Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101466**

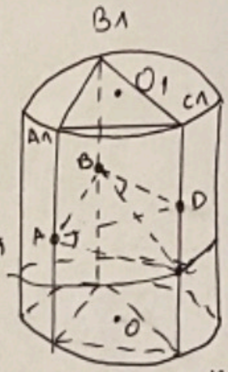
ID профиля: **195727**

Вариант 21

Чистовик №2

Дано: ABCD-тетр, тетр. впис. в цил. с рад. R, $CD \parallel OO_1$

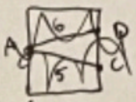
$AB=4$, $AC=BC=5$, $AD=BD=6$, R – наим. $CD=?$



Решение:

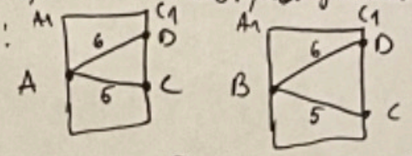
1) Все образующие ~~конуса~~ цилиндра паралл. оси, а т.к. все вершины ABCD лежат на бок. повер, значит C и D лежат на 1 образующей.

2) ~~Проведем сеч. через D, A, B, C~~, через ABD



опустим проек. т. A, B, C на верхнее основ., получатся точки A_1, B_1, C_1.

Сечение через A, C, D и B, C, D :



$\triangle ADC = \triangle BDC$ (по 3 стор.)

Чтобы R было мин., AB – должен быть диаметр.

Сеч. через C пар. оси будет окружн. с цен. O_2, аналог. для D окружн. с цен. O_3.

(высота)

Чистовик №1

$S = a_1 + \ldots + a_7 = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$ d – разность прогрес.

$a_8 a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2+23a_1d+112d^2$

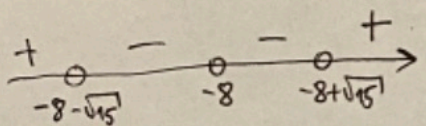
$a_{11} a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2+23a_1d+130d^2$

$\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ S+60 > a_{11}a_{14} \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ 7a_1+21d+60 > a_1^2+23a_1d+130d^2 \end{cases}$ Сложим левые и правые части:

$a_1^2+23a_1d+112d^2+7a_1+21d+60 > 7a_1+21d+27+a_1^2+23a_1d+130d^2$

$33 > 18d^2$ $d^2 < 1\frac{15}{18}$ Т.к. прогрес. состоит только из целых чисел, то и $d \in \mathbb{Z}$, а т.к. прогрес. возрас., то $d>0$, а т.к. $d^2 < 1\frac{15}{18}$, значит $d=1$.

$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112-7a_1-21-27>0 \\ a_1^2+23a_1+130-60-21-7a_1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$



$a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8) \cup (-8; -8+\sqrt{15})$. Выберем целые значения a_1.

$3 < \sqrt{15} < 4$, тогда $a_1 = \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

$-12 < -8-\sqrt{15} < -11$, $-5 < -8+\sqrt{15} < -4$

Ответ: $\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Чистовик

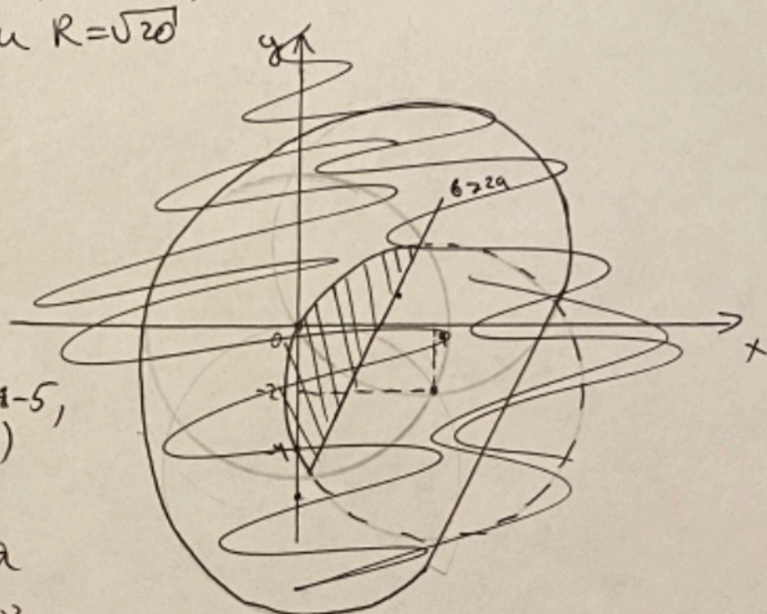
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$$

№3

I) $8a-4b\le 20$ О.Р.З.: $b\ge 2a-5$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20\end{cases}$$

Решением ~~...~~ второго не-ва будет часть круга, огранич. прямой $b\ge 2a-5$, все эти решения для $(a;b)$ будут подставлятся в первое нер-во и для кажд. $(a;b)$ будет окруж. с центром $(a;b)$ и $R=\sqrt{20}$



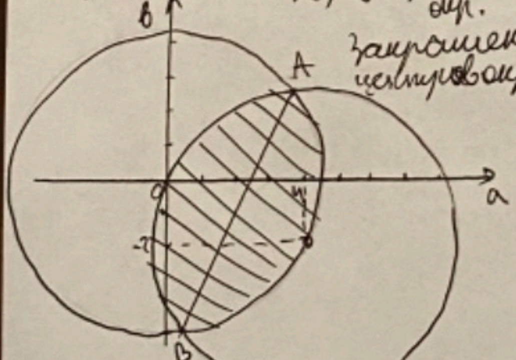
II) $20<8a-4b \Leftrightarrow b<2a-5$

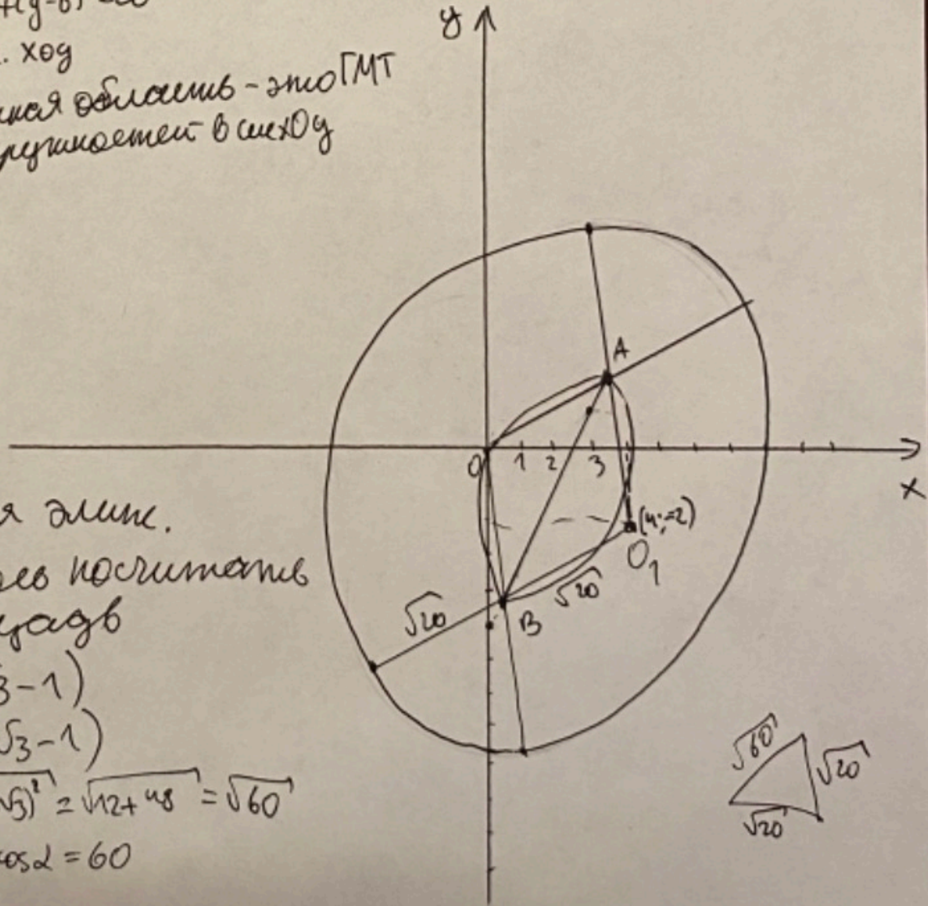
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

Решением второго нер-ва системы будет часть круга огран. прямой $b<2a-5$, причем решение для $(a;b)$ в I и II случае можно совместить и получится такая фигура:

т.к. (a,b) - цен. окр. для $(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$ все решения $(a;b)$ - центры в сис. xOy окр.

Запрошенная область - это ГМТ центров окружностей в сис xOy





$$\begin{cases}a^2+b^2=20\\ b=2a-5\end{cases}$$

$a^2+4a^2-20a+25=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0$

$a=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}$

$a=2\pm\sqrt{3}$

Получится элипс. Осталось посчитать его площадь

$A(2+\sqrt3;\ 2\sqrt3-1)$

$B(2-\sqrt3;\ -2\sqrt3-1)$

$AB=\sqrt{(2\sqrt3)^2+(4\sqrt3)^2}=\sqrt{12+48}=\sqrt{60}$

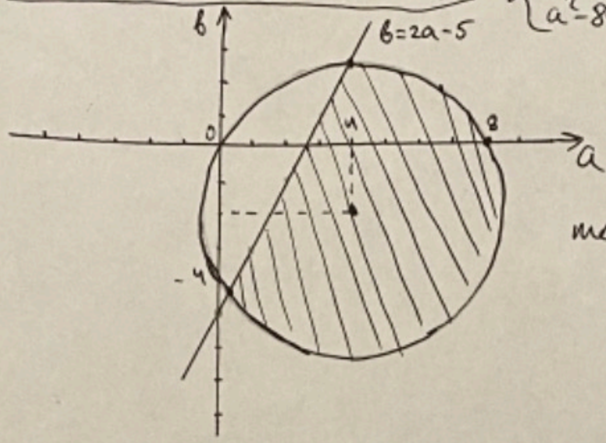
по т cos: $20+20-2\cdot 40\cos\alpha=60$

$\cos\alpha=-\dfrac{20}{80}=-\dfrac{1}{4}$

3

~~Чистовик~~

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

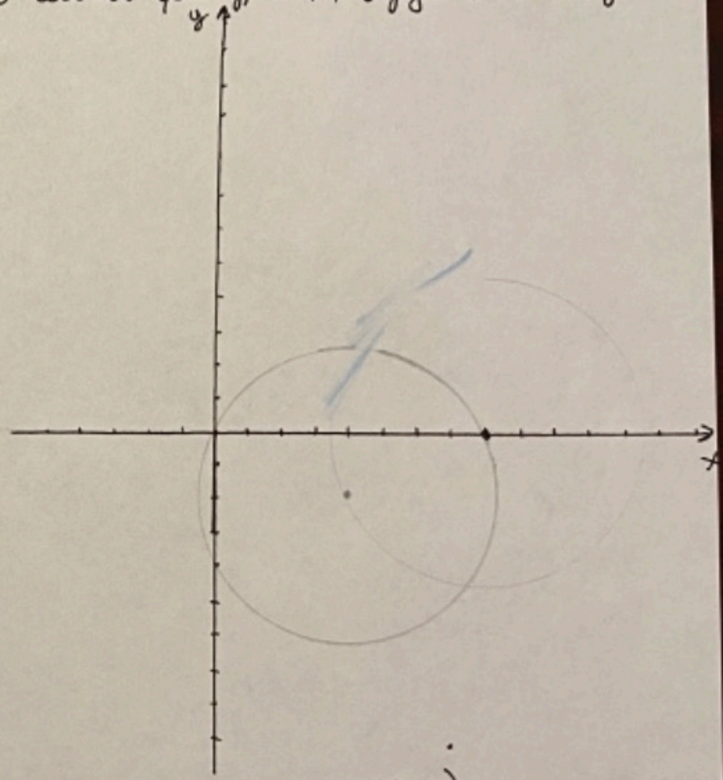


№3

I) $20 \geq 8a-4b \quad 4b \geq 8a-20 \quad b \geq 2a-5$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20\end{cases} \qquad \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20\end{cases}$$

Нам подходят только a, b из заштрихован. области, а т.к. (a;b) – центр. ~~окружн.~~ круга, то часть фигуры M будет выглядеть так:



$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 3 \\ \hline 48 \\ 12 \\ \hline 60 \end{array}$$

№1

$7 \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\frac{-116}{7}$ 112

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$ $\quad$ арифм. прогр. $\quad$ $a_8 \cdot a_{17} > S + 27$ $\quad$ $a_{11} a_{14} < S + 60$

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = a_1 + 13d$

$a_8 \cdot a_{17} = a_1^2 + 23da_1 + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 60 > \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 27 + \cancel{a_1^2} + \cancel{23da_1} + 130d^2$

$33 > 18d^2$ $\qquad$ $d = \pm 1$ $\quad$ $d = 1$

$18 + 15 = 33$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

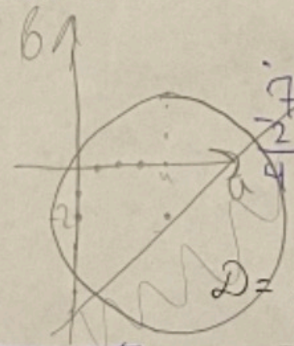
$a_1^2 + 23a_1 + 130 > 7a_1 + 21 + 60$

$16 \cdot 16 = 96$ $\qquad$ $49 \cdot 4 = 196$

$112 - 48 = 64$

$256 - 196 = 60$

$70 - 21 = 49$



$D =$

M-фир. $(x;y)$

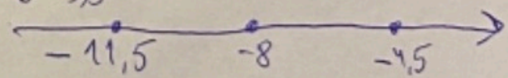
$\min(x;y)$ - мин. из x и y

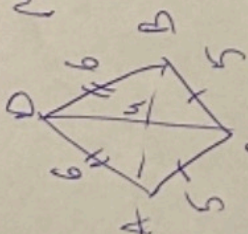
$\frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2}$

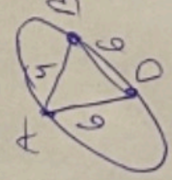
$-8 \pm \sqrt{15}$

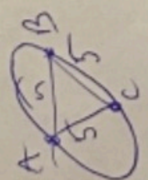
$3 < \sqrt{15} < 4$

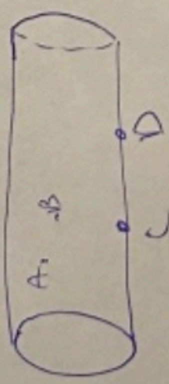
$-8 - 3{,}5$





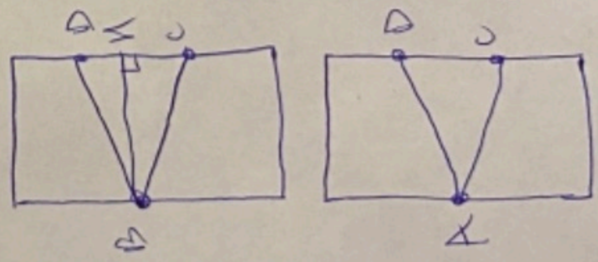


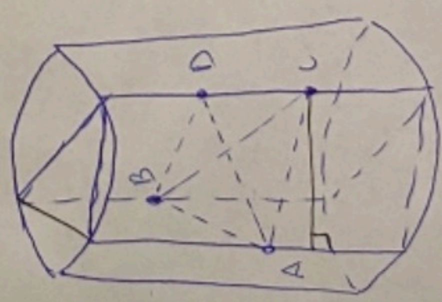




R - кош.

CD || осн.





$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

[illegible]

21101466 (U195727 M1299575)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101466**

ID профиля: **195727**

Вариант 21

Чистовик

№1 $\vdots 35$

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=5\cdot 7 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$ т.к. $НОД(a;b;c) \Rightarrow a \vdots 35, b \vdots 35, c \vdots 35$

$\Rightarrow$ все числа (a,b,c) состоят только из ~~…~~ 5 и 7 (множителей),

~~…~~ тогда пусть $a=5^{k_1}\cdot 7^{m_1}$, $b=5^{k_2}\cdot 7^{m_2}$, $c=5^{k_3}\cdot 7^{m_3}$

т.к. $НОД(a;b;c)=5\cdot 7 \Rightarrow$ ~~либо k_1, либо k_2, либо $k_3=1$, а либо m_1, либо~~ ~~…~~ хотя бы одно из чисел k_1,k_2,k_3 равно 1 и хотя бы одно из чисел m_1,m_2,m_3 равно 1.

т.к. $НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow$ хотя бы одно из чисел k_1,k_2,k_3 равно 18 и хотя бы одно из чисел m_1,m_2,m_3 равно 16. Четыре из 6 чисел известны. Найдем остальные: т.к. $НОК=5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow m_1,m_2,m_3 \le 16$, а $k_1,k_2,k_3 \le 18$, а т.к. $НОК=5\cdot 7$: $m_1,m_2,m_3 \ge 1$, $k_1,k_2,k_3 \ge 1$.

I случай: $k_1 \ne k_2 \ne k_3$ и $m_1 \ne m_2 \ne m_3$, тогда третье число из k_1,k_2,k_3 может быть равно $\{2;3;4;\dots;17\}$, а третье из m_1,m_2,m_3 $\{2;3;\dots;15\}$

тогда таких троек будет $3!\,3!\,14\cdot 16$

II случай: ~~…~~ $k_1=k_2\ne k_3$ и $m_1\ne m_2\ne m_3$ (или $k_1=k_3\ne k_2$, или $k_1\ne k_2=k_3$), тогда таких вариантов

$2\cdot\frac{3!\,3!\,14}{2!}=3!\,3!\,14$

Анал. для $k_1\ne k_2\ne k_3$, $m_1=m_2\ne m_3$ (или $m_1=m_3\ne m_2$, или $m_1\ne m_2=m_3$), тогда вариантов будет $\frac{2\cdot 3!\,3!\,16}{2!}=3!\,3!\,16$

III случай: $k_1=k_2\ne k_3$ (или ~~…~~ $k_1=k_3\ne k_2$, или $k_1\ne k_2=k_3$) и $m_1=m_2\ne m_3$ (или $m_1=m_3\ne m_2$, или $m_1\ne m_2=m_3$) вариантов будет $\frac{4\cdot 3!\,3!}{2!\,2!}=3!\,3!$

Тогда всего вариантов будет $36(14\cdot 16+14+16+1)=9180$

Ответ: 9180

21101466 (U195727 M1299576)

Чистовик

№5

$a_1=\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $b_1=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, & $c_1=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

I случай) $a_1=b_1=c_1+1$ II) $a_1=c_1=b_1+1$ III) $a_1+1=b_1=c_1$

О.Д.З.: $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x-3>0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \\ 2x-3\neq 1 \\ x+1\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \\ x>-1 \\ x>1{,}5 \end{cases}$

Пусть $a=2x-3$, $b=x+1$, $c=x(2x-3)+5$

$a_1=\log_{\sqrt{a}} b$, $b_1=\log_c a^2$, $c_1=\log_b c$

I) $b_1=a_1=c_1+1 \Leftrightarrow 2\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{1}{2}\frac{\ln a}{\ln c}=1+\frac{\ln c}{\ln b}$

$(\ln a)^2=4\ln b\ln c \Rightarrow \ln c=\frac{\ln^2 a}{4\ln b} \Rightarrow 2\frac{\ln b}{\ln a}=1+\frac{(\ln a)^2}{4(\ln b)^2}$

$a=2b-5$, тогда $2\frac{\ln b}{\ln(2b-5)}=1+\frac{(\ln(2b-5))^2}{4(\ln b)^2}$

$8\ln^3 b-4\ln^2 b\ln(2b-5)-\ln^3(2b-5)=0$, $\ln(2b-5)=k$

$8m^3-4m^2k-k^3=0$ Найдем $\ln b$, а значит и ответ. Аналогичные взаимовыражения будут для всех трех случаев.

Ответ: $(1{,}5;+\infty)$

2

Чистовик

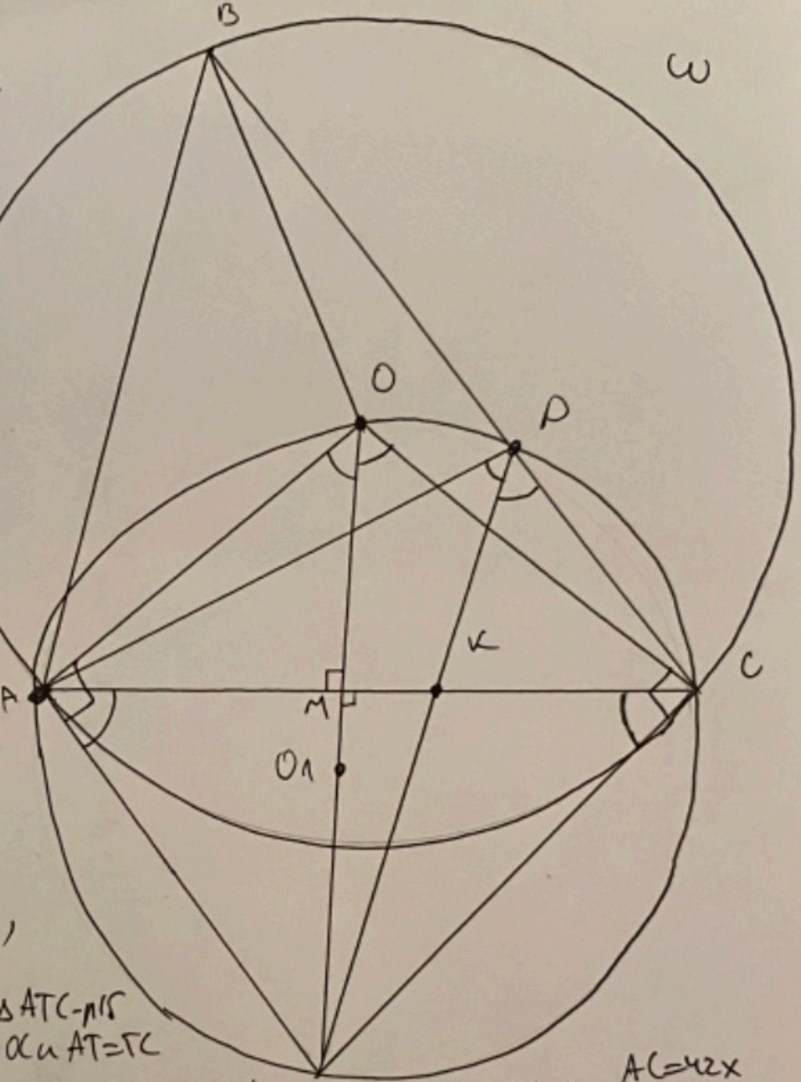
Дано: ΔABC, ω - опис. окр с цен. O, № 6

окр$(O_1; r)$, $A, O, C \in (O_1; r)$,

$(O_1; r) \cap BC = P$, AT и CT - кас,

$TP \cap AC = K$, $S_{APK} = 12$, $S_{CPK} = 9$

а) $S_{ABC} = ?$ б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$, $AC = ?$



Решение:

1) Пусть $AT \cap (O_1; r) = T_1$, $CT \cap (O_1; r) = T_2$, тогда, т.к. $\angle OAT_1 = OCT_2 = 90°$ (св-во кас), то OT_1 и OT_2 - диаметры T_1 и $T_2 \in (O_1; r)$, а т.к. из 1 т. не может быть двух диам., значит $T_1 = T_2$, а т.к. $AT_1 \cap CT_2 = T$, то $T_1 = T_2 = T$ (т.к. прям. перес. по 1 точке) значит $T \in$ окр. $(O_1; r)$

2) т.к. ω и $(O_1; r)$ - опис. окруж. около ΔABC и ΔAOC $\Rightarrow$ O и O_1 лежат на сер. перпен. к AC, а значит OT ($O_1 \in OT$) серед. перпен. к AC. $\Rightarrow \Delta AOC$ и ΔATC - р/б и $AO = OC$ и $AT = TC$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$ Д.п. $OO_1 \cap AC = M$ $AC = 42x$ $\Rightarrow AM = MC = \cancel{42x}\ 21x \Rightarrow KC = 18x$

$AK = 24x$, $MK = 3x$ (св-во)

т.к. ΔATC - р/б $\Rightarrow \angle CAT = \angle ACT \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{CT} \Rightarrow \angle APT = \angle TPC \Rightarrow PT$ - бис. (Т опис. угл)

$\angle AOT = \angle TOC = \angle APT = \angle TPC$ (Т опис. угл)

и $\angle CAT = \angle ACT$ $\Rightarrow$ $AOCT$ - дельтоид (по опред) PK - бис $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$

3

21101466 (U195727 M1299576)

НОД$(a;b;c) = 5\cdot 7$ => все числа хотя бы одна 5 и 7 и хотя бы одного 5 и 7 Черновик

НОК$(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16}$ => все числа $\le 5^{18}\ 7^{16}$ и одн. $5^{18}\ 7^{16}$

$a = 5^{k_1}\cdot 7^{m_1}$
$b = 5^{k_2}\ 7^{m_2}$
$c = 5^{k_3}\ 7^{m_3}$

$k_1 = 1,\ k_2 = 18$
$k_3 \in \{2;\dots;17\}$
$m_1 = 1$
$m_2 = 16$ $m_3 \in \{2;15\}$

$6\cdot(16\cdot 14$

1 18 1
1 16 1

+3+3+3+3

1 18
1 16

$\boxed{236}$

$$
\begin{array}{r}
16 \\
\times 14 \\
\hline
64 \\
16 \\
\hline
224 \\
12 \\
\hline
236
\end{array}
$$

$2x^2 - 3x + 4 = 0$
$x = 3 \pm \sqrt{9-}$

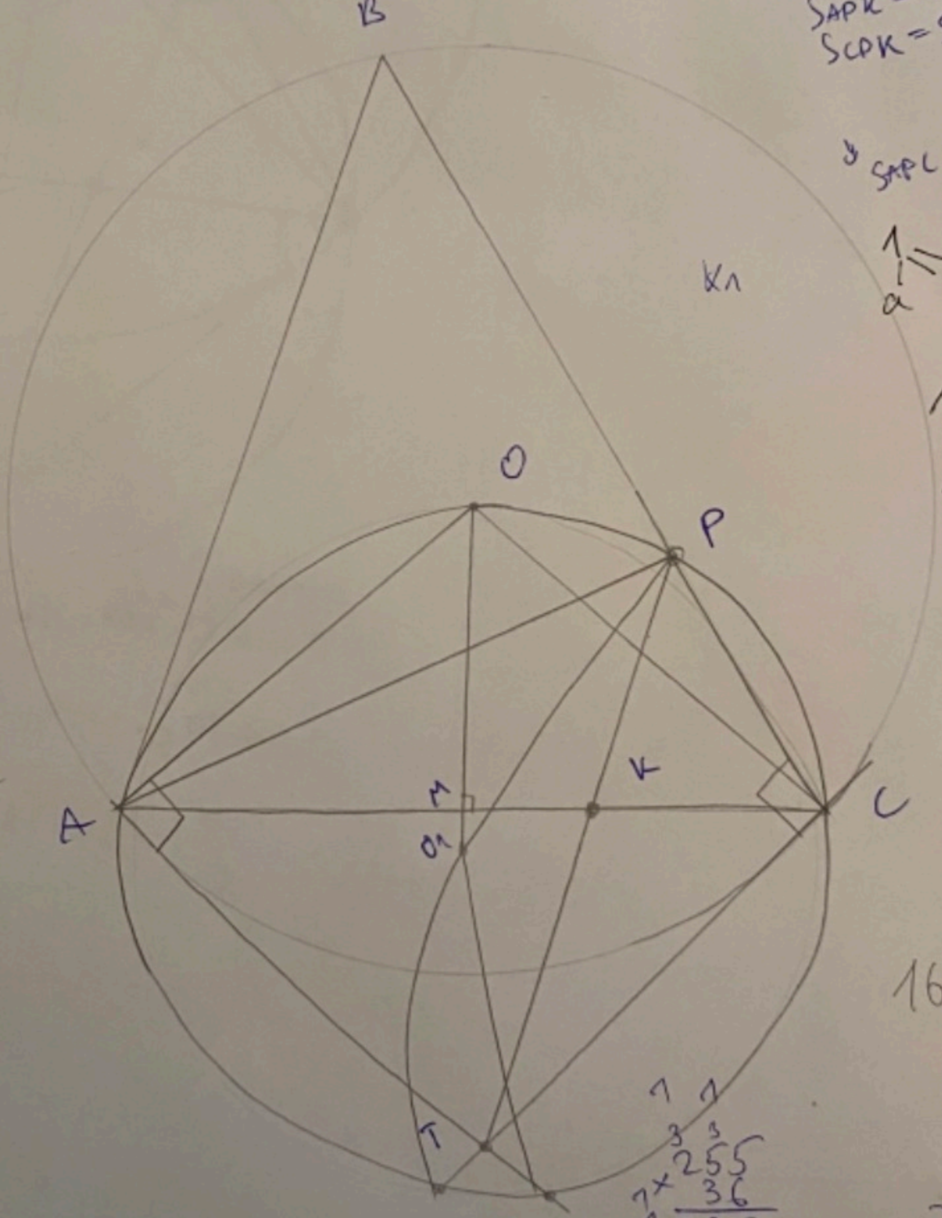
$S_{ABC} = ?$
$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$ найти $AC = ?$

$S_{APK} = 12$
$S_{CPK} = 9$

$S_{APC} = 21$

3!3!(16·14)+

14 16
a b a
1 17



1 1 C
a b x

1 1 2
1 1 2

1 2 2
1 1 2

1 1 2
2 2 1

2

2^2

$$
\begin{array}{r}
16 \\
\times 14 \\
\hline
64 \\
16 \\
\hline
224
\end{array}
$$

16

$$
\begin{array}{r}
255 \\
\times 36 \\
\hline
1530 \\
765 \\
\hline
9180
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
3131 \\
\hline
255 \\
\times 36 \\
\hline
1500 \\
765 \\
\hline
9150
\end{array}
$$

31101466 (U125727 M1299576)

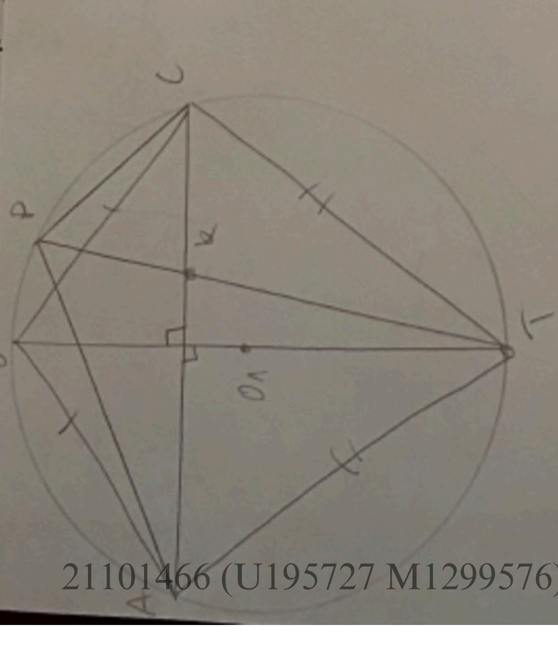
$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1),\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2,\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

Черновик

$a=2x-3$

$b=x+1$

$c=2x^2-3x+5$



21101466 (U195727 M1299576)