 + 16da_1 + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$a_1^2 + (23d - 7)a_1 + 112d^2 - 21d - 27 > 0$

$D = 549d^2 - 322d + 49 \cancel{112} - 448d^2 + 84d + 108 =$

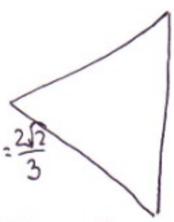
$= 101d^2 - 238d + 157 =$

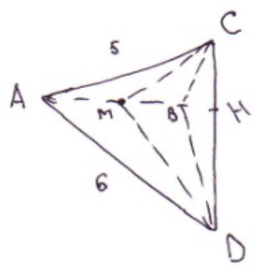




2R =

Если DC → 0, то





$CM = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \Rightarrow \sin CAB = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$DM = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sin DAB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

~~Если CD → 0, то~~ Если $\angle MCD = 90°$, то:

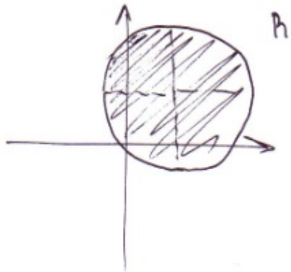
$R = \frac{CB}{2\sin CAB} = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{25}{2\sqrt{21}}$, $CD = \sqrt{11}$ $\quad$ Если

Если $CD \to \infty$, то $R = AB = 4$

21101721 (U845034 M1304938)

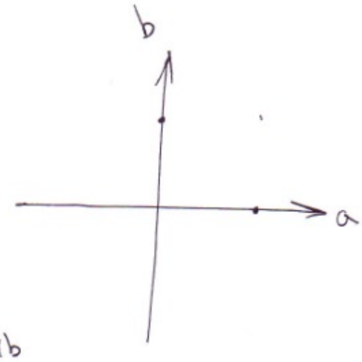
Черновик ②

3. 1)



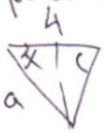
$R = 2\sqrt{5}$

2)



$8a - 4b$

У равнобедренного треуг с основанием 4, площадь описанной окр равна. Если сторона боковая = a, то



$H = \sqrt{a^2-4}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$, $R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-4}}$

$$R' = \frac{(a^2)' \cdot 2\sqrt{a^2-4} - a^2 \cdot (2\sqrt{a^2-4})'}{(2\sqrt{a^2-4})^2} = \frac{2a \cdot 2\sqrt{a^2-4} - a^2 \cdot 2\frac{1}{\sqrt{a^2-4}} \cdot a}{4a^2 - 16} = 0$$

$$\sqrt{a^2-4}' = \frac{1}{2\sqrt{a^2-4}} \cdot 2a$$

$$2a \cdot 2\sqrt{a^2-4} - 2a^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-4}} = 0$$

$$4a\sqrt{a^2-4} - 2a^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-4}} = 0$$

$$4a \cdot (a^2-4) - 2a^3 = 0$$

$$4a^3 - 16a - 2a^3 = 0$$

$$2a^3 - 16a = 0$$

$$a(2a^2 - 16) = 0$$

$$2a^2 - 16 = 0$$

$$a^2 = 8$$

$$a = 2\sqrt{2}$$

$AH = 2\sqrt{2}$

$CH = \sqrt{5^2 - 8} = \sqrt{17}$

$DH = \sqrt{6^2 - 8} = 2\sqrt{7}$

$CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

---

3. $a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b, 20)$

1) При $8a - 4b > 20$

$a^2 + b^2 \le 20$

⇓

~~$(x-a)^2 + (y+b)^2 \le 20 \Leftrightarrow$~~

~~$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2$~~ $\le 20 \Leftrightarrow$

2) При $8a - 4b < 20$

$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$

$a^2 - 8a + 4b + b^2 \le 0$

$D = 64 - 16b - 4b^2$

Черновик ③

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > (a_1+3d)\cdot 7+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < (a_1+3d)\cdot 7+60 \end{cases}$$

$$(a_1+7d)(a_1+16d) + \underbrace{(a_1+3d)\cdot 7}+60 > (a_1+10d)(a_1+13d) + \underbrace{(a_1+3d)\cdot 7}+27$$

$$(a_1+7d)(a_1+16d) + 33 > (a_1+10d)(a_1+13d)$$

$$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 + 33 > a_1^2 + 23a_1d + 130d^2$$

$$8d^2 < 33$$

d может быть равным 1 или 2

1: 1) $(a_1+7)(a_1+16) > (a_1+3)\cdot 7+27$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1+8)^2 > 0$

$a_1 \neq -8$

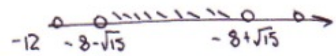
2) $(a_1+10)(a_1+13) < (a_1+3)\cdot 7+60$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$D = 256 - 196 = 60$

$a_{1,2} = \dfrac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2}$



21101721 (U845034 M1304938)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101721**

ID профиля: **845034**

Вариант 21

Чистовик (1)

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 = 5 \cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$

НОК содержит только степени 5 и 7, поэтому сами числа тоже состоят только из степеней 5 и 7.
Можно представить числа следующим образом:

$a = 5^x \cdot 7^k$

$b = 5^y \cdot 7^l$

$c = 5^z \cdot 7^m$, x, y, z, k, l, m – целые неотрицательные.

Рассмотрим степень 5, т.е числа x, y, z.
Они не могут быть больше 18, т.к иначе НОК содержало бы степень, большую 18. Они не могут быть меньше 1, т.к иначе НОД содержало бы степень 0. Более того, одно из них должно быть равно 18, а другое - 1, т.к эти степени присутствуют в НОК и НОД. Оставшееся число принадлежит отрезку $[1; 18]$.
Без умаления общности рассмотрим три случая:

1) $x = 1$

В этом случае число 18 нужно присвоить одному из двух оставшихся чисел, а третье может быть любым.
~~В этом случае~~ Заметим, что у нас тройку $(1;18;18)$ можно получить двумя способами, если использовать этот алгоритм. Поэтому всего троек $2 \cdot 18 - 1 = 35$

2) $x = 18$ Аналогичен первому случаю, всего 35 троек

3) $x \neq 1$, $x \neq 18$.

В этом случае может быть только $16 \cdot 2 = 32$ тройки, для каждого $x = 2, 3, 4 \dots$ только 2 тройки $(y; z) = (1; 18)$ и $(y; z) = (18; 1)$

Таким образом можно найти все возможные тройки $(x; y; z)$. Их количество - $35 + 35 + 32 = 102$

Продолжение на след. листе →

Чистовик ②

продолжение N 4

Для троек $(k;l;m)$ ищем количество аналогичным методом, получаем $(2\cdot16-1)*(2\cdot16-1)+14\cdot2=31+31+28=90$ троек

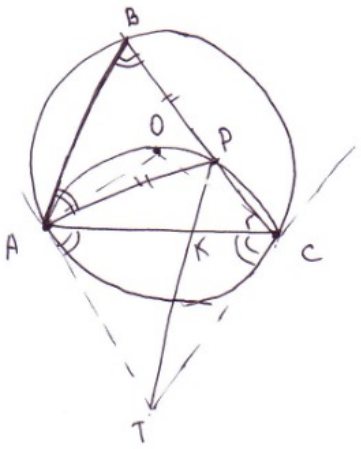
Так как $(x;y;z)$ и $(k;l;m)$ никак не связаны, а тройки $(a;b;c)$ упорядочены, общее их кол-во получается равным $90\cdot102=9180$ штук

Ответ: 9180

21101721 (U845034 M1304939)

Чистовик (3)

6.



Пусть $\angle ACP = \alpha$, $\angle CAP = \beta$

$\angle APC = 180 - \alpha - \beta$, также $\angle APC = \angle AOC$,

т.к. они опираются на одну дугу окружности, ~~вписанной в $\triangle AOC$~~ описанной около $\triangle AOC$

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \angle APC$ (т.к

$\angle AOC$ – центральный $\angle ABC$ – вписанный).

$\angle ABC = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

$\angle BAP = 180 - (\angle ABP + \angle APB) = 180 - (90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \alpha + \beta) =$

$= 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

Таким образом, $\angle ABP = \angle BAP$. Они также равны углам $\angle CAT$ и $\angle ACT$, т.к они являются углами между касательной и хордой, а значит равны вписанному, опирающемуся на эту хорду.

Так как $\angle PBA = \angle PAB$, ~~з~~ $\triangle PAB$ – равнобедренный.

$BP = AP$. $\frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, т.к высота у $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ общая

$2 \cdot 12 = AP \cdot AK \cdot \sin\beta$, $2 \cdot 9 = CP \cdot CK \cdot \sin\alpha$;

$\sin\beta = \frac{24}{AP \cdot AK}$, $\sin\alpha = \frac{18}{CP \cdot CK}$

~~$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{18}{24} \cdot \frac{\cancel{AP \cdot CK}}{AP \cdot PK} \frac{AP \cdot \cancel{AK}}{CP \cdot CK}$~~

21101721 (U845034 M1304939)

Черновик ①

1. $НОД(a; b; c) = 35 = 5 \cdot 7$

$НОК(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

Если каждое из чисел кратно 7, оно не должно быть кратно больше, чем первой степени 5, и наоборот.

$a = \cancel{5^n \cdot 7}\ 5^x \cdot 7^{k}$

$b = 5^y \cdot 7^{l}$

$c = 5^z \cdot 7^{m}$, x, y, z, k, l, m — целые, больше или равные 0.

Хотя бы одно из чисел x, y, z равно 18, другое — 1
Хотя бы одно из чисел k, l, m равно 16, другое — 1.

$x, y, z \in [1; 18]$ причём одно из них равно 1, другое 18
тогда остаётся 18 вариантов.

~~Пусть $x = 1$, $y =$~~

Пусть $x = 1$, $y = 18$, тогда $z = [1; 18]$
$x = 18$, $y = 1$, тогда $z = [1; 18]$

$36 \cdot 3 = 108$

Пусть $x = 1$, y и z должны распределиться любое, учитывая одно число $2 \cdot 18$ выбирая из двух чисел

Пусть $x = 1$, $y = 3$, тогда $z = [1; 3]$

$6 \cdot 3 = 18$

Пусть $x = 1$

~~123~~ ~~4~~ 113 123 133 131 132 ~~...~~

123 113 131 133 132

$18 \cdot 18 \cdot 18$

~~27~~
312 311 313 321 331

213 231

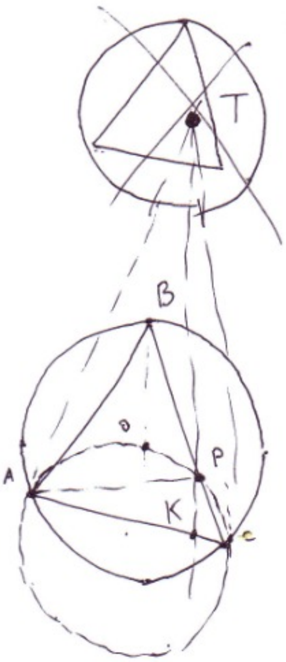
$(1 \cdot 2 \cdot 3 - 1) + (1 \cdot 2 \cdot 3 - 1) +$

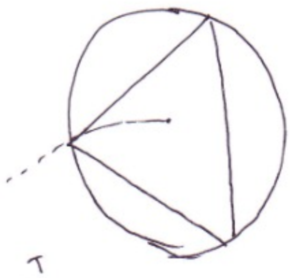
$1 \cdot 2$ $(1 \cdot 2)$

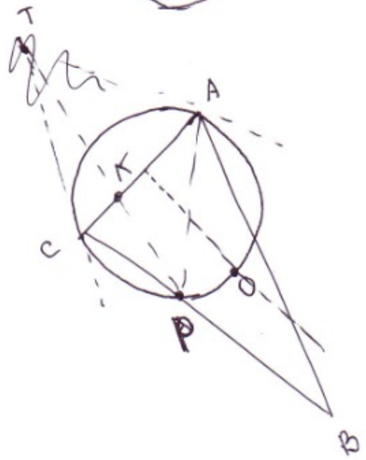
21101721 (U845034 M1304939)

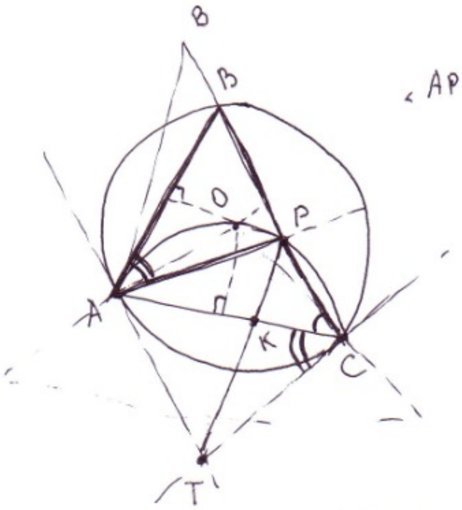
Черновик ②

6.









$\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC$

c

~~180 - α - β~~ =

2 • (180 -

~~α + β + 180~~

$\alpha + \beta \cdot 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \angle BAP$

$\angle BAP = 90 - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}\ 180-\alpha-\beta$

$\angle BAP = \frac{1}{2}\angle APC = \angle AOP$

~~AP = BP =>~~ $AP = BP$

~~AC = BC~~

$\angle TAC = \angle TCA = \angle ABC = \angle BAP$

$S = \cancel{AP \cdot AK}$

$12 = \frac{AP \cdot AK \cdot \sin\beta}{2}$, $9 = \frac{PC \cdot CK \cdot \sin\alpha}{2}$

$AP \cdot AK \cdot \sin\beta = 24$, $PC \cdot CK \cdot \sin\alpha = 18$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} =$ $\sin\alpha = \frac{18}{PC \cdot CK}$, $\sin\beta = \frac{24}{AP \cdot AK}$

$\sin\beta \cdot AP \cdot AC = \sin\alpha \cdot PC \cdot AC$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{18}{24} \cdot \frac{PC \cdot CK}{AP \cdot AK} = \frac{12}{24} \cdot \frac{PC}{AB} \cdot \frac{9}{12}$

21101721 (U845034 M1304939)

Черновик ③

5. $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{(2x-3)}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5} = 2\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)$

$\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

условие: $x \neq 2, x > 1{,}5$,

$x \neq 0$

$\cancel{2x^2-3x+5} > 1$

$2x^2-3x+1 \neq 0$

1) $2\log_{(2x-3)}(x+1) = 2\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)$

$\log_{x+1}(2x^2+3x+5)+1 =$

$\log_{x+1}(2x^2+3x+5)\cdot(x+1)$

~~$\log_{x+1}(2x^2+3x+5) = \log_{2x-3}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^2$~~

$\log_a b = \log_c a$

~~$\log_a b$ $\log$~~

$\log$ $\frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln c}$

$(\ln a)^2 = \ln c \cdot \ln b$

$\log_a b \cdot \log_c a = (\log_c a)^2$

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = (\log_c a)^2$

$\log_c b = (\log_c a)^2$

$(c^x)^x = b$