Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101549**

ID профиля: **328605**

Вариант 21

№1.

Пусть x - шаг этой прогрессии; $a_1 = a$ (а-первый член прогрессии)

1) $S = 7a + \frac{6\cdot 7}{2}x = 7(a+3x)$ → сумма первых 7 членов прогрессии.

2) $a_8 \cdot a_{17} > S+27$.

$(a+7x)(a+16x) > 7(a+3x)+27$. (I)

$a_{11} \cdot a_{14} \leq S+60$.

$(a+10x)(a+13x) < S+60$. (II)

(I) $a^2+7xa+7\cdot 16x^2+16xa > 7(a+3x)+27$.

(II) $a^2+130x^2+10xa+13xa < 7(a+3x)+60$.

Сложим 2 неравенства (большую часть с большей, меньшую часть с меньшей)

$7(a+3x)+60+a^2+23xa+112x^2 > 7(a+3x)+27+a^2+130x^2+\cancel{23ax}$.

$60-27 > (130-112)x^2$.

$\frac{33}{18} > x^2 \Rightarrow \frac{11}{6} > x^2$ → т.к. последов. возрастающая $x>0$;

т.к. все числа в последов. целые, x → целое

$\Downarrow$

$x=1$.

3) (I) $a^2+23a+112 > 7a+48$.

(II) $a^2+23a+130 < 7a+81$.

Подставим $x=1$.

$$\begin{cases} a^2+16a+64>0 \\ a^2+16a+49<0 \end{cases}$$

(I) $(a+8)^2>0$ $a \neq -8$.

(II) $D = 4(64-49) = 4\cdot 15 = (2\sqrt{15})^2 \Rightarrow a = \frac{\pm 2\sqrt{15}-16}{2} = \pm\sqrt{15}-8$.

Значит a равно всем целым числам, которые входят в промежуток $a \in (-\sqrt{15}-8; \sqrt{15}-8)$ КРОМЕ -8.

Ответ: $a \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Чистовик

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ \underline{a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)}\end{cases}$$

т.к. число (a^2+b^2) меньше минимума из 2 чисел, значит оно меньше каждого числа.

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

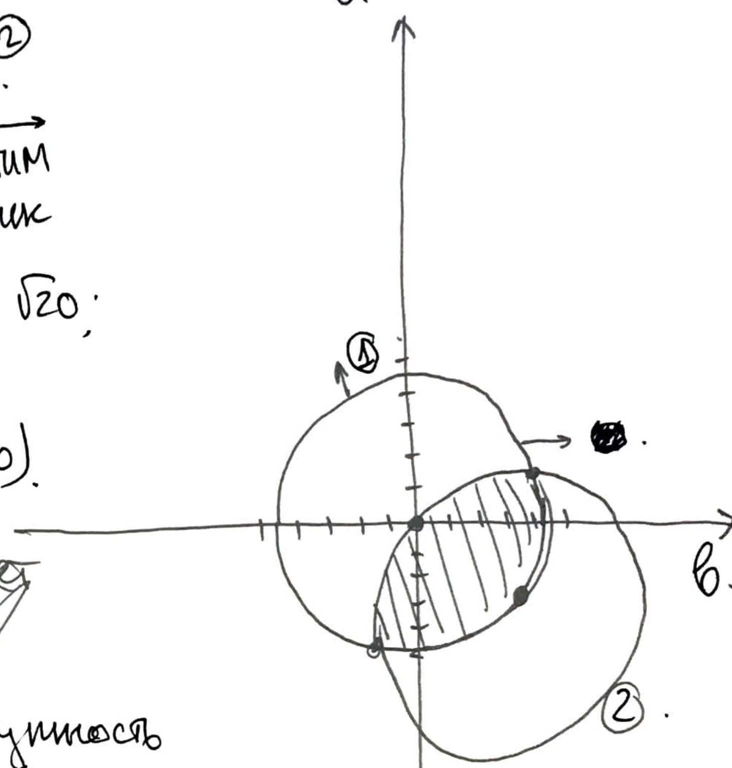
$$\begin{cases}a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2\le 20 \quad ②\\ a^2+b^2\le 20 \quad ①\end{cases}$$

$\longrightarrow$ чертим график

$a \to$ в координатах $a;b$



Радиусы у ① и ② окружности $\sqrt{20}$;

Заштрихованная обл. это решение $a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)$.

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \to$ эта окружность будет иметь центр в точке $(y;x)$.

Чтобы система выполнялась нужно, чтобы эта окружность имела хотя бы 1 ~~общ~~ общую точку с заштрихованной плоскостью.

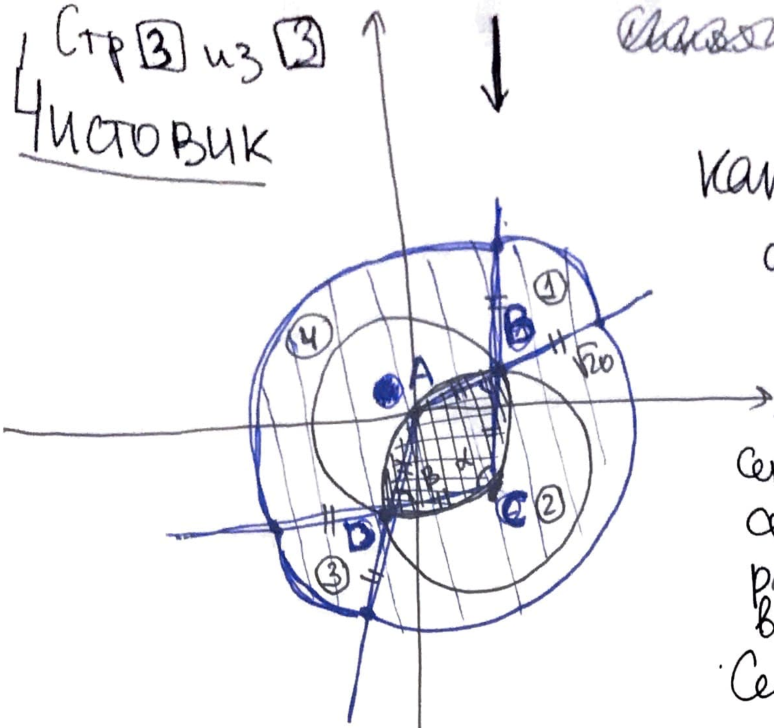
Тогда фигура внутри которой может находиться центр ~~x;y~~ окружности ~~(x;y)~~ будет вот такой:

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$

$\downarrow$

Чистовик

~~Какая фигура это фигура~~



Каждая точка этой фигуры находится на расстоянии $\sqrt{20}$ или меньше от заштрихованной обл.

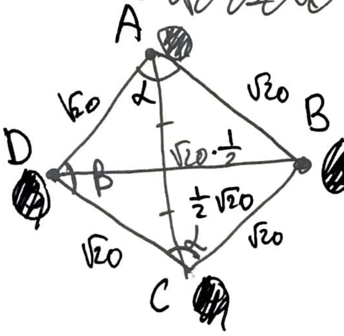
Сектора ① и ③ – это ~~кусочки~~ сектора окружности с радиусом $\sqrt{20}$ и центрами в ~~точках~~ B и D.

Сектор ④ – это сектор окр. с радиусом $2\sqrt{20}$ и центром в точке C

Сектор ② – это сектор окр. с радиусом $2\sqrt{20}$; и центром в точке A.

Это множество пар $(x; y)$ которые нам подходят, а значит это и есть фигура M; найдем её площадь.

~~Сектора 1 и 3: $S_1 = S_3 =$~~



~~Значит $S = \frac{1}{2} \sin\angle$~~

$$\Rightarrow \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\beta = \frac{2\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Значит площадь: секторов ① и ③: $S_1 = S_3 = \frac{\pi}{3} \cdot (\sqrt{20})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\beta}{2} R^2$

секторов ② и ④: $S_2 = S_4 = \frac{2\pi}{3} \cdot (2\sqrt{20})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} R^2$

Но сектора ② и ④ накладываются ~~пересекаются~~ в четырехугольнике $\Rightarrow$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - S(ABCD) = \frac{\pi}{3} \cdot 20 + \frac{8\pi}{3} 20 - 20 \cdot \sin 120^\circ = 20\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: $20\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}8a-4b<20\\ 8a-4b>20\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l}a^2+b^2\le 8a-4b\\ a^2+b^2\le 20\end{array}$$

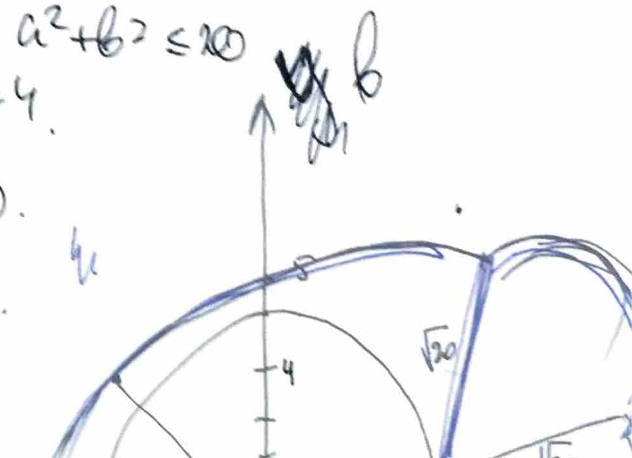
$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

$a^2+b^2-8a+4b\le 0$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 16+4$

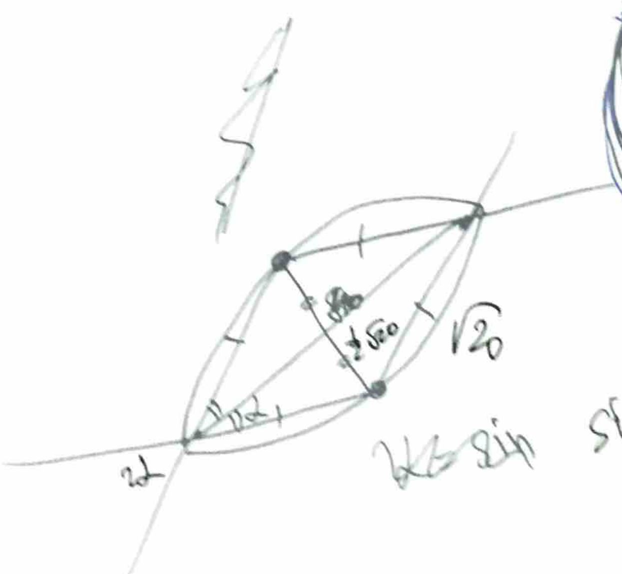
$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

$a^2+b^2\le 8a-4b$



Посл.

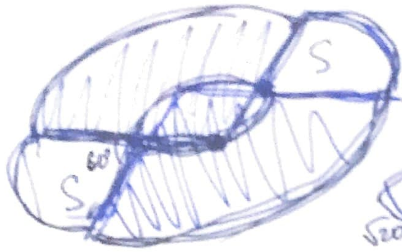
$(a-x)^2+(b-y)^2\le 20$



$\sin\alpha=\frac{1}{2}$. $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

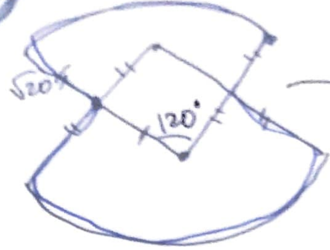
$2\alpha=\frac{\pi}{3}$.

ЧЕРНОВИК.



$S = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{20\pi}{3 \cdot 2}$

$2S = \frac{20\pi}{3}$



→ a – площадь

$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2 - R^2 \sin 120 =$

$R^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$20\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$a + 2S = \frac{20\pi}{3} + \frac{40\pi}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot 20}{2} = 20\pi - \sqrt{3} \cdot 10 = 10(2\pi - \sqrt{3})$.

Продолжение ①.

1) $a^2 + (23-7)a + \cancel{}\ 112 - 27 - 21 > 0$

$a^2 + (23-7)a + \cancel{}\ 130 - 60 - 21 < 0$.

$a \neq 8 \leftarrow a^2 + 16a + 64\ \cancel{} > 0$.

$a^2 + 16a + 49 < 0$.

$D = 4(64-49) = 4 \cdot 25 = (2 \cdot 5)^2$.

a_{12} ..

$\begin{array}{r} 112 \\ -\ 48 \\ \hline 64 \end{array}$

49.

$\begin{array}{r} 64 \\ -\ 49 \\ \hline 15 \end{array}$

30 + 18.

−16−10.

9−16·3+49.

$(2 \cdot 8)^2 - 4 \cdot 49 = 4(64-49$

ЧЕРНОВИК

1

x - шаг прогрессии

$a;\ a+x,\ a+2x$

$S = 7a + \frac{6\cdot 7}{2}x = 7(a+3x)$

$7\cdot 16 = 70+42 =$

112

1) $(a+7x)(a+16x) > S+27$

2) $(a+10x)(a+13x) < S+60$

$a^2 + 16ax + 7xa + 7\cdot 16x^2 > S+27$

$a^2 + 10xa + 13xa + 130x^2 < S+60$

$\cancel{S} + 60 + \cancel{a^2} + 24ax + 102x^2 > \cancel{S} + 27 + \cancel{a^2} + 24xa + 130x^2$

$\begin{array}{r} 130 \\ -112 \\ \hline 18 \end{array}$

$60-27 > 18x^2$

$x > 0$

$\frac{33}{18} > x^2$

x - цел.

$\frac{11}{6} > x^2$

$x = 1$

1) $(a+7)(a+16) > 7(a+3)+27$

$\boxed{a^2 + 23a + 102 > 21+27+7a}$

$\begin{array}{r} 21 \\ 27 \\ \hline 48 \end{array}$ $\begin{array}{r} 102 \\ -48 \\ \hline 54 \end{array}$

2) $a^2 + 23a + 130 < 7(a+3)+60$

$7\cdot 16 = 70$

118

1) $a^2 + 16a + 54 > 0$

2) $a^2 + 16a + 51 < 0$

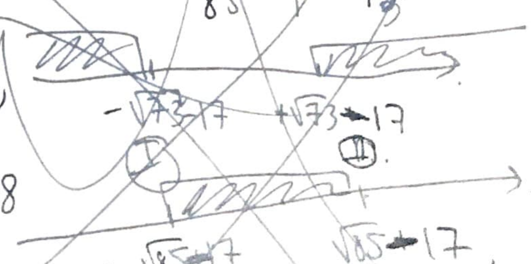
$54\cdot 4 = 216$

$51\cdot 4 = 204$

$\begin{array}{r} 289 \\ -204 \\ \hline 85 \end{array}$ $\begin{array}{r} 289 \\ -216 \\ \hline 73 \end{array}$

$D = 289 -$

$D_1 = 73$



$-\sqrt{73}$

-26

-9

$\sqrt{73}$

$-\sqrt{85}-17$

$9-17=-8$

I $\to -26$

II -8

Ответ: $-26;\ -8$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101549**

ID профиля: **328605**

Вариант 21

Чистовик Стр $\boxed{1}$ из $\boxed{4}$

№4

$НОД(a;b;c)=5\cdot 7$.

$НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{17}$

1) Все числа a, b, c состоят только из 5 и 7.

Также есть число в котором есть ровно одна 7 и число с ровно одной 5 (из НОД).

Из (НОК) мы можем сказать, что есть ~~ра~~ число с ровно 18 пятерками и число с ровно 17 семерками.

2) Распределим 7 по числам a; b; c.

$3\cdot 2 \to$ вариантов выбрать ~~ч~~ числа с 1 и 17 семерками

$3\cdot 2\cdot 16$ → в последнем числе может быть любое число 7 от 1 до 16; но в этом случае мы 2 раза считаем варианты с двумя числами с 1 семеркой и с двумя числами с 16 семерками.

Всего вариантов поставить 7: $6\cdot 16-3\cdot 2=6\cdot 15=90$.

3) Аналогично считаем с 5: $3\cdot 2\cdot 18-3\cdot 2=$

~~…~~ $6\cdot 18-6=6\cdot 17$

$=102$.

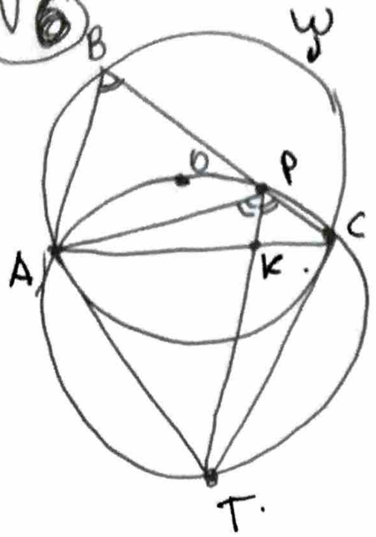
4) ~~Всего максимум 210~~

Всего вариантов: $102\cdot 90=10200-1020=9180$.

Ответ: 9180.

№6

ЧИСТОВИК



а) 1) точка T лежит на второй окружности, т.к. в OCTA противоположные углы $\angle OAT$ и $\angle OCT$ в сумме равны $180^\circ \Rightarrow$ OCTA-вписан.

На 2 окр. лежат 3 точки O, C, A $\Rightarrow$ T тоже лежит на ней; т.к. существует ровно 1 окр. для трех точек.

2) $AT = TC$ (т.к. касательные к ω из т. T)

Т.к. хорды равны, значит и дуги $\overset{\frown}{AT}$ и $\overset{\frown}{CT}$ равны;

Значит $\angle APT = \angle CPT$ (т.к. $\angle APT$ на дуге $\overset{\frown}{AT}$, $\angle CPT$ на дуге $\overset{\frown}{CP}$)

3) Пусть $\angle APT = \alpha = \angle CPT$.

$\Downarrow$

$\angle APC = \angle APT + \angle CPT = 2\alpha$

$\Downarrow$

$\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$. (т.к. на одну дугу опир.)

$\Downarrow$

$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$ (т.к. O-центр окр. ω и $\angle AOC$ и $\angle ABC$ опир. на 1 дугу).

$\angle ABC = \alpha$.

4) Тогда $\triangle PKC \sim \triangle ABC$ (т.к. $\angle ABC = \angle KPC$, $\angle BCA$ - общ.).

$$\frac{AC}{CK} = \frac{CK + AK}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = 1 + \frac{S(APK)}{S(PKC)} = 1 + \frac{4}{3}$$

$$\frac{AC}{CK} = \frac{7}{3} \Rightarrow S(ABC) = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 S(PKC) = 9 \cdot \frac{49}{9} = 49.$$

Чистовик.

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} = \alpha$. $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$ $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

1) Т.к. PK биссектриса $\angle APC$: $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$.

2) Т.к. $\angle APC = 2\alpha \Rightarrow \angle BPA = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = 180 - \alpha - 180 + 2\alpha - \alpha$

и

$\angle ABP = \angle BAP = \alpha$.

3) Пусть $PC = 3x$; тогда: $BP = 4x = AP$.

$AB = 2\cos\alpha \cdot 4x = 8x\cos\alpha = \frac{56}{\sqrt{58}}x$.

4) $S(APC) = 12 + 9 = \frac{AP \cdot PC}{2}\sin\angle APC = \frac{12x^2}{2} \cdot \sin 2\alpha$

$\cancel{21} = 6x^2 \cdot 2\frac{\cancel{21}}{\sqrt{58}} \cdot \frac{1}{\sqrt{58}}$.

$\sqrt{\frac{58}{12}} = x$.

5). По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cos\alpha AB \cdot BC$.

$AC^2 = \frac{56^2}{\cancel{58}} \cdot \frac{\cancel{58}}{12} + 49 \cdot \frac{58}{12} - 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{58}} \cdot \frac{56}{\sqrt{58}} \cdot 7 \cdot \frac{58}{12}$

$AC^2 = \frac{56^2}{12} + 49 \cdot \frac{58}{12} - \frac{49 \cdot 16 \cdot 7}{12}$

$AC^2 = \frac{49}{12}(64 + 58 - 102)$

$AC = 7\sqrt{\frac{20}{12}} = 7\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Ответ: 49; $7\sqrt{\frac{5}{3}}$.

№ 5. Чистовик стр $\boxed{4}$ из $\boxed{4}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$.

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$.

ОДЗ: $2x-3>0$ $\quad$ $2x-3\neq 1$

$x>\frac{3}{2}$. $\quad$ $x\neq 2$.

$x>-1$ $\quad$ $x\neq 0$.

$2x^2-3x+5\neq 1$.

$2x^2-3x+4\neq 0$

$D=9-8\cdot 2<0$.

всегда.

1) I случай.

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2\\ \log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2=\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)+1.\end{cases}$$

$\log_{2x-3}(x+1)=\log_{(2x^2-3x+5)}2x-3$

$2\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)=\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)+1$.

пусть $2x-3=a$

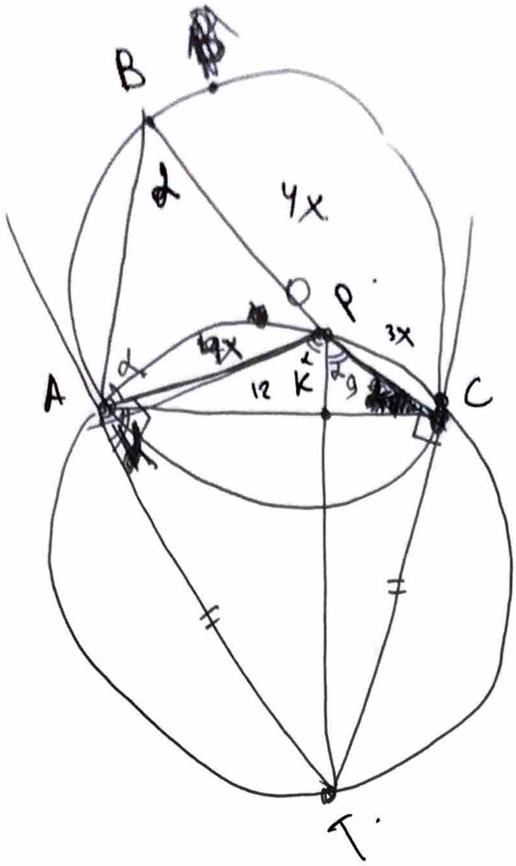
$x+1=b$.

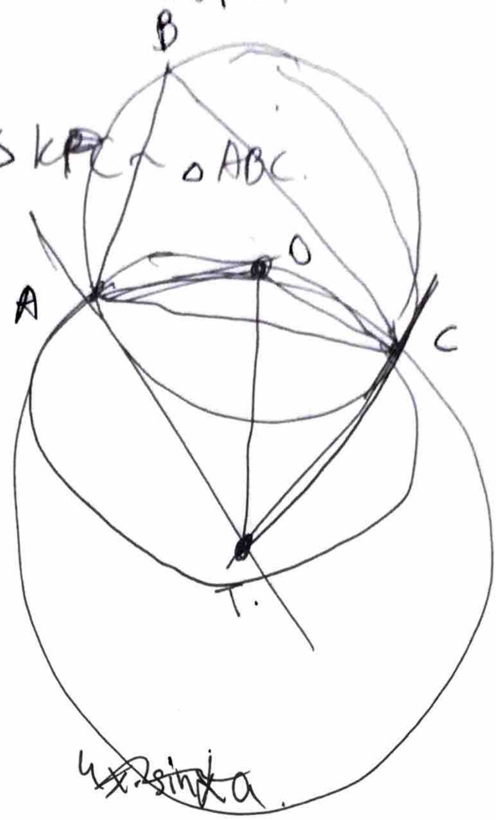
$2x^2-3x+5=c$.

$$\begin{cases}\log_a b=\log_c a.\\ 2\log_c a=\log_b c+1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_a b\log_a c=1.\\ \log_c \frac{a^2}{c}\log_c b=1\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\begin{cases}\\ \end{cases}$

ЧЕРНОВИК





$\triangle KPC \sim \triangle ABC$

~~4x.sin α~~

~~84n2~~

$\frac{4x^2\cdot 7}{\sqrt{58}}\cdot 2 = \frac{56}{\sqrt{58}}x.$

$\frac{4x\cdot 3x \cdot \sin 2\alpha}{2} = 21$

49.

$4x^2 \sin\alpha\cos\alpha = 7.$

$tg\,\alpha = \frac{3}{7}.$ $\quad 7\sin\alpha = 3\cos\alpha.$

$\left(\frac{49}{9}+1\right)\sin^2\alpha = 1$

$\frac{7}{\sqrt{58}}$ и $\frac{3}{\sqrt{58}}.$

$58 = 29..$

$24|35.\; 4x^2 \cdot \frac{\cancel{7}\cdot 3}{58} = \cancel{7}$

Морковник.

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 5\cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$

a, b, c → $\boxed{5 \text{ и } 7}$ только.

1 число с 1 7 и число с 16 − 7.

7) $16\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 15\cdot 3\cdot 2 = 90$.

5) $18\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 6\cdot 17 = 60 + 42 = 108$.

$\boxed{90\cdot 108 = 10800 - 1080}$.

17
34
68
34

17
17
34
68·4
34
102

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$. О = 9.

$\log_3 9$ $\log_9 9$ | $\log_{x+1}$

$\frac{1}{2}\log_{(2x-3)}(x+1)$.

$\log_a b = \log_c a$

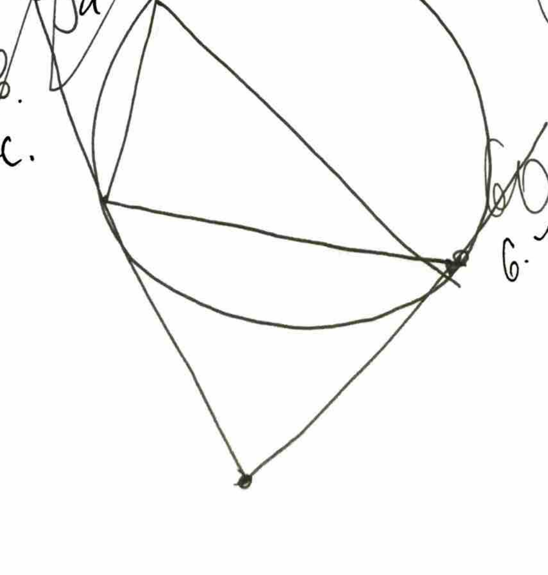
$\log_a b \cdot \log_a c \neq 1$

$\log_a b = \log_c a$.

$\log_a b = \frac{1}{\log_a c}$

$a^x = b$.

$a^{\frac{1}{x}} = c$.



60

$6\cdot 7 = 42$.

102.

60.

$10200 - 1020 = 9180$

$2\log_{(2x-3)}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{(2x-3)}(x+1) \cdot \log_{(2x-3)} 2x^2-3x+5 = 1$

ЧЕРНОВИК

$2\log_{(2x-3)}(x+1)$; $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$; $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log_{(2x-3}(x+1)\log_{(2x-3)} 2x^2-3x+5 = 1$

$2\log_{(2x-3)}(x+1) =$

$2x-3 = a \quad (x+1) = b \quad (2x^2-3x+5) = c$

$2\log_a b = 2\log_c a$

$2\log_c a - 1 = \log_b c$

$\log_a b \log_a c = 1$

$\log_c \frac{a}{c} \cdot \log_c b = 1$

$a^{x} = b \quad a^{\frac{1}{y}} = c$

$\log_c a^{1-\frac{1}{y}} \log_c a^{y} = 1$

$(1-\frac{1}{y})y \log_c^2 a = 1$

$(y-1)\log_c^2 a = 1$

49

(b) α, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$ $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$4x$. $\frac{4 \times \sqrt{58}}{3} = \frac{a\,58}{2 \cdot 21}$

$4x = \frac{a\sqrt{58}}{14}$

$\frac{56}{\sqrt{58}} x = a$

17

34/24

$AC^2 = 49x^2 + \frac{56^2}{58}x^2 + \frac{14 \cdot 56}{\sqrt{58}} x^2 \cdot \frac{7}{\sqrt{58}}$

$\frac{7x \cdot 56}{\sqrt{58}} x \cdot \frac{3}{\sqrt{58}} = 49 \cdot 2$

$x^2 \cdot \frac{49 \cdot 4}{58} = 49 \cdot 2$

$x = \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{12}}$

$AC^2 = 49\left(\frac{58}{12}\right) + \frac{56^2}{\cancel{58}} \cdot \frac{\cancel{58}}{12} - \frac{14 \cdot 56}{\cancel{58}} \cdot 7 \cdot \frac{\cancel{58}}{12}$

$AC^2 = \frac{49 \cdot 58}{12} - \frac{49 \cdot (16 \cdot 7)}{12} + \frac{56^2}{12}$

$\frac{49}{12}(58 + 64 - 102)$

$$\begin{array}{r} 58 \\ 64 \\ \hline 122 \\ 102 \\ \hline \end{array}$$

$AC = \frac{49 \cdot 5}{3} = 7\sqrt{\frac{5}{3}}$