# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101680**

ID профиля: **191663**

Вариант 21

Чистовик

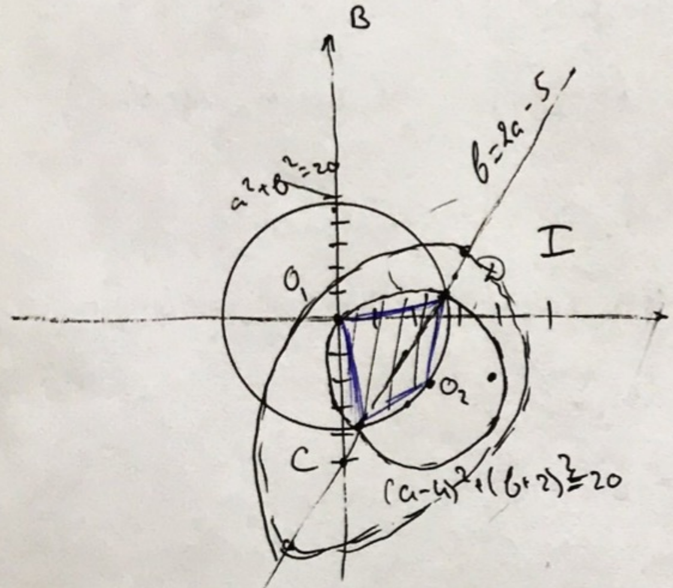
№3

(2)

1) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20, \text{ при } b<2a-5 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b, \text{ при } b>2a-5\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20, \text{ при } b<2a-5 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20, \text{ при } b>2a-5\end{cases}$

изобразим это на плоскости $\cancel{OA}$ AOB. (схематично)




2) Заметим, что расстояние между центрами окружностей равно их радиусу: $\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$

Также очевидно, что точки пересечения окружностей находятся на прямой $b=2a-5$:

$(a-4)^2+(2a-5+2)^2 = a^2-8a+16+4a^2-12a+9$

$= a^2+(2a-5)^2 = a^2+4a^2-20a+25$

3)* Значит, искомая фигура: $CO_1DO_2C$

Координаты C и D: $5a^2-20a+25=20 \Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{3}$

D: $(2+\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}-1)$ C: $(2-\sqrt{3};\ -1-2\sqrt{3})$

4) Найдем угол между векторами $O_1C$ и $O_1D$:

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|a|\cdot|b|} = \dfrac{|1+(-1)|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

5)* Заметим, что надо применить 1 условие $\Rightarrow$ для каждой из точек фигуры $CO_1DO_2C$ надо построить окр: $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

Тогда получится фигура I:

# Чистовик

①

## № 1

1) Обозначим первый член последовательности за $a$, а разность за $d>0$. Тогда:

$$\begin{cases} (a+7d)(a+16d) = a^2+23ad+112d^2 > 7a+21d+27 = S+27 \\ (a+10d)(a+13d) = a^2+23ad+130d^2 < 7a+21d+60 = S+60 \end{cases}$$

Вычтем ② из ①: $18d^2 < 33 \Rightarrow d=1$ (т.к все члены целые)

2) $$\begin{cases} a^2+23a+112 > 7a+48 \\ a^2+23a+130 < 7a+81 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+16a+64>0 \\ a^2+16a+49<0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+8)^2>0 \\ a\in\left(\frac{-16-\sqrt{60}}{2};\frac{-16+\sqrt{60}}{2}\right) \end{cases}$$

Т.к $7<\sqrt{60}<8$

$$\begin{cases} (a+8)^2>0 \\ a=-11;-10;-9;-8;-7;6 \end{cases}$$

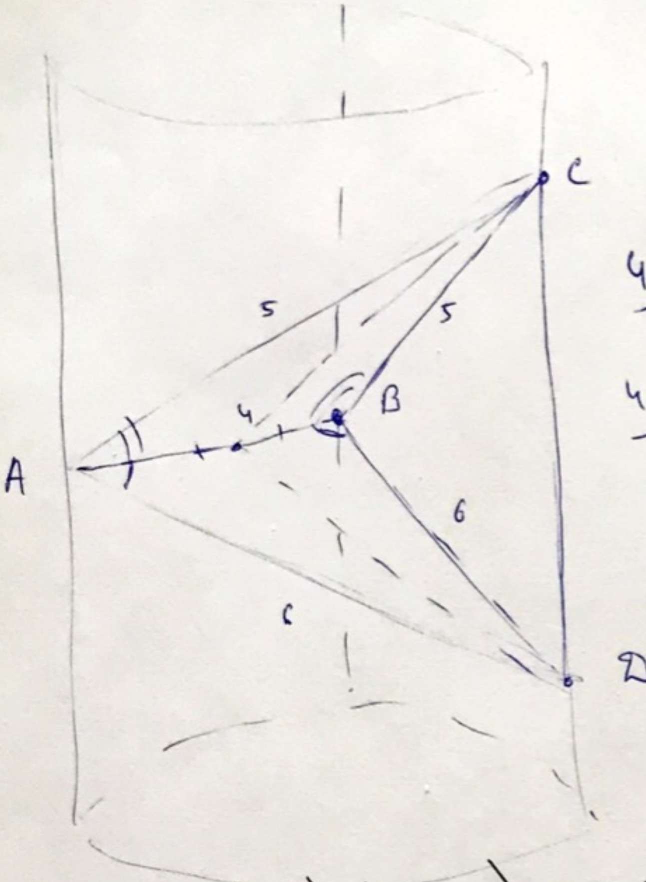
т.к $(a+8)^2\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=-11;-10;-9;-7;-6$

Ответ: $a=-11;-10;-9;-7;-6$

21101680 (U191663 M1303994)

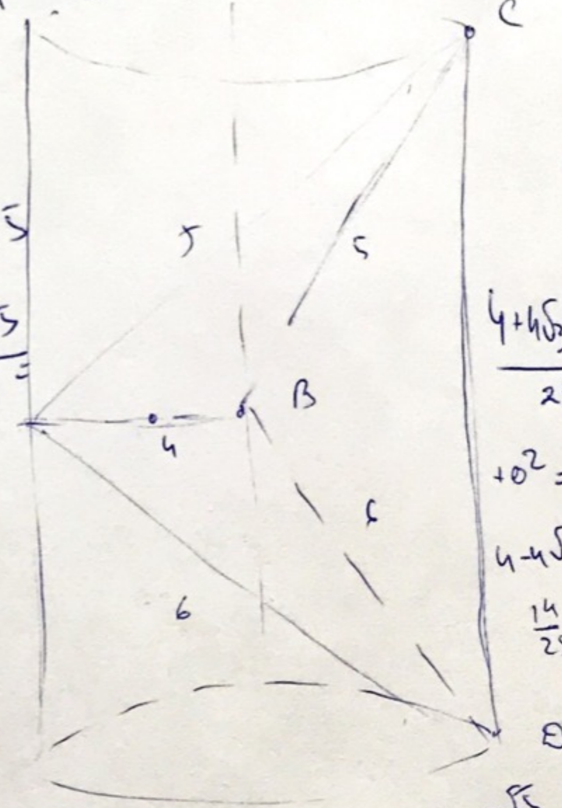
$S_2=S_4=\frac{\pi-\alpha}{2\pi}\cdot\pi\cdot 8$




$\frac{4+2\sqrt3}{5}-\sqrt5$

$\frac{4+2\sqrt3-25}{5}=$

$\frac{2\sqrt3-21}{5}$




$\frac{4+4\sqrt3+3}{25}$

$+0^2=20$

$4-4\sqrt3+3$

$\frac{14}{25}$

$r=2\sqrt5$

$2\sqrt5$

$-\;(2\sqrt3-1)(2\sqrt3+1)=12-1$

$\sim 3$

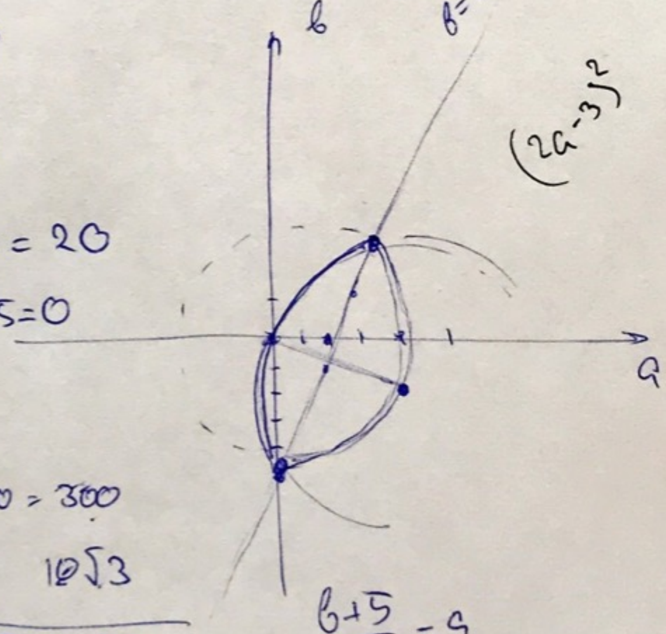
$4+4\sqrt3+3+12-4\sqrt3+1$

$7$

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$

$\begin{cases}a^2+b^2\le 20 & \text{при } 8a-4b>20,\ 2a-b>5\\ a^2+b^2\le 8a-4b & \text{при } 8a-4b<20\end{cases}$

$\begin{cases}a^2+b^2\le 20, \text{ при } b<2a-5\\ a^2+b^2\le 8a-4b, \text{ при } b>2a-5\end{cases}$




$(2a-3)^2$

$a^2-8a+b^2+4b\le 0$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

$(4;-2)$

$5a^2-20a+25=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a=$

$5\cdot$

$400-100=300$

$\frac{20\pm 10\sqrt3}{10}$

$4+4\cdot 11=48=$

$\frac{2\pm\sqrt3}{5}$

$b=4+2\sqrt3-5$

$4-2\sqrt3-5$

$-2\sqrt3-1$

$2\sqrt3-1$

$\frac{b+5}{2}=a$

$\frac{b^2+10b+25}{4}+4b^2=80$

$5b^2+10b+25=80$

$b^2+2b-11=0$

21101680 (U191663 M1303994)

№1

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot n$ пусть шаг $= k$

$1+2+3+4+5 = 15$

$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$

$\frac{a_1(1+k)}{2} \cdot n = a_1(1+$

$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1) \cdot k = \frac{a_1(2+(n-1) \cdot k)}{2} \cdot n$ $7 + 21 = 28$

$a_5 = 1 +$

$4 \times 7 \cdot 16 = 112$

$S = \frac{a_1(2+6k)}{2} = a_1(1+3k) \cdot 7 = \boxed{7a_1 + 21a_1 k} = S$

$\underbrace{1+2+3+4+5+6+7}_{10}$ $11$ $7$ $28$

$a_8 = a_1 + 7k$ $(a_1+7k)(a_1+16k) > 7a_1 + 21a_1 k + 27$

$a_{17} = a_1 + 16k$ $a_1^2 + 23a_1 k + 112k^2 > 7a_1 + 21a_1 k + 27$

$a_1 + 2a_1 k + 112k^2 > 7a_1 + 27$

$17 \cdot 8 > 8 + 27$

$80 + 56 > 28 + 27$

$(a_1 + 10k)(a_1 + 13k) < S + 60$

$11 \cdot 1{,}4 < 28 + 60$

$112 - 27 = 85$

$a_1^2 + 23k a_1 k + 130k^2 < 7a_1 + 21a_1 k + 60$

$4 \times 16 \cdot 7 = 112$

$\underbrace{a_1 + 2a_1 k + 130k^2 < 7a_1 + \cancel{27} + 60 < \cancel{a_1^2 + 2a_1 k + 112k^2}}$

$a_1^2 + 2a_1 k + 130k^2 - 60 < 7a_1 + 21a_1 < a_1^2 + 2a_1 k + 112k^2 - 27$

$112k^2 - 27 > 130k^2 - 60 \Rightarrow$

$k = 2$ $130 \times 4 = 520$, $520 - 60 = 460$ $112 \times 4 = 448$ $-27$

$33 > 18k^2 \Rightarrow k = 1$

$\underbrace{a_1^2 + 2a_1 + 70 < 7a_1 < a_1^2 + 2a_1 + 85}$ $\rightarrow$ $a_1^2 + 2a_1 + 130 < 7a_1 + 60$

$a_1^2 - 5a_1 + 70 < 0$ $a_1^2 - 5a_1 + 85 > 0$ $a_1^2 - 5a_1 + 70 < 0$

$25 - 4 \cdot 70$

$a_1^2 + 2a_1 k + 130k^2 < 7a_1 + 27$

21101680 (U191663 M1303994)

$2+3+4+5+6+7+8$ 35

$7a_1+21a_1 k=S$

14 $\quad$ $14+21=35$ $\quad$ $(a;b)$ $\quad$ $r=2\sqrt{3}$

1. $a_1^2+23a_1k+112k^2>7a_1+21a_1k+27$

$\underbrace{a_1^2+2a_1k+112k^2-27}>7a_1$.

2. $a_1^2+25a_1k+130k^2-60<7a_1+21a_1k$

$\underbrace{a_1^2+4a_1k+130k^2-60<7a_1}$

$\cancel{a_1^2}+2a_1k+112k^2-27>a_1^2+4a_1k+130k^2-60$

$2a_1k+18k^2-33<0$

$k(2a_1+18k)<33$

$D=4a_1^2+4\cdot18\cdot33$

$a_1^2+a_1(2k-7)+112k^2-27>0$

$a_1^2+25a_1k+130k^2=a_1^2+23a_1k+112k^2$

$2a_1k+18k^2=33$

$k(2a_1+18k)=33$

$2a_1k+112k^2-27>4a_1k+130k^2-60$

$-2a_1k-18k^2+33>0$

$4a_1^2+4\cdot18\cdot33=4(a_1+594)$

$k\in\dfrac{2a_1\pm\sqrt{4(a_1+545)}}{-36}$

$k\in\left(\dfrac{2a_1-\sqrt{4(a_1+594)}}{-36};+\infty\right)$

15

$k=1$ $\quad$ $k=?$

$a_1\in(-\infty;7]$ $\quad$ $a<0$

38 = 19·2

$3\cdot11\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2$

$33\times18=264+33=594$, $594\times4$ $=33$

$112-48=64$

$130-81=49$

$(a+8)^2>0$

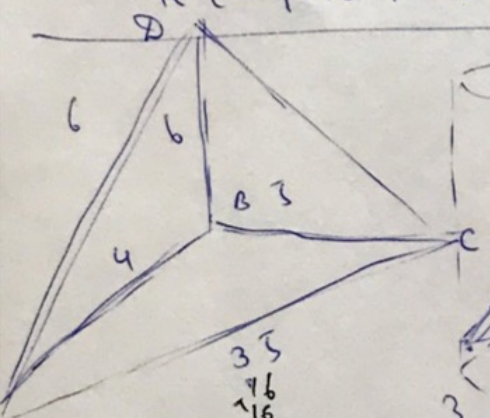
7;8 $\quad$ №1.

$19^2\cdot2^2=4(a_1+33\cdot18)$

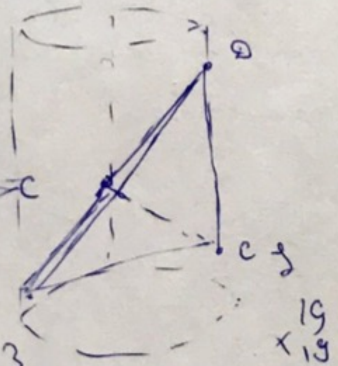
$19\cdot19\cdot2\cdot2/2=a_1+33\cdot18$

$361=a_1+594$ => $\quad$ $k>1$

$a_1=-233$









$16\times16=96+16=256$

$a=256$

$49\times4=196$

$19\times19=171+19=361$

60

$594-361=233$

21101680 (U191663 M1303994)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101680**

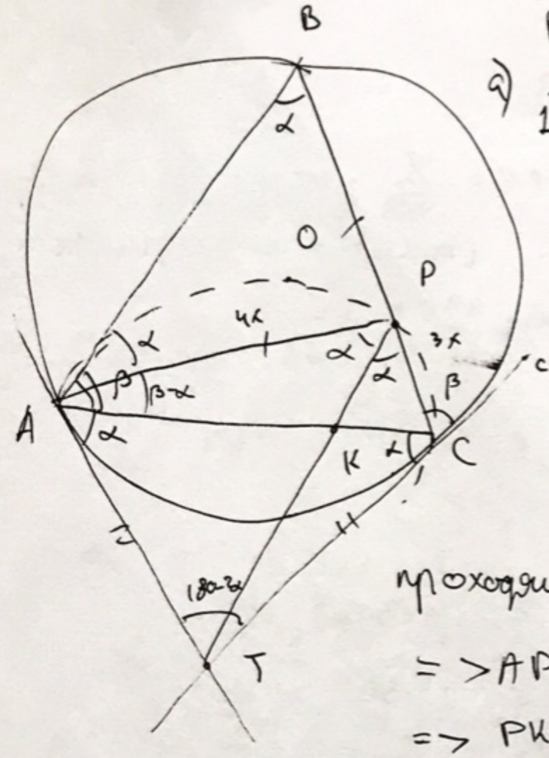
ID профиля: **191663**

Вариант 21

Чистовик

№6

(1)




Решение:

а) 1) AT=CT (как отрезки касательных)

$\Rightarrow \angle CAT = \angle TCA = \alpha$

2) $\angle ABC = \alpha$ (на дугу AC), $\angle BAC = \angle BCC_1 = \beta$ (угол между кас и хордой) $\Rightarrow \angle ACP = 180 - \alpha - \beta$

3) Заметим, что OATC - вписанный ($OA \perp AT$ и $OC \perp CT$). Т.к окружность задается тремя точками $\Rightarrow$ окр. проходящая через O-A-C также проходит через P и T.

$\Rightarrow$ APCT- вписанный $\Rightarrow \angle CPT = \angle TAC = \alpha = \angle APT = \angle ACT$

$\Rightarrow$ PK - биссектриса $\angle APC$.

4) Т.к AOCT - вписанный, $\angle ATC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 2\alpha$ ($\angle AOC$ - центральный)

$\Rightarrow \angle PAC = 180^\circ - 2\alpha - 180 + \alpha + \beta = \beta - \alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha \Rightarrow BP = AP$

5) В $\triangle APK$: $\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot AP \cdot KP = 12$, $\triangle CPK = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot CP \cdot PK = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{AP}{CP}$, $AP = 4x$, $CP = 3x$. Для $\triangle APC$: $12 + 9 = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot CP \cdot \sin(2\alpha) = 21$

$\Rightarrow \sin(2\alpha) = \frac{42}{12x^2}$ (*)

6) $\triangle ABP$: $S = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot AP \cdot \sin(180 - 2\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 4x \cdot \sin(2x)$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 16x^2 \cdot \frac{42}{12x^2} = 28 \Rightarrow S(ABC) = 28 + 21 = \underline{49}$

Ответ: 49

21101680 (U191663 M1303995)

Чистовик

№6



б) Из пункта а → (*) => $\sin(2\alpha) = \frac{42}{12x^2}$

Т.к $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} => \frac{3}{7} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} => \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$ ; $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$

(т.к α – острый)

$=> \sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{21}{58} = \frac{42}{58}$, $\cos(2\alpha) = \frac{49}{58} - \frac{9}{58} = \frac{40}{58}$

$=> \frac{42}{58} = \frac{42}{12x^2} => x^2 = \frac{58}{12}$

2) По теореме косинусов для △APC:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2\cdot AP\cdot PC\cdot\cos(2\alpha) = 16x^2 + 9x^2 - 2\cdot4\cdot3\cdot x^2\cdot\cos2\alpha$

$= x^2(25 - 24\cdot\cos2\alpha) = \frac{58}{12}\left(25 - 24\cdot\frac{40}{58}\right) = \frac{25\cdot58}{12} - \frac{24\cdot40}{12} =$

$= \frac{1450-960}{12} = \frac{245}{6}$, значит $AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$.

Ответ: $AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$

Чистовик                    №4                    ③

1) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 5 \cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2} \\ b = 5^{b_1} \cdot 7^{b_2} \\ c = 5^{c_1} \cdot 7^{c_2} \end{cases}$, где $a_1, b_1, c_1 \in \{1; 2 \ldots 18\}$, $a_2, b_2, c_2 \in \{1; 2; \ldots 16\}$

2) Заметим, также, чтобы выполнялось условие: для каждой из групп $(a_1, b_1, c_1)$ и $(a_2, b_2, c_2)$ будет хотя бы один равный 1 и хотя бы один равный максимальной степени вхождения (для 1 группы – это 18, для второй – 16)

3) Сначала подсчитаем случаи, когда оставшаяся степень принимает не минимальное (1) и не максимальное (18; 16) для данной группы.

Для I группы:

Кол-во троек: $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$

+

случаи, когда ~~есть~~ 3-ья степень принимает макс/мин значения

$\{1; 1; 18\} \to 3$ штуки

$\{18; 18; 1\} \to 3$ штуки

Для II группы:

Кол-во троек: $3 \cdot 2 \cdot 14 = 84$

+

$\{1; 1; 16\}$ – 3 штуки

$\{16; 16; 1\} = 3$ штуки

Итого: $(96+6) \cdot (84+6) = 9180$

Ответ: 9180 троек

Черновик

№8

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(c;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$

$18;16 \quad 34$

$\frac{5+4}{} = 9+17 = 26$

$1430 \cdot 960$

$450+40$

$-\frac{450}{12}$

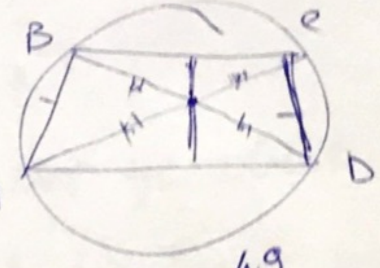
№5

$\frac{245}{6}$

$180-\alpha+x=150$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{7}\right)$

$AB = BP$




49

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \quad AC-?$

№7

1) $S(ABC)-?$

$S(APK)=12$

$S(CPK)=9$

$\frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = k$

1) $AT=CT \Rightarrow \angle TAC = \angle TCA$

$12x+x=9+9$

$18 \cdot 2$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

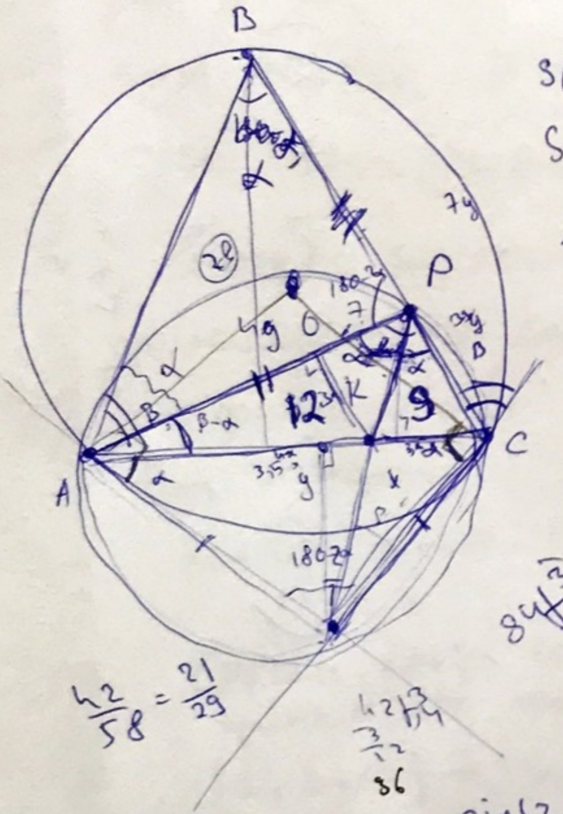
$180-\beta-\alpha+2\alpha$

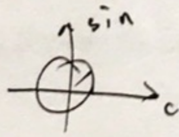
$180-\beta+\alpha+x=180$

$58 \quad 29$

$-4 \quad 18$

$2 \cdot 29$




$\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC}$

$\frac{1}{2}\cdot\sin(2\alpha)\cdot AP\cdot CP = 21$

$\frac{1}{2}\cdot\sin(2\alpha)\cdot AP\cdot CP = 21$

$8y^3 \quad 28$

$AP \cdot PK$

$49 \cdot 30^2$

$\sin 2\alpha = \frac{42}{12y^2}$

$\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AP \cdot PK = 12$

$\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot CP \cdot PK = 9$

$\frac{3}{7} = \frac{\sin}{\cos}$

$\frac{42}{58} = \frac{21}{29}$

$42 \quad 36$

$\sin(2\alpha) = \frac{42}{12x^2}$

$\frac{AP}{CP} = \frac{12}{9}$

$AP = 4x$

$CP = 3x$

$\frac{\sin}{\sqrt{1-\sin^2}}$

$AB^2 = 32y^2 - 32y^2\cdot\cos(180-2\alpha)$

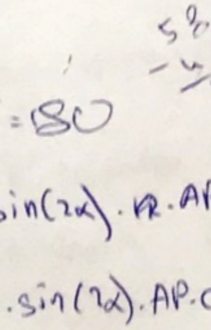
$AB^2 = 32y^2(1+\cos(2\alpha))$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\frac{2\cdot 3\cdot 7}{58} = \frac{42}{58} \quad \frac{21}{29} = \frac{42}{12x^2}$

$x^2 = \frac{29}{6}$

$7x = 3\sqrt{1-x^2}$




$\frac{1}{2}\cdot 16y^2\cdot\sin(180-2\alpha) = S(ABP)$

$12\cdot x^2 = 58$

$x^2 = \frac{58}{12} = \frac{29}{6}$

$49x^2 = 9(1-x^2)$

$49x^2 = 9 - 9x^2$

$\frac{1}{2}\cdot 16y^2 \cdot \frac{42}{12y^2}$

$14 \cdot 4$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 42$

$58x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{58}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3}\cdot 42 = 28 = 28$

$\times \frac{162}{90}$

$9180$

$\sin = \frac{3}{\sqrt{58}} \quad \cos = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$\sin^2 = \frac{9}{58} \quad \cos = \frac{49}{58}$

$\}\quad .10\}$

$)$

$6$

$16)$

$$AC^2 = \cancel{4x^2}\ 16x^2 + 9x^2 - 2\cdot 4x \cdot 3x \cdot \cos(2\alpha)$$

$$AC^2 = 25x^2 - 24x^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AC^2 = x^2\left(25 - 24 \cdot \frac{40}{58}\right)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2$$

$$\frac{49}{58} - \frac{9}{58} = \frac{40}{58}$$

$$AC^2 = \frac{29}{6}\left(25 - 24 \cdot \frac{20}{29}\right)$$

$$\frac{25 \cdot 29}{6} - \frac{24 \cdot 20}{6}$$

$$AC = \sqrt{\frac{245}{6}} = \frac{7\sqrt{30}}{6}$$

41

$29 \times 25$

145

58

725

480

245 | 6

−24

4

5

3

$AC^2 =$

$$\frac{42}{58} = \frac{42}{12x^2} \qquad 58 = 12x^2 \qquad \frac{58}{12} = x^2$$