Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101526**

ID профиля: **283716**

Вариант 21

Обозначим $a = a_1$ b – шаг прогрессии, т.е. $a_{i+1} - a_i$.
Тогда $a_i = a + b(i-1)$
$a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ т.к. прогрессия возрастает.
$\Rightarrow b$ может равняться $1; 2; 3; 4; \ldots$

$$\begin{cases} a_8 a_{17} > S + 27 \\ a_{11} a_{14} < S + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+7b)(a+16b) > S+27 \\ S+60 > (a+10b)(a+13b) \end{cases}$$

Сложим полученные неравенства:

$$\cancel{a^2} + \cancel{23ab} + 7b \cdot 16b + \cancel{S} + 60 > \cancel{S} + 27 + \cancel{a^2} + \cancel{23ab} + 10b \cdot 13b$$

$$130b^2 - 112b^2 < 60 - 27$$

$$18b^2 < 33$$

$$b^2 < \frac{33}{18}$$

$b = 1$ – подходит т.к. $1^2 < \frac{33}{18}$

$b \geq 2$ – не подходит т.к. тогда
$b^2 \geq 4 = \frac{72}{18} > \frac{33}{18}$

$$S = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+6b) = 7a + 7 \cdot 6/2\, b =$$
$$= 7a + 21b = 7a + 21$$

С учётом $b = 1$:

$$\begin{cases} a^2 + 23a + 112 > 7a + 21 + 27 \\ a^2 + 23a + 130 < 7a + 21 + 60 \end{cases}$$

№1 (продолжение) Чистовик лист 2 из 9

$$\begin{cases} a^2+16a+64>0 \\ a^2+16a+49<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+8)^2>0 \iff a\neq -8 \\ a^2+16a+49<0 \; (*) \end{cases}$$

$(*)\; a^2+16a+64<15$

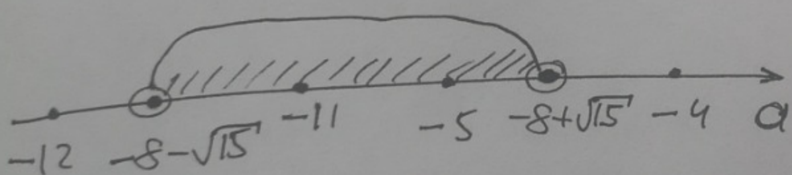
$(a+8)^2<15$

$$\begin{cases} a+8>-\sqrt{15} \\ a+8<\sqrt{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>-8-\sqrt{15} \\ a<-8+\sqrt{15} \end{cases}$$

$\sqrt{15}\in(\sqrt{9};\sqrt{16}) \Rightarrow \sqrt{15}\in(3;4)$

$$\begin{cases} -8-\sqrt{15}\in(-8-4;-8-3) \\ -8+\sqrt{15}\in(-8+3;-8+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -8-\sqrt{15}\in(-12;-11) \\ -8+\sqrt{15}\in(-5;-4) \end{matrix}$$



Из этого неравенства получаем

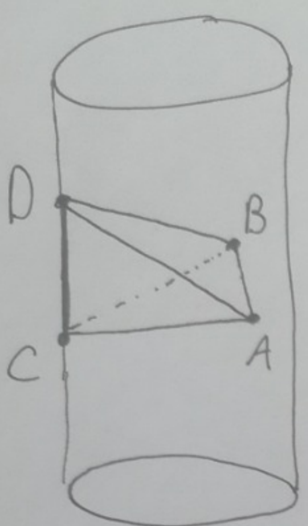
$a\in\{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5\}$, но -8 – не подходит

$a_1=a$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$

N2

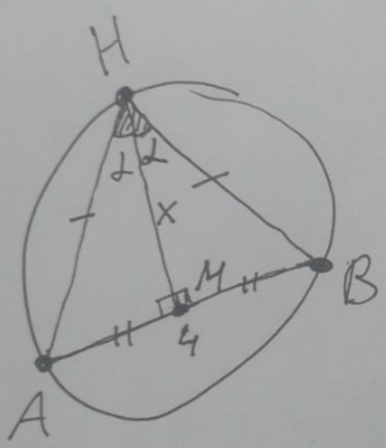
Чистовик лист 3 из 9



$\triangle ADC = \triangle BDC$ по 3 сторонам

$\Rightarrow$ Высоты из A и B на CD попадают в одну точку (обозн. H)

Тогда H, A и B лежат в плоскости $\perp CD$ (а, значит, $\parallel$ основанию цилиндра). $\Rightarrow$ Эта плоскость даёт сечение цилиндра — окружность с радиусом цилиндра R.



AH = AB как соотв. высоты равных $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$

Пусть M — середина отрезка AB.
HM — медиана ($\Rightarrow$ высота и биссектриса) р/б $\triangle AHB$.
Пусть x — длина HM.

$$AH = \sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{x^2+4}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\cdot x}{x^2+4}\cdot 2 = \frac{4x}{x^2+4}$$

Тогда по т. синусов для $\triangle AHB$: $\frac{4}{\sin 2\alpha} = 2R$

$$2R = \frac{4}{\frac{4x}{x^2+4}} = \frac{x^2+4}{x}$$

$\boxed{\text{№2(продолжение)}}$ Чистовик лист 4 из 9

~~x > 0, иначе ребра AB и CD пересекались бы~~

Найдём значение x, при котором $2R$ минимально:

$$\cancel{\left(\frac{x^2+4}{x}\right)' = x+4x = \frac{x^2+4-2x\cdot x}{x^2} = 4}$$

$$\left(\frac{x^2+4}{x}\right)' = (x+4x^{-1})' = 1-4x^{-2} = 1-\frac{4}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 4$$

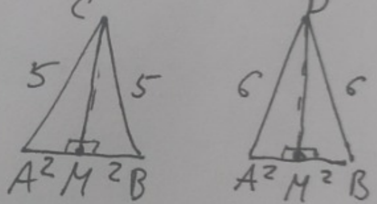
$$x = 2$$

(*) $x \neq 0$ т.к. тогда все ребра тетраэдра лежали бы в одной плоскости

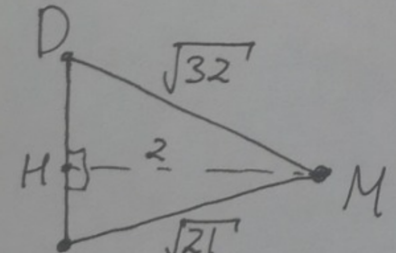
$\cdot\, x \geq 0$ т.к. x – расстояние.

Из $\triangle ABD$: $DM = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

Из $\triangle ABC$: $CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$



Рассмотрим $\triangle CDM$:



Возможны 2 случая:

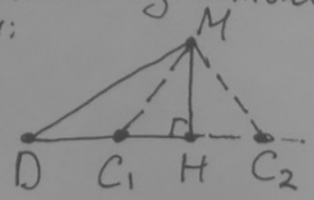
1) $\angle MCD > 90°$ и высота из M падает на продолжение DC за C.
2) $\angle MCD \leq 90°$ и высота падает на CD.

$*\angle CDM < \angle MCD \Rightarrow$ не может быть $> 90°$

① $DC = DH - CH = \sqrt{32-4} - \sqrt{21-4} = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

② $DC = DH + CH = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

*Оба случая реализуются т.к. $MH < CM < DM$. Для получения этих треугольников можно сначала построить $\triangle MDH$ с известными сторонами и отложить CM в две стороны:



$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{28}+\sqrt{17} \text{ и } \sqrt{28}-\sqrt{17}}$

21101526 (U283716 M1301495)

№3

Чистовик лист 5 из 9

Неравенство $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ в координатах $(x;y)$ задаёт множество точек круга с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{20}$. Площадь круга зависит только от радиуса $\Rightarrow$ a и b могут быть любые (должна быть хотя бы одна пара, удовлетворяющая системе, чтобы существовала хотя бы одна фигура M).

$a=b=0$ подходит т.к. $\underbrace{0^2+0^2}_{0} \le \min(\underbrace{8\cdot 0-4\cdot 0}_{0}; 20)$

Площадь круга M $S=\pi R^2=\pi\cdot\sqrt{20}^2=20\pi$

$\boxed{\text{Ответ: } 20\pi}$

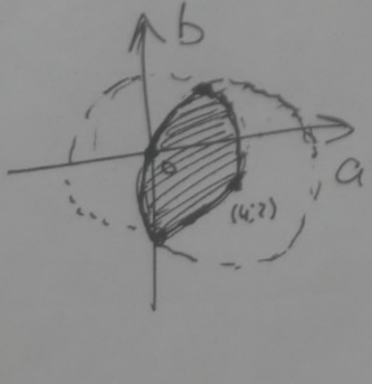
Можно найти все подходящие пары $(a;b)$:

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20) \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$

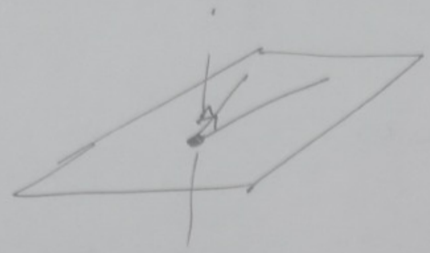
$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$

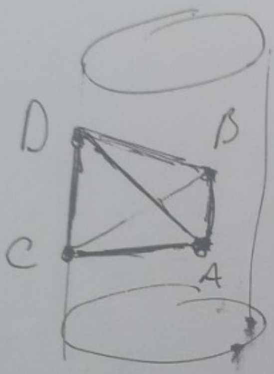
* расстояние от $(0;0)$ до $(4;-2)$ равно $\sqrt{16+4}=20$



21101526 (U283716 M1301495)

Черновик лист 6 из 9





$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(x + 4x^{-1})' = 1 - 4x^{-2}$$

$$1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{\cdot}$$

Черновик лист 7 из 9

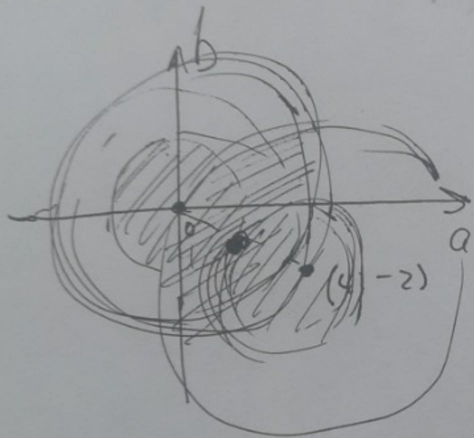
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +81 \\ \hline 130 \end{array}$$

$$\begin{cases} a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

$7 \cdot 16 = 70 + 42 = 112$



$$\begin{array}{r} 70 \\ -21 \\ \hline 49 \end{array}$$

$112 - 21 - 27 =$

$= 112 - 48$

$$\begin{array}{r} 112 \\ -48 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ +18 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ +36 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ +48 \\ \hline 112 \end{array}$$

$a^2+b^2 = 5 \le \min(16+4, 20) = 20$

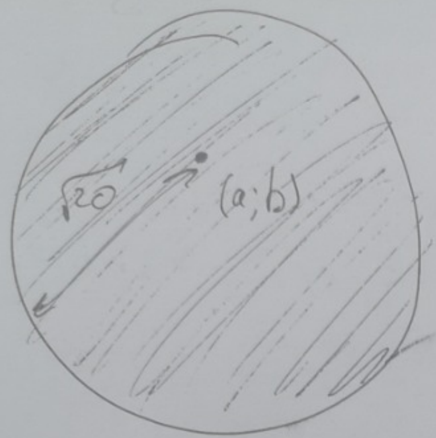
1

$a^2+23a+112 > 7a+21+27$

$1^2+1^2 \le \min($

21101526 (U283716 M1301495)

Черновик лист 8 из 9



$$\frac{2R}{\sin 90^\circ} = \frac{4}{\sin 2\alpha}$$

$$2R = \frac{\cancel{4}}{\frac{\cancel{4}x}{\cancel{x^2}+4}}$$

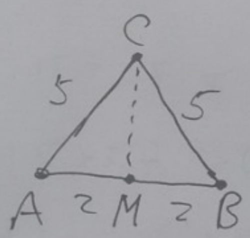
$$\boxed{2R = \frac{x^2+4}{x}}$$

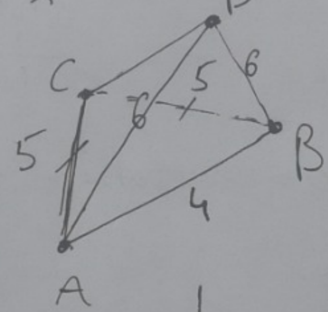
$$S = \pi R^2 = 20\pi$$

$$\left(\frac{x^2+4}{x}\right)' = \frac{2x\cdot x-(x^2+4)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2-x^2-4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = 0$$

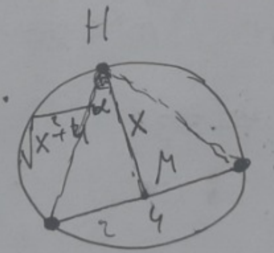
$x=2$





$CM^2 = 25-4=21$

$CM = \sqrt{21}$

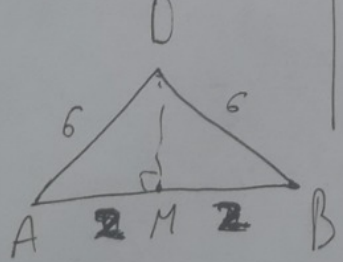


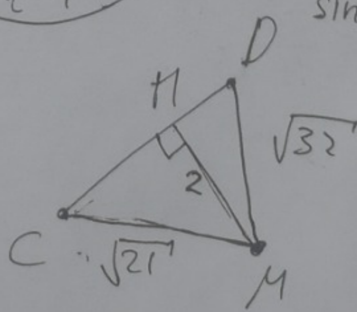
$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{x\cdot 2}{x^2+4} =$$

$$= \frac{4x}{x^2+4}$$





$DM^2 = 36-4 = 32$

$DM = \sqrt{32}$

$CH^2 = 21-4=17$

$DH^2 = 32-4 = 28$

$CH+DH = \pm\sqrt{17} \pm \sqrt{28}$

21101526 (U283716 M1301495)

Черновик лист 9 из 9

1) a

2) $a+b$

3) $a+2b$

$$S = 7a + b(1+2+3+\ldots+6) =$$
$$= 7a + b\cdot 7\cdot 6/2 = 7a+b\cdot 7\cdot 3 =$$
$$= 7a + 21b$$

8) $a+7b$

17) $a+16b$

11) $a+10b$

14) $a+13b$

~~10~~ 130

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{cases} (a+7b)(a+16b) > 7a+21b+27 \\ (a+10b)(a+13b) < 7a+21b+60 \end{cases}$$

$70+42=112$

$$\begin{cases} a^2+23ab+7\cdot 16b^2 > 7a+21b+27 \\ a^2+23ab+10\cdot 13b^2 < 7a+21b+60 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ -112 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\cancel{a^2}+\cancel{23ab}+7\cdot 16b^2+\cancel{7a}+\cancel{21b}+60 > \cancel{a^2}+\cancel{23ab}+10\cdot 13b^2+\cancel{7a}+\cancel{21b}+27$$

$$7\cdot 16b^2+60 > 10\cdot 13b^2+27$$

$$10\cdot 13b^2 - 7\cdot 16b^2 < 33$$

$$18b^2 < 33$$

$$b^2 < \frac{33}{18}$$

$$b = 1$$

$$1^2 = \frac{18}{18}$$

$$2^2 = 4 = \frac{72}{18}$$

21101526 (U283716 M1301495)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

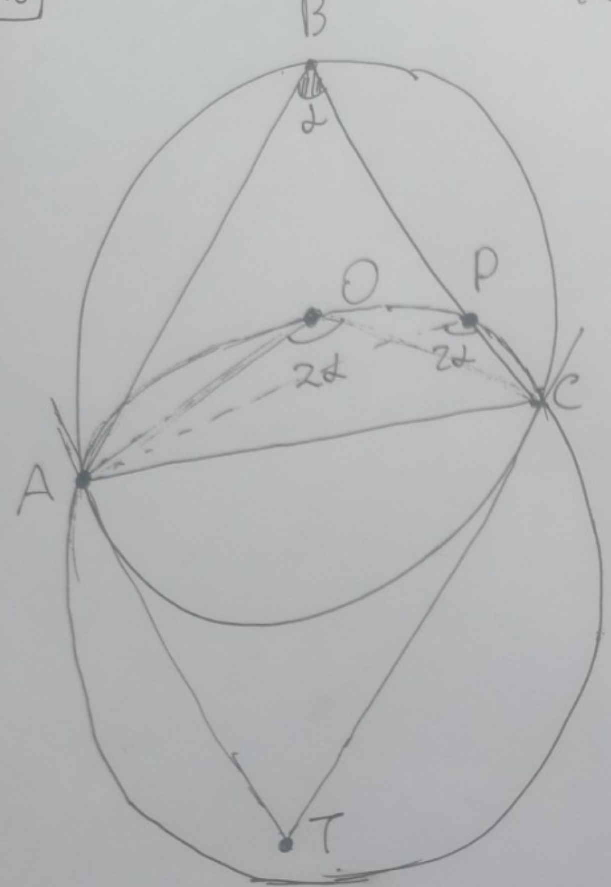
Шифр: **21101526**

ID профиля: **283716**

Вариант 21

N6

Чистовик лист 2 из 7



$\begin{cases} \angle OAT = 90^\circ \\ \angle OCT = 90^\circ \end{cases}$

т.к. это углы между радиусом и касательной.

$\Rightarrow \angle ATC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle AOC =$

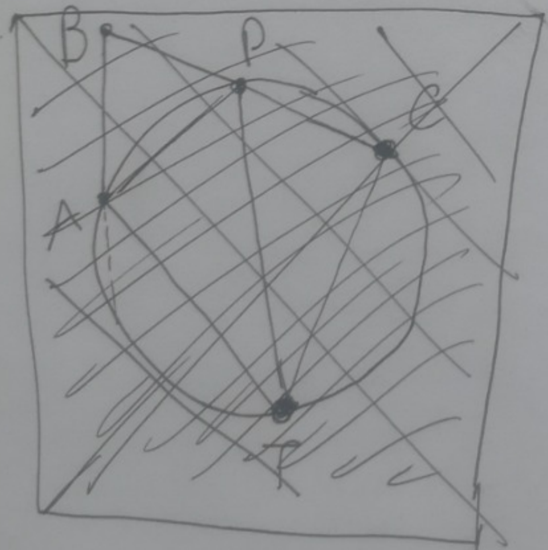
$= 180^\circ - \angle AOC$

$\Rightarrow$ T лежит на окружности, проходящей через A, O и C. Причём OT - диаметр т.к. $\angle OAT = 90^\circ$

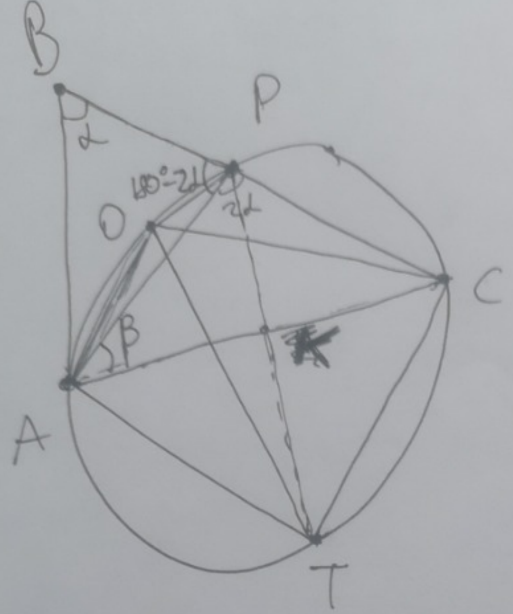
Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = 2\alpha$

$\angle AOC$ и APC опираются на одну дугу окр. через A, O, C.

$\Rightarrow \angle APC = 2\alpha$



$\boxed{\text{№6 (продолжение)}}$ Чистовик лист 3 из 7



1) $\angle BAP = 180° - \alpha - (180° - 2\alpha) =$

$= \alpha$

$\Rightarrow \angle BAC = \alpha + \beta = \angle AOT$

2) $\angle APT = \frac{1}{2} \angle A$[illegible]$ = \alpha$

3) $\angle CPT = \frac{1}{2} \angle APC = \alpha$ $= \angle COT$

$\Rightarrow \angle TAC = \angle CPT$ (опир. на дугу)

$\Rightarrow \angle PAT = \alpha + \beta$.

$\Rightarrow \triangle BCA \sim \triangle PTA$ по 2 углам.

$\Rightarrow$ P делит BC в том же отношении, что K – PT

$AK : KC = 12 : 9 = 4 : 3$

APCT – вписанный $\Rightarrow$

$НОД(a;b;c) = 35$ Черновик лист 5 из 7

$\Rightarrow a = 35x$
$b = 35y$
$c = 35z$

Числа сост. только из 5 и 7.

$НОК(a;b;c) = \cancel{5^{18}} \; 5^{18} \cdot 7^{16}$

$5^{17} \; 7^{15}$

$2^{\log_{2x-3}(x+1)}$ $2^{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)}$

$a = 2x-3$, $b = x+1$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2x^2-3x+5 = (2x-3)(x+1) - 2x + 8$

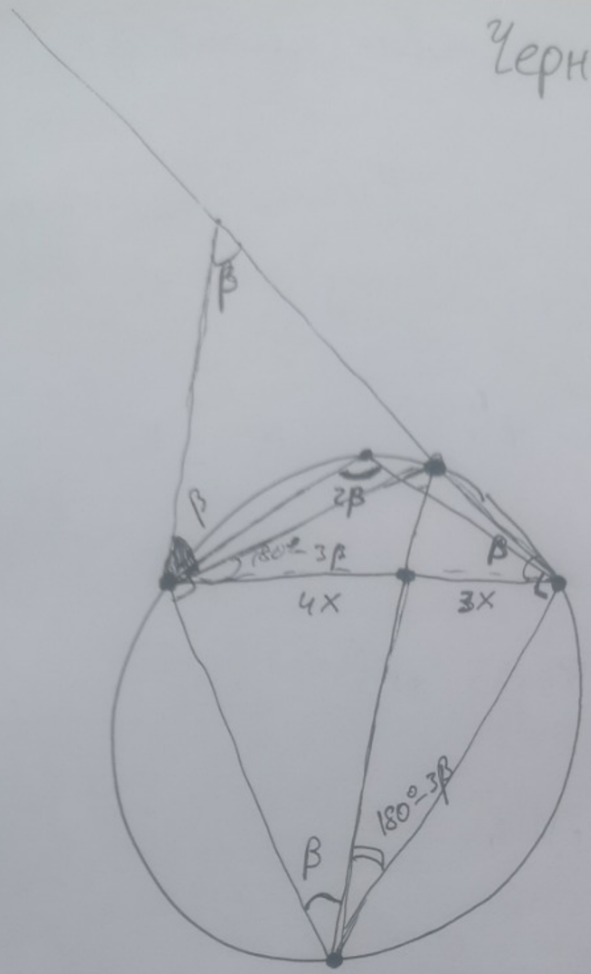
$2x^2-x-3$

$2^{\log_a b}$ $2^{\log_{ab-2x-8} b}$

$\log_b($

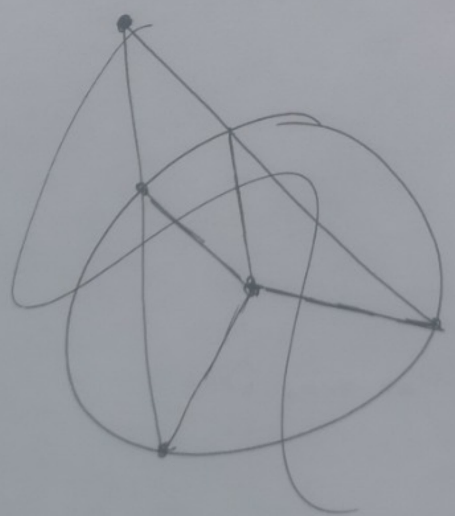
21101526 (U283716 M1301496)

Черновик лист 4 из 7



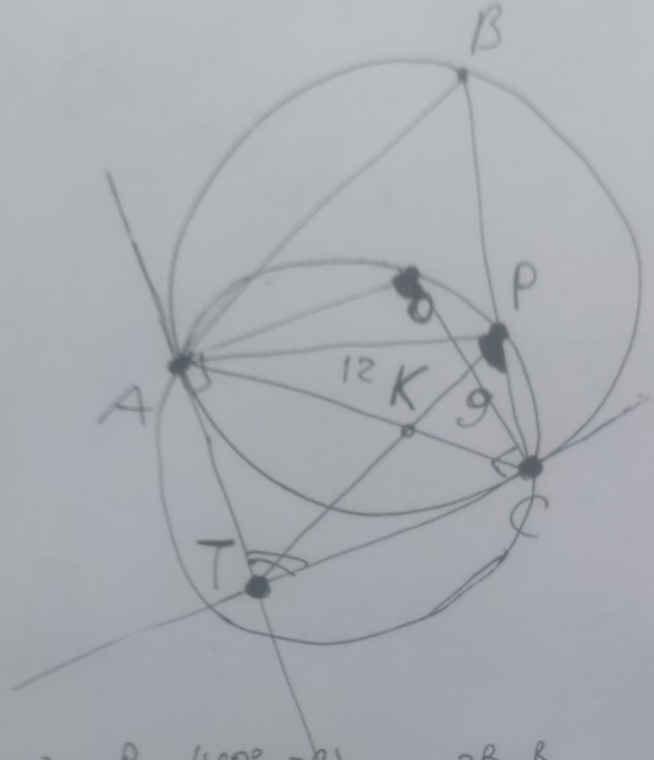
$$\frac{3}{7} S = 21$$

$$\underline{S = 49}$$



Черновик лист 6 из 7

$180° - 3\beta$

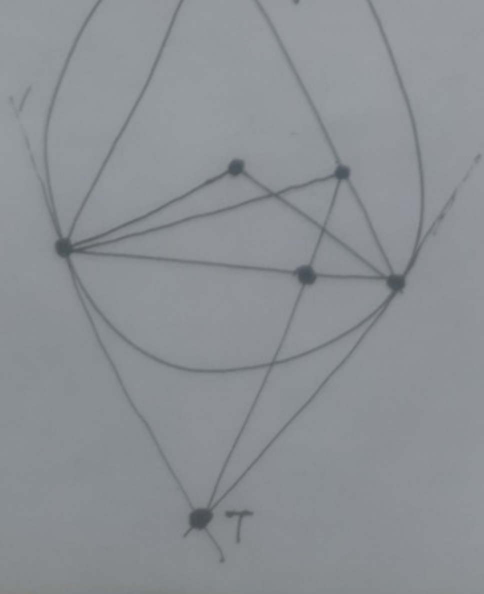


$$\frac{TK}{KP} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

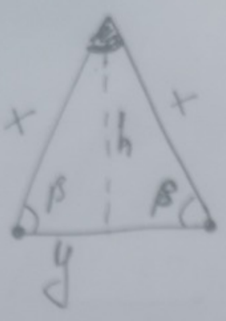
$$\frac{180° - \beta - (180° - 3\beta)}{2} = \frac{3\beta - \beta}{2} = \beta$$

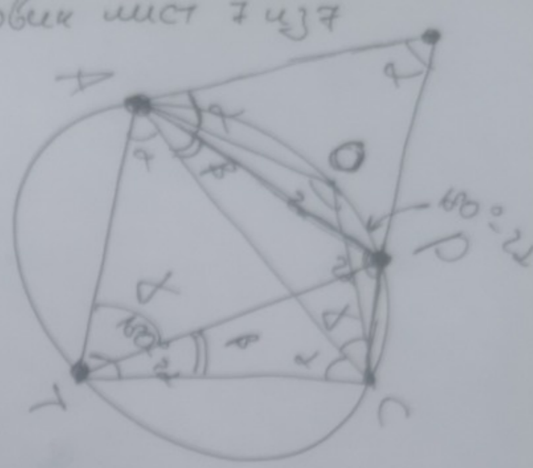
APCT − вписанный

$$180° - (180° - 3\beta) - 90° = 3\beta - 90°$$



Черновик лист 7 из 7





$\frac{h}{y} = \frac{3}{7}$

$y = \frac{3}{7}h$

$\to 2y = \frac{6}{7}h$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7}h \cdot h = \frac{3h^2}{7}$

$h^2 = \frac{7}{3}S$

$\triangle BCA \sim \triangle PTA$

$180° - (180° - 2\alpha) - \alpha = \alpha$

$180° - 2\alpha - \beta$

$58 = 2 \cdot 29$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 16 \\ \hline 108 \\ +18 \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 288 \\ \times 288 \\ \hline 576 \\ +34 \\ \hline 610 \end{array}$$

$x^2 = \frac{9}{49}h^2 + h^2 = \frac{58}{49}h^2 = \frac{58}{49} \cdot \frac{7}{3}S = 58 \cdot 7/3$

$= 2R^2(1 - \cos(360° - 4\alpha))$

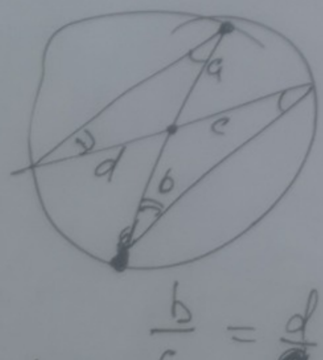
$2r^2(1 - \cos 2\alpha) =$

$360° - 4\alpha$

2α

$CK \cdot KA$

$$\begin{array}{r} 610 \\ \times 6 \\ \hline 3660 \end{array}$$



$\frac{b}{c} = \frac{d}{a}$

$ab = cd$

$AK \cdot KC = CK \cdot KA$

$\frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$

№4

Все 3 числа состоят из ненулевых степеней 5 и 7, степеней других простых они не содержат.
Одно из чисел содержит 5^{18}, а другие числа не превосходящие степени. Аналогично 7^{16}.

1 случай) Это одно число $5^{18} \cdot 7^{16}$. Тогда одно число должно быть равно ровно $5 \cdot 7 = 35$, а другое – любое, содержащее степени "5" от 1 до 18 и "7" от 1 до 16.

Таких способов $6 \cdot \underbrace{16 \cdot 18}$,

6 – способы расставить (a; b; c)

$16 \cdot 18$ – способы выбрать оставшееся число.

2 случай) 5^{18} и 7^{16} содержат разные числа

2.1) $5^{18} \cdot 7$; $5 \cdot 7^{16}$; x – можно выбрать x $16 \cdot 18 - 1$ способами

2.2) $5^{18} \cdot 7$; $5^{>1} \cdot 7^{16}$; x – можно выбрать 16 способами

2.3) $5^{18} \cdot 7^{>1}$; $5 \cdot 7^{16}$; x – можно выбрать 18 способами

2.4) $5^{18} \cdot 7^{>1}$; $5^{>1} \cdot 7^{16}$; x – можно выбрать $x = 35$.

$\Rightarrow 6(16 \cdot 18 - 1 + 16 + 18 + 1) = 6(16 \cdot 18 + 16 + 18)$ способов.

$\Rightarrow$ Всего $6(2 \cdot 16 \cdot 18 + 16 + 18) = 6(576 + 34) = 6 \cdot 610 = 3660$

$\boxed{\text{Ответ: } 3660}$