Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101628**

ID профиля: **81377**

Вариант 21

Чистовик

Вариант 21

<u>№1.</u>

Пусть разность арифм. прогрессии равна d. Тогда:

$$S = \frac{(a_1+a_1+6d)}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7 = 7a_1+21d$$

$$\begin{aligned} a_8 &= a_1+7d \\ a_{17} &= a_1+16d \end{aligned} \Rightarrow (a_8)\cdot(a_{17}) = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27$$

$$a_1^2+23a_1d+112d^2 \geq 7a_1+21d+28, \quad (1)$$

т.к. $a_1, a_2, \ldots$ — целые

$\Downarrow$

$a_2 - a_1 = d \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$a_1^2+23a_1d+112d^2 \in \mathbb{Z}$

$$a_{11}\cdot a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2+23a_1d+130d^2 < 7a_1+21d+60$$

$$a_1^2+23a_1d+130d^2 \leq 7a_1+21d+59 \quad (2)$$

(1) и (2):

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+130d^2 \leq 7a_1+21d+59 \\ -a_1^2-23a_1d-112d^2 \leq -7a_1-21d-28 \end{cases} \Rightarrow 18d^2 \leq 31$$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} d^2 &\leq \frac{31}{18} \\ d &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d \leq \sqrt{\frac{31}{18}}$$

$18\cdot 1 < 31 < 18\cdot 2$

$\Downarrow$

$$\left.\frac{31}{18} < 2 \Rightarrow d < \sqrt{2}\ \right\}$$

d — целое $\Downarrow$

$$d = 1 \Leftarrow 0 < d \leq 1$$

т.к. посл-ть возрастающ.

Подставляя d в (1) и (2):

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112 \geq 7a_1+21+28 \\ a_1^2+23a_1+130 \leq 7a_1+21+59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+63 \geq 0 \Rightarrow \\ a_1^2+16a_1+50 \leq 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} (a_1+7)(a_1+9) \geq 0 \\ (a_1+8-\sqrt{14})(a_1+8+\sqrt{14}) \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = 64-50 = 14; \quad \sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{14}$$

$$a_1 = -8 \pm \sqrt{14}$$

$-8+\sqrt{14} \ \vee\ -7$

$\sqrt{14} \ \vee\ 1$

$\Downarrow$

$-8+\sqrt{14} > -7$

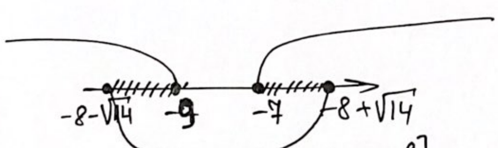
$\Downarrow$

$-8+\sqrt{14} > -9$

$-8-\sqrt{14} < -9$

$\Downarrow$

$-8-\sqrt{14} < -7$



$\Downarrow$

$$a_1 \in [-8-\sqrt{14}; -9] \cup [-7; -8+\sqrt{14}] \qquad -5 < -8+\sqrt{14} < -4$$

$$3 < \sqrt{14} < 4 \Rightarrow \qquad -12 < -8-\sqrt{14} < -11$$

$$-4 < -\sqrt{14} < -3$$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\in [-7; -8+\sqrt{14}] \\ a_1 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 \in \{-7; -6; -5\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\in [-8-\sqrt{14}; -9] \\ a_1 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 \in \{-11; -10; -9\}$$

1

Чистовик.

Проверим каждое значение:

1) $a_1=-11.$ $d=1$ $\Rightarrow a_8=-4$ $a_{17}=5$ $a_8\cdot a_{17}=-20$

$$S=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)\cdot 7=(-11+3)\cdot 7=-8\cdot 7=-56$$

$\underbrace{a_8\cdot a_{17}}_{=-20}>-56+27=-29$ верно

$a_{11}=-1$ $a_{14}=2$

$\underbrace{a_{11}\cdot a_{14}}_{=-2}<-56+60=4$ верно

2) $a_1=-10$ $d=1$ $S=(a_1+3d)\cdot 7=(-10+3)\cdot 7=-49$

$a_8=-3$ $a_{17}=6$ $a_{11}=0$ $a_{14}=3$

$-18>\underbrace{-49+27}_{=-22}$ верно $0<\underbrace{-49+60}_{=11}$ верно

3) $a_1=-9$ $d=1$ $S=-42$

$a_8=-2$ $a_{17}=7$ $a_{11}=1$ $a_{14}=4$

$-14>\underbrace{-42+27}_{=-15}$ верно $4<\underbrace{-42+60}_{=18}$ верно

4) $a_1=-7$ $d=1$ $S=(-7+3)\cdot 7=-28$

$a_8=0$ $a_{17}=9$ $a_{11}=3$ $a_{14}=6$

$0>\underbrace{-28+27}_{=-1}$ верно $18<\underbrace{-28+60}_{=32}$ верн.

5) $a_1=-6$ $S=-21$ $d=1$

$a_8=1$ $a_{17}=10$ $a_{11}=4$ $a_{14}=7$

$10>\underbrace{-21+27}_{=6}$ верн. $28<\underbrace{-21+60}_{=39}$ верн.

6) $a_1=-5$ $S=-14$ $d=1$

$a_8=2$ $a_{17}=11$ $a_{11}=5$ $a_{14}=8$

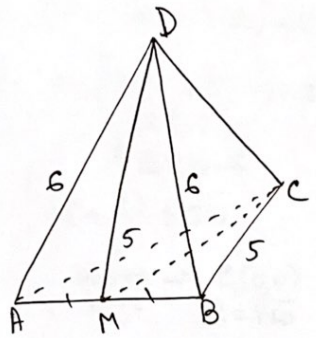
$22>\underbrace{-14+27}_{=13}$ верн. $40<\underbrace{-14+60}_{=46}$ верн.

Ответ: $\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$.

2

Чистовик

№2.

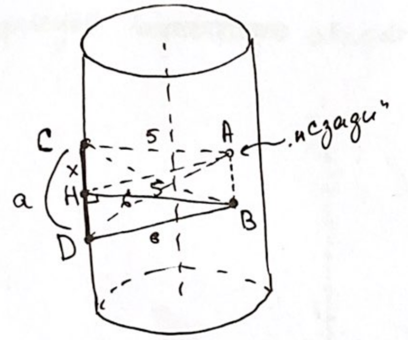


l – ось цилиндра

$AD=DB$, $AC=CB$ $\Rightarrow$ CD содержится в плоскости α, проходящей ч/з середину AB – M и перпендикулярной AB (т.к. DM и CM – сер. перп-ры к AB).

$CD \subset \alpha$, $\alpha \perp AB$ $\Rightarrow$ $CD \perp AB$ $\Rightarrow$ $l \perp AB$

~~окр-ть, описанная около ΔABD~~



Проекция AB на CD совпадет с основанием высоты BH (т.к. $AB \perp CD$, и при проектировании AB станет точкой).

Заметим также, что, поскольку $BH \perp CD$ и $AH \perp CD$, то окр-ть ω, описанная около ΔABH является сечением цилиндра (т.к. пл-ть (ABH) перпендик. на l: $AB \perp l$; $AH \perp l$; $BH \perp l$).

Пусть $CD = a$; $CH = x$

~~$25 - (a-x)^2 = 36$~~ $\quad 25 - \cancel{x^2} = 36 - (a-x)^2 = 36 - a^2 + 2ax - \cancel{x^2}$

$a^2 - 2ax = 11$

$2ax = a^2 - 11 \Rightarrow x = \frac{a^2-11}{2a}$

$BH = AH$, т.к. $\Delta ACD = \Delta BCD$ по 3-м сторонам

$AH^2 = BH^2 = 25 - x^2 = 25 - \left(\frac{a^2-11}{2a}\right)^2$

Найдем радиус R окр-ти ω:

~~$HK = BH^2 - (\frac{1}{2}AB)^2 = BH^2 - 4$~~

$HK = BH^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = BH^2 - 4$

$S_{ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot HK = 2 \cdot (BH^2 - 4)$

$S_{ABH} = \frac{abc}{4R} = \frac{BH \cdot AH \cdot AB}{4R} = \frac{BH^2 \cdot 4}{4R} = \frac{BH^2}{R} = 2 \cdot (BH^2 - 4)$

$R = \frac{BH^2}{2 \cdot (BH^2-4)} = \frac{\frac{1}{2}(2BH^2 - 8) + 4}{2BH^2 - 8} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2BH^2 - 8}$

Нужно минимизировать $R \Rightarrow$ максимизировать $2BH^2 - 8$, т.е. максимизировать BH^2.

$BH^2 = 25 - x^2 \Rightarrow$ минимизируем $x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \frac{a^2-11}{2a} = 0 \Big| \Rightarrow a = \sqrt{11}$, $a > 0$

H – либо C, либо D (D не мож. быть, т.к. $CB < BD$) $\Rightarrow H = C$

В этом случае $R = \frac{1}{2} + \frac{4}{2 \cdot 25 - 8} = \frac{1}{2} + \frac{4}{50-8} = \frac{1}{2} + \frac{4}{42} = \frac{21}{42} + \frac{4}{42} = \frac{25}{42}$

Ответ: $\sqrt{11}$.

3

Чистовик

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,\ 20)\end{cases}$$

← ~~или точка~~ круг с центром (a,b) и радиусом $\sqrt{20}$

~~или точка~~ ~~круг с центром $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{\min(8a-4b,20)}$~~

I. $\min(8a-4b,20)=20$

$8a-4b\ge 20$

$b\le 2a-5$

$a^2+b^2\le 20$

$\Downarrow$

~~окр~~ круг ω $C_1(0,0)$ $R=\sqrt{20}$

II. $\min(8a-4b,20)=8a-4b$

$b\ge 2a-5$

~~круг или точка~~

$a^2+b^2\le 8a-4b$

$a^2-8a+b^2+4b\le 0$

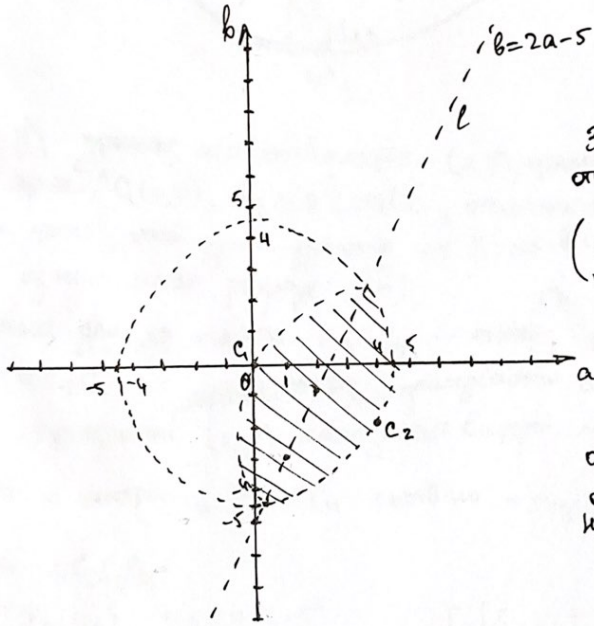
$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

$\Downarrow$

~~окр~~ круг ω $C_2(4;-2)$ $R=\sqrt{20}$

Нарисуем ~~возможную~~ область возможных (a,b):

$4<\sqrt{20}<5$



Заметим, что C_1 и C_2 симметричны относительно $l: 2a-b-5=0$

$$\left(\rho_{C_1}=\frac{|2\cdot 0-0-5|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5};\quad \rho_{C_2}=\frac{|2\cdot 4+2-5|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}\right)$$

$\Downarrow$

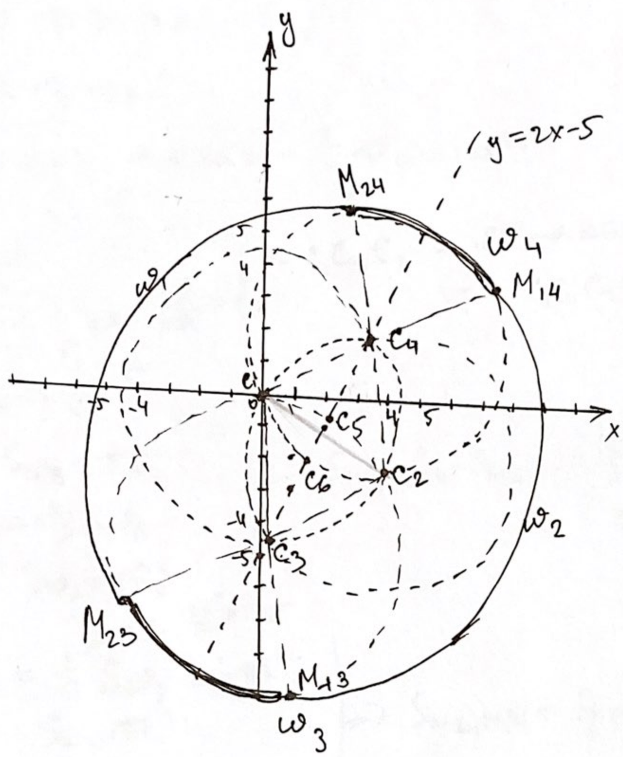
область возможных (a,b) симметрична отн.но l (см. рисунок — закрашенная область)

Найдём теперь, где могут находиться подходящие (x,y).

(см. след. страницу)

4

Чистовик



~~Все~~ (x, y), ~~принад~~ соответствующие (a, b), принадлежащим ~~...~~ сектору $C_3C_2C_4$ — сектору ~~дуге~~ окр-ти ω^A $C_1(0,0)$; $R_2 = 2R = 2\sqrt{20}$, отсечённая прямыми C_1C_3 и C_1C_4 ~~прямой y=2x-5~~ (т.к. каждая из ~~этих~~ точек этой дуги удалена от C_1 на $R=\sqrt{20}$, и окр-ть с центром в каждой из них имеет радиус $\sqrt{20}$).

Аналогично, для ~~...~~ сектора $C_3C_1C_4$ — сектор ω_B $C_2(0,0)$; $R_2 = 2\sqrt{20}$, отсечённый C_2C_3 и C_2C_4. ~~...~~, порождаются секторами $C_1C_3C_2C_5$ и $C_1C_4C_2C_6$ соотв-но

Также, подходящие (x, y) находятся внутри секторов $M_{23}C_3M_{13}$ и $M_{24}C_4M_{14}$ окр-тей с центром в C_3 и C_4 соотв-но и радиусом $R=\sqrt{20}$

5

Найдём $\angle C_3C_1C_4$:

$C_3(x_3, y_3)$: $y_3 = 2x_3 - 5$ $\qquad$ $C_4(x_4, y_4)$

$$x_3^2 + (2x_3-5)^2 = 20$$
$$x_3^2 + 4x_3^2 - 20x_3 + 25 = 20$$
$$5x_3^2 - 20x_3 + 5 = 0$$
$$x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$$
$$D = 16 - 4, \ \sqrt{D} = 2\sqrt{3}$$
$$x_3 = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2-\sqrt{3} \\ x_4 = 2+\sqrt{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} y_3 = 2\cdot 2 - 2\sqrt{3} - 5 = -2\sqrt{3}-1 \\ y_4 = 2\cdot 2 + 2\sqrt{3} - 5 = 2\sqrt{3}-1 \end{array}$$

$$C_3C_4^2 = (2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}+1)^2 = (2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 = 12+48 = 60$$

Пусть $\angle C_3C_1C_4 = \alpha$.

Тh косинусов:

$$C_3C_4^2 = C_1C_3^2 + C_1C_4^2 - 2\cdot C_1C_3 \cdot C_1C_4 \cdot \cos\alpha$$

Чистовик

$60 = 20 + 20 - 2 \cdot 20\cos\alpha$

$\cancel{60}\ 3 = 2 - 2\cos\alpha$

$2\cos\alpha = -1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

$\Downarrow$

$\angle C_1C_3C_2 = 180^\circ - \alpha = 60^\circ$

(т.к. $C_1C_4C_2C_3$ - ромб $\Rightarrow C_1C_4 \parallel C_2C_3$)

т.к. $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$

$S_{M23M24} = \frac{1}{3} \cdot S_{\omega_B}$

$S_{\omega_B} = \pi R_2^2$

$S_{M14M13} = \frac{1}{3} S_{\omega_A}$

$S_{\omega_A} = \pi R_2^2$

$\Rightarrow S_{M23M24} + S_{M14M13} = \frac{2}{3}\pi R_2^2 = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{20})^2 = \frac{2}{3}\pi \cdot 4 \cdot 20 = \frac{8}{3}\pi \cdot 20$

т.к. $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$

$S_{M23M13} = \frac{1}{6} S_{\omega_3} = \frac{1}{6}\pi R^2$

$S_{\omega_3} = \pi R^2$

$S_{M24M14} = \frac{1}{6} S_{\omega_4} = \frac{1}{6}\pi R^2$

$\Rightarrow S_{M24M14} = \frac{2}{6}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 20$

Искомая площадь: $S = \frac{8}{3}\pi \cdot 20 + \frac{1}{3}\pi \cdot 20 = \frac{9}{3}\pi \cdot 20 = 3\pi \cdot 20 = 60\pi$

Ответ: 60π.

6

№3. ~~Чистовик~~ Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ ← (x, y) лежат внутри круга с центром в (a, b) и радиусом $\sqrt{20}$

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$ ← (a, b) лежат внутри круга с центром $(0, 0)$ и радиусом $\sqrt{\min(8a-4b, 20)}$

Рассмотрим 2 случая:

I. $\min(8a-4b, 20) = 20$

$8a-4b \ge 20$

$b \le 2a-5$

$a^2+b^2 \le 20$

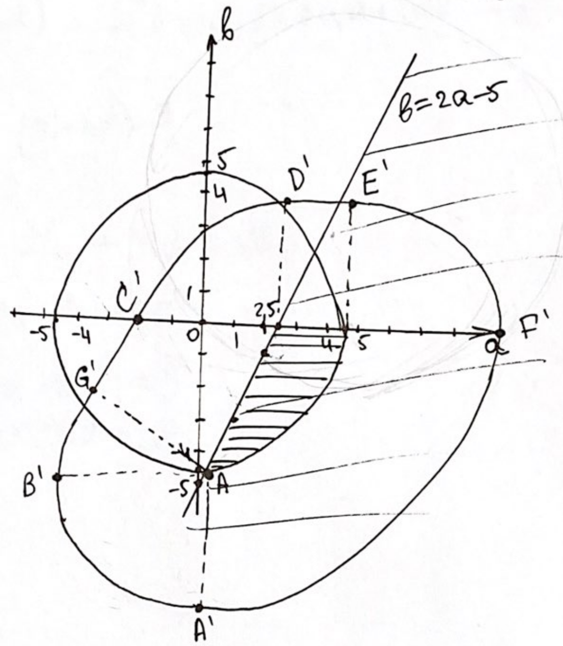
⇓

расст от $(0,0)$ до (a, b) $\le \sqrt{20}$

$4 < \sqrt{20} < 5$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

Посмотрим, какая фигура получается из подходящих (x, y).



A'B'A – сектор круга

b^2

Черновик

S – сумма первых 7 ч

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

56

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_8 a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2 + 16a_1d + 7a_1d + 112d^2 = a_1^2 + 23a_1d + 112d^2$

$S = \frac{(a_1+a_1+6d)}{2} \cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7$

$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$(a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 \leq 7a_1 + 21d + 59$

$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 \geq 7a_1 + 21d + 28$

$18d^2 \leq 59 - 28 = 31$

$d^2 \leq \frac{31}{18}$

$d > 0 \Rightarrow d \leq \sqrt{\frac{31}{18}}$

$a_1 = -8$ $S = -35$

-8

$d = 1$

$-\frac{112}{49}$ 6

$a_8 = -1$ $a_{11} = 2$

$a_{17} = 8$ $a_{14} = 5$

$-8 > -35+27$ $10 < -35+60$

$\shortparallel$

-8

$\frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 20 =$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot 20$

$\frac{8}{3}\pi \cdot 20$

$\frac{1}{6}\pi \cdot 20 =$

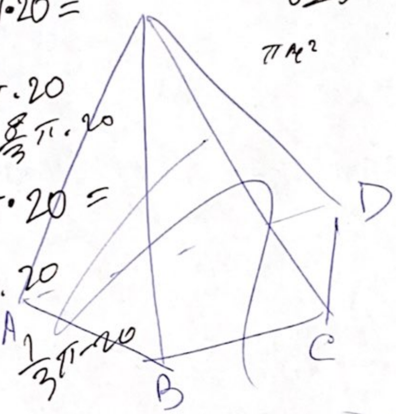
$\frac{2}{6}\pi \cdot 20$

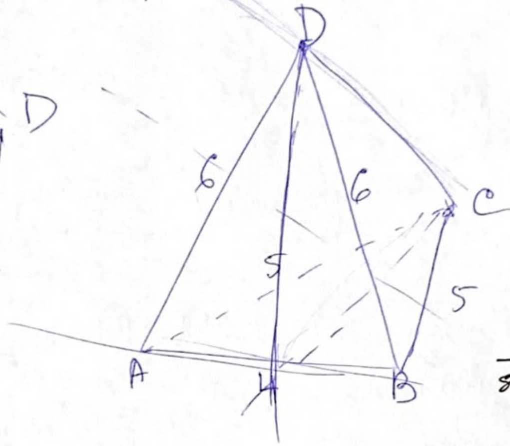
$\frac{1}{3}\pi \cdot 20$

$6^2 \cancel{-5^2}$

πr^2

$\frac{\pi d^2}{4}$





$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$

$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

$112 - 21 = 112 - 12 - 9 = 91$

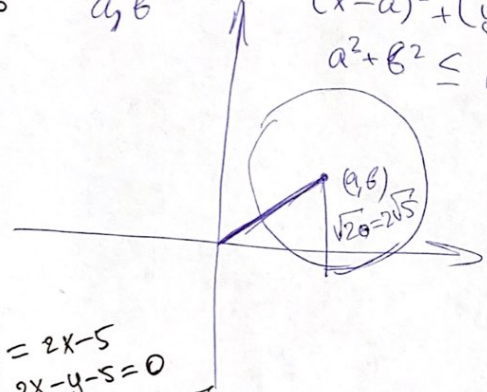
$\begin{array}{r} 91 \\ -28 \\ \hline 63 \end{array}$

a, b

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20$

$a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b, 20)$

$\frac{1}{2} ab \sin\gamma$



$\sin\alpha = \sin\beta$

1) $\min(8a - 4b, 20) = 20$

$8a - 4b \ge 20$

$2a - b \ge 5$

$b \le 2a - 5$

$\frac{abc}{4R}$

$y = 2x - 5$

$2x - y - 5 = 0$

$\rho_1 = \frac{2 \cdot 0 - 0 - 5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$CD \in \alpha$

$\alpha \perp AB$ $\Rightarrow CD \perp AB$

$\rho_2 = \frac{2 \cdot 4 + 2 - 5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

$\triangle ABD - \triangle$

$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$

$a^2 - 8a + b^2 - 4b \le 0$

$a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 16 + b^2 - 2 \cdot b \cdot 2 + 4 \le 20$

$(a-4)^2 + (b-2)^2 \le 20$

$\frac{ab}{2}$

$\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{4 \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} =$

$a = \frac{\sqrt{5}}{a = 0}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101628**

ID профиля: **81377**

Вариант 21

Чистовик

№4.

~~$НОД(a, b, c) = 35 \Rightarrow a = 35a'$, $b = 35b'$, $c = 35c'$; $НОД(a', b', c') = 1$; $НОД(a', 35) = НОД(b', 35) = НОД(c', 35) = 1$~~

~~$НОК(a, b, c) = НОК(35a', 35b', 35c') = 35 \cdot НОК(a', b', c') = 5^{18} \cdot 7^{16}$~~

~~$НОК(a', b', c') = 5^{17} \cdot 7^{15}$~~

~~т.к. НОК ⋮ 35 и на каждое из чисел a', b', c', взаимно простых все вместе и с 35~~

~~I. $НОД(a', b') = НОД(b', c') = НОД(a', c') = 1$~~

~~$НОК(a', b', c') = a'b'c' = 5^{17} \cdot 7^{15}$, т.к. никакие 2 числа не содержат одновременно ненулевые степени 5 и степени 7, т.к. иначе НОД не 1 $\Rightarrow a' = 5^{17}$, $b' = 7^{15}$, $c' = 1$ с точностью до перестановки $3! = 6$ вариантов~~

~~II. $НОД(a', b') \neq 1$, $НОД(a', c') \neq 1$ или $НОД(b', c') \neq 1$.~~

$a = 5^{x_a} 7^{y_a}$

$b = 5^{x_b} 7^{y_b}$

$c = 5^{x_c} 7^{y_c}$

$\Rightarrow НОК = 5^{\max(x_a, x_b, x_c)} \cdot 7^{\max(y_a, y_b, y_c)} = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$\max(x_a, x_b, x_c) = 18$

$\max(y_a, y_b, y_c) = 16$

других множителей нет, т.к. $5^{18} \cdot 7^{16}$ должно делиться на все множители

$НОД = 5^{\min(x_a, x_b, x_c)} \cdot 7^{\min(y_a, y_b, y_c)} = 35$

$\min(x_a, x_b, x_c) = 1$

$\min(y_a, y_b, y_c) = 1$

среди чисел (x_a, x_b, x_c) одно равно 18, другое равно 1, третье равно числу от 1 до 18.

(1)

— и — (y_a, y_b, y_c) одно равно 16, другое 1, третье – числу от 1 до 16.

кол-во вариантов: $\underbrace{(18}_{\text{выбрать третье число}} \cdot \underbrace{1}_{\text{выбрать 0}} \cdot \underbrace{1}_{\text{выбрать 17}}) \cdot \underbrace{3!}_{\text{кол-во перестановок}} - 3 - 3 = 18 \cdot 6 - 6 = 17 \cdot 6 = 112$

(1, 1, 18) (1, 18, 18)
(1, 18, 1) (18, 1, 18)
(18, 1, 1) (18, 18, 1)

кол-во вариантов: $16 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3! - 3 - 3 = 16 \cdot 6 - 6 = 15 \cdot 6$

Получаем: $17 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 6 =$ ~~32·6 = 192 варианта~~ $17 \cdot 15 \cdot 36 = 17 \cdot 3 \cdot 180 = 17 \cdot 540 = 9180$

Ответ: 9180.

Чистовик

№5. $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=A;\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=B;\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=C$

Область определения:

$2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

$x>-1$

$x\neq 2$

$2x^2-3x+5>0$ $(D<0)$

$D=9-4\cdot 10=-31$

$2x^2-3x+4\neq 0$

$D=9-4\cdot 8=-23$

$\Big\}$ x-любое

$x\neq 0$

$\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$.

$A=\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2\log_{2x-3}(x+1)$

$B=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2\log_{2x^2-3x+5}|2x-3|=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ на области определения

$x\neq 2\Rightarrow 2x-3\neq 1$

$\Downarrow$

$B=\dfrac{2}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$A\cdot B=4\cdot\dfrac{\log_{2x-3}(x+1)}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}=4\log_{(2x^2-3x+5)}(x+1)$

$x\neq 0\Rightarrow \log_{(2x^2-3x+5)}(x+1)\neq 0$

$\Downarrow$

$AB=4\cdot\underbrace{\dfrac{1}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}}_{=C}=\dfrac{4}{C}$

$\Downarrow$

$ABC=4$

Пусть два числа равны m, а третье равно $m-1$.

Тогда $m^2(m-1)=4$

$m^3-m^2-4=0$

$(m-2)(m^2+m+2)=0$

$\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m^2+m+2=0 \\ \quad D=1-8=-7<0\Rightarrow\varnothing\end{array}\right.\Rightarrow \begin{array}{l} m=2\\ m-1=1\end{array}$

2

Рассмотрим теперь 3 случая:

I. $A=B=2;\ C=1$

$$\begin{cases} 2\log_{2x-3}(x+1)=2 \\ 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=2 \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=1 \end{cases} \to \begin{cases} 2x-3=x+1 \\ 2x^2-3x+5=2x-3 \\ x+1=2x^2-3x+5 \end{cases} \Longrightarrow x=4:$$

$$\underbrace{2\cdot16-12+5}_{\substack{\| \\ 32-12+5 \\ \| \\ 25}} \overset{?}{=} 8-3 \quad \not=$$

$\Downarrow$

не подходит

II. $A=C=2;\ B=1$

$$\begin{cases} 2\log_{2x-3}(x+1)=2 \\ 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=1 \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3=x+1 \\ 2x^2-3x+5=(2x-3)^2 \\ (x+1)^2=2x^2-3x+5 \end{cases} \Longrightarrow x=4:$$

$25=5^2$

$5^2=25$

$\Downarrow$

$x=4$ подходит

$x\in\left(\frac{3}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$

$\Downarrow$

по области определения подходит

III. $A=1;\ B=C=2$

$$\begin{cases} 2\log_{2x-3}(x+1)=1 \\ 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=2 \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3=(x+1)^2 \quad (1) \\ 2x^2-3x+5=2x-3 \\ (x+1)^2=2x^2-3x+5 \end{cases}$$

(1): $2x-3=x^2+2x+1$

$x^2=-4$

$\varnothing$

$\Longrightarrow$ решений нет.

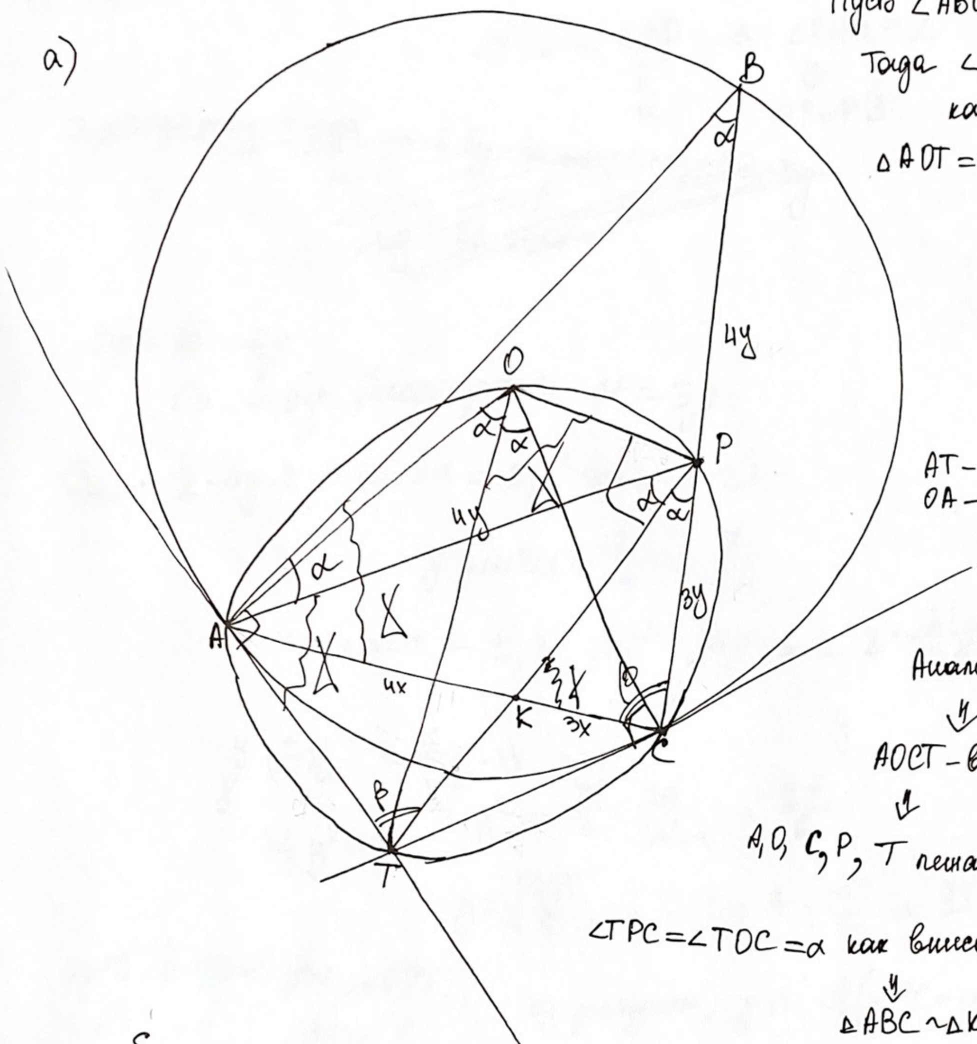
Ответ: $x=4$.

3

Чистовик.

№6.

а)



Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Тогда $\angle AOC = 2\alpha$ как центральный.

$\Delta AOT = \Delta COT$, т.к. $AO = CO$; OT – общ. $AT = CT$ – отрезки кас-ных

$\Downarrow$

$\angle AOT = \angle COT = \alpha$.

AT – касат-ная

OA – радиус в точку касания

$\Downarrow$

$\angle OAT = 90°$

Аналогично, $\angle OCT = 90°$.

$\Downarrow$

$AOCT$ – вписанный

$\Downarrow$

A, O, C, P, T лежат на одной окр-ти

$\angle TPC = \angle TOC = \alpha$ как вписанные

$\Downarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta KPC$ по 2-м углам с коэф-том $\frac{AC}{KC}$

$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{AK}{KC}$ как площади Δ-ков с одинаковой высотой

$\Downarrow$

$\frac{AC}{KC} = \frac{7}{3} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta KPC$ с коэф-том $\frac{7}{3}$

$\Downarrow$

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{49}{9} \cdot 9 = 49$

Ответ: 49.

4

Чистовик.

$tg\alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\cos\alpha = \pm\frac{7}{\sqrt{58}}$

б) $\angle APT = \angle AOT = \alpha \Rightarrow \angle APC = 2\alpha$

$$\angle APC = \angle PAB + \underbrace{\angle ABP}_{=\alpha} \Rightarrow \angle PAB = \alpha \Rightarrow AP = PB$$

~~Пусть AP = 4y. Тогда, по св-ву биссектрисы CP = 3y~~

~~4y · PK sinα =~~

5

Пусть $AP = 4y$

По св-ву биссектрисы, $CP = 3y$

$$S_{ACP} = \frac{1}{2}\cdot 4y\cdot 3y\cdot \sin 2\alpha = 6y^2\sin 2\alpha = 21$$

$$y^2\sin 2\alpha = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \pm 2\cdot\frac{3}{\sqrt{58}}\cdot\frac{7}{\sqrt{58}} = \pm 2\cdot\frac{21}{58} = \pm\frac{21}{29}$$

$$\underset{\geq 0}{y^2}\left(\pm\frac{21}{29}\right) = \underset{\geq 0}{\frac{7}{2}} \Rightarrow +\frac{21}{29}$$

$$\frac{21}{29}y^2 = \frac{7}{2}$$

$$y^2 = \frac{7}{2}\cdot\frac{29}{21} = \frac{29}{6}$$

$$y = \sqrt{\frac{29}{6}} \Rightarrow BC = 7\cdot\sqrt{\frac{29}{6}} = \frac{7\sqrt{174}}{6}$$

~~Из Th синусов для ΔAPT: $\frac{4y}{\sin\beta} = \frac{AT}{\sin\alpha}$, $AT = TC = \sin\alpha\cdot PT$~~

из рисунка, $\gamma = \frac{1}{2}(\cup PC + \cup AT) = \frac{1}{2}(\cup PC + \cup TC) = \frac{1}{2}\cup PT = \angle TOP = \angle TAP$

Th синусов для ΔKPC:

$\frac{PT}{OT}$ ~~$R^2\cdot\sin 2\alpha$~~

$$\frac{3y}{3x} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow x = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot y = \frac{\frac{3}{\sqrt{58}}\cdot\sqrt{\frac{29}{6}}}{\sin\gamma}$$

$$\sin(\gamma - \alpha) = \frac{S_{APC}}{\frac{1}{2}\cdot 4y\cdot 7x} = \frac{21}{14xy} = \frac{21}{14\cdot x\cdot\sqrt{\frac{29}{6}}}$$

~~$\sin\gamma\cdot\frac{7}{\sqrt{58}} + \cos\gamma\cdot$~~

~~отсюда находим γ через x~~

~~подставляем сюда~~

~~решаем уравнение, находим x.~~

Ииестовки

6

$$R^2 \sin 2\alpha = 12y^2 \sin 2\alpha$$

$$R^2 = 12y^2 = 12 \cdot \frac{29}{6} = 58$$

$$R = \sqrt{58}$$

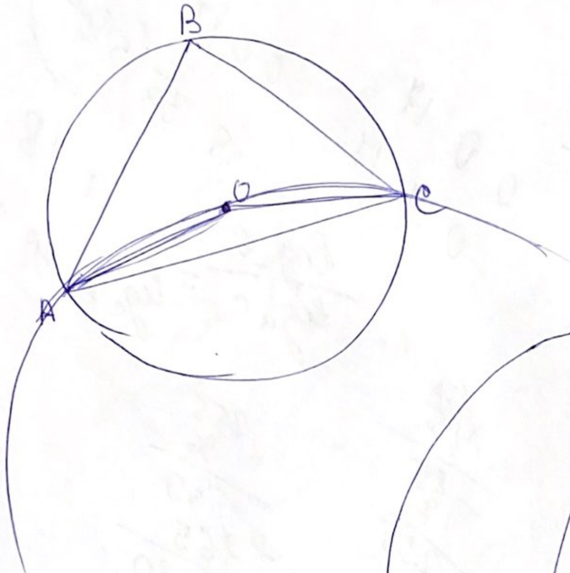
$$AC = 2R \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{58} \cdot \frac{3}{\sqrt{58}} = 6.$$

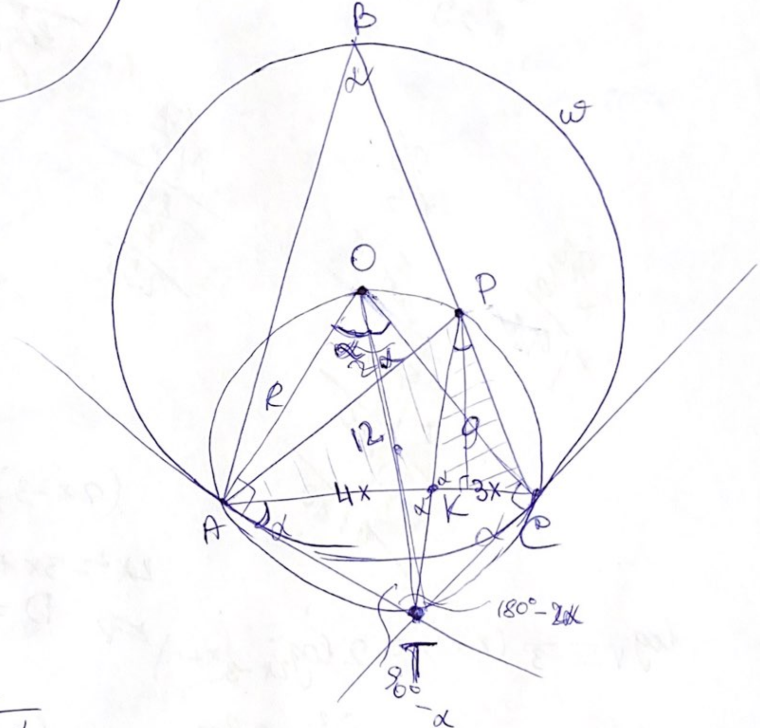
Ответ: 6.

Черновик

(a, b, c)

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 35 \\ НОК(a,b,c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$





$\frac{6}{4x} = \frac{3}{2x}$

$\frac{3}{2}x \cdot \sin\alpha$

$2R = OT$

$r = \frac{R}{2\sin\alpha}$

$AC = 2r\sin 2\alpha = 2R\cos\alpha = 7x$

$\frac{2 \cdot R \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{4x}{2R}$

$4ym\sin\alpha = 6$

$m = \frac{6}{4y\sin\alpha} = \frac{3}{2y\sin\alpha}$

$35a' ; \quad 35b' ; \quad 35c'$

$35 \cdot a' \cdot b' \cdot c' = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$a'b'c' = 5^{17} \cdot 7^{15}$

2 6 5

$a' = 5^{x_a} 7^{y_a}$

$b' = 5^{x_b} 7^{y_b}$

$c' = 5^{x_c} 7^{y_c}$

НОК

0 0 17 0 0 17

0 17 17

35 35 $5^{17} 7^{15}$

1 18

35 35 5^{18} 7^{16}

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ 35

$32 \cdot 6 = 192$

$36 + 5$

17×15: 85, 17, 255

255×36: 1530, 765, 9180

540, 17, 3780, 54, 9180

$(2x-3) \cancel{(x+1)}$

$2x^2 - 3x + 5$

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1)$

$x \geq \frac{3}{2}$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$2x-3 \neq 1$

$x \neq 2$

$x > -1$

$\cancel{\frac{2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)}{2\log_{2x-3}}}$ $\frac{2}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$4 \cdot \log_{2x^2-3x+5}(x+1) = \cancel{\frac{4}{\log_{2x^2-3x+5}}} \frac{4}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}$

$AB = \frac{4}{C}$

$ABC = 4$

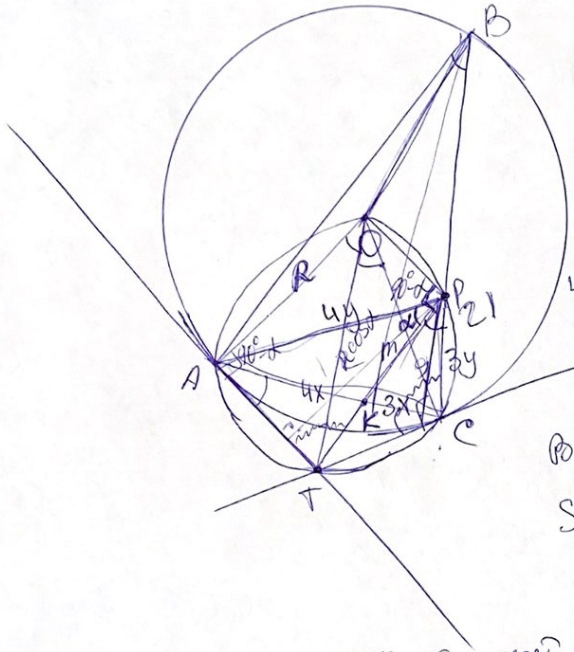
$m^3 - m^2 - 4 = m^2(m-2) + m^2 - 4 =$

$= (m^2 + m + 2)(m-2)$

Черновик

если B тупой?

$R\cos\alpha$



$42=7xh$

$xh=6$

$\triangle APT \sim \triangle ABC$

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AT}{AC}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}$$

$$AP=\frac{AB}{2\cos\alpha}$$

$$AB=8y\cos\alpha$$

Высоты в них относятся как $\frac{1}{2\cos\alpha}$

$$S=\frac{1}{2}4y\cdot\frac{3}{2y\sin\alpha}=12$$

$4y$ $\qquad \frac{PK}{AB}$

Нам нужен радиус большой.

$$m=\frac{R}{2\sin\alpha}$$

$$AB=8y\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot 4y\cdot\sin\alpha= 2ym\sin\alpha=12$$

$$ym\sin\alpha=6$$

$$PK=m=\frac{6}{y\sin\alpha}$$

$$\frac{PK}{AB}=\frac{6}{y\sin\alpha\cdot 8y\cos\alpha}=\frac{3}{4y^2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{3}{2y^2\sin 2\alpha}$$

$$4y\sin 2\alpha=7x\sin\beta$$

$$\frac{4y}{\sin\beta}=\frac{7x}{\sin 2\alpha}$$

$\cancel{BP\cdot BC}$

$$\frac{CP}{CB}$$

$\sin^2+\cos^2=1$

$tg^2+1=\frac{1}{\cos^2}$

$\frac{9}{49}+1=\frac{1}{\cos^2}$ $\qquad \cos^2=\frac{49}{58}$

$\frac{9+49}{49}=\frac{1}{\cos^2}$ $\qquad \cos=\frac{7}{\sqrt{58}}$

$\sin^2=\frac{9}{58}$

$$AT=R\cdot tg\alpha=\frac{3}{7}R$$

$$\frac{AT}{AC}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}=\frac{\sqrt{58}}{14}$$

$\cancel{AB}$ $$AC=AT\cdot\frac{14}{\sqrt{58}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{\sqrt{58}}=\frac{6}{\sqrt{58}}R=2R\cdot\frac{3}{\sqrt{58}}$$

~~tgα~~ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$

$\cos\alpha = \pm\frac{7}{\sqrt{58}}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\frac{AB}{AP} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AT}$

$AC = 2R\sin\alpha = \frac{6R}{\sqrt{58}}$

$S = 49 = \frac{1}{2}AC \cdot H = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot \frac{7}{3}\cdot h$

$AC = R\cdot$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$\cos^2 = \frac{1}{tg^2+1}$

$\frac{9}{49}+1$

~~OM = R = Rsinα~~

$PK = AB\cdot\frac{3}{7} = AB\cdot \operatorname{tg}\alpha$

$7x =$

$AP + PC = BC$

$\frac{58}{49}$

отношение радиусов — $\frac{\sin\alpha}{2}$ r

$\frac{R}{r} = \frac{\sin\alpha}{2} = \frac{3}{7}$

$\frac{3}{\sqrt{58}}$

что за бред?

$\frac{1}{2}3xh = 9$

$3xh = 18$

$xh = 6$

$\frac{3}{7}R\cdot$

$\frac{3}{7}R$

$3x = \frac{9}{h}$

$x = \frac{3}{h}$

$3x\sin\beta = h$

$9x^2\sin\beta = 18$

~~4y~~

$3x\cdot 3y$

$\frac{3y}{3x}$ //

$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 6 \\ \hline 174 \end{array}$

$\frac{4y}{\sin\beta}\cdot\sin\alpha = \frac{3x}{}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$