Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101257**

ID профиля: **374629**

Вариант 21

Чистовик

№1

По формуле суммы ариф прогрессии:

$S = \frac{a_1+a_7}{2}7 = \frac{2a_1+6d}{2}7 = (a_1+3d)7 = 7a_1+21d$

$a_8 \cdot a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2+23da_1+112d^2$

$a_{11} a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2+23da_1+130d^2$

Имеем по усл:

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ a_1^2+23da_1+130d^2 < 7a_1+21d+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1+112d^2 > 7a_1+21d+27 \quad (1) \\ 7a_1+21d+60 > a_1^2+23da_1+130d^2 \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{} +$$

$a_1^2+23da_1+112d^2+7a_1+21d+60 > 7a_1+21d+27+a_1^2+23da_1+$
$+130d^2$

$$60-27 > (130-112)d^2; \quad 33 > 18d^2$$

Поскольку сказано, что арифм. прогрессия возрастающая, то $d>0$, а т.к. арифм. прогрессия состоит из целых чисел, то $\min d$ - это разница двух ~~после~~ подряд идущих целых чисел $\Rightarrow$ $\min d = 1$; если $d \geq 2$, то усл $33>18d^2$ невыполнено $\Rightarrow$

$$\begin{cases} d \geq 1 \\ d < 2 \end{cases} \Rightarrow d=1; \text{подставим в (1)}$$

1

$a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27$;

Чистовик

№1

$a_1^2+16a_1+\overset{64}{\cancel{85}}>0 \Leftrightarrow (a_1+8)^2>0$

$\frac{D}{4}=8^2-\overset{64}{\cancel{85}}\cancel{<}0 \to$ нер-во выполнено для $\forall a_1 \neq -8$

подставим $d=1$ во (2)

$$\begin{cases} 7a_1+21d+60>a_1^2+23da_1+130d^2 \\ d=1 \end{cases} \to$$

$a_1^2+16a_1+49<0$

$\frac{D}{4}=\cancel{8^2-49<0}\ 8^2-49=64-49=15$

$a_1=-8\pm\sqrt{15} \to$

+ +

$-8-\sqrt{15}$ $-8+\sqrt{15}$ a_1

Имеем

$$\begin{cases} a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \\ a_1 \neq 8 \end{cases} \to \cancel{a_1} \to a_1 \in (-8-\sqrt{15}; 8) \cup (-8; -8+\sqrt{15})$$

Ответ: $a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8) \cup (-8; -8+\sqrt{15})$

②

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 & (1) \\ (a^2+b^2) \le \min(8a-4b,\ 20) & (2) \end{cases}$$

1) Разберёмся сначала со (2):

~~п~~ поймём когда $8a-4b \le 20$; $\to$ $4b \ge 8a-20$:

$b \ge 2a-5$, тогда

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b;\ 20)$:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b, \text{ при } b \ge 2a-5 \\ a^2+b^2 \le 20 \text{ при } b < 2a-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20, \text{ при } b \ge 2a-5 \\ a^2+b^2 \le 20,\ b < 2a-5 \end{cases}$$

Пл-ть aob:

нер-ва $b \ge 2a-5$ и $b < 2a-5$ на пл-ти aob

задают полуплоскости по разные стороны от

прямой $b = 2a-5$; ~~а-b~~

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$ задаёт ~~окр~~ круг — с центром O_1

$(4;-2)$ и радиуса $2\sqrt{5}$

$a^2+b^2 \le 20$ задаёт ~~окр~~ круг — с центром O_2 $(0;0)$ и радиуса $2\sqrt{5}$

Найдём пересечение данных окр. с прямой

$b = 2a-5$

$$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 = 20 \\ b = 2a-5 \end{cases}$$

$(a-4)^2+(2a-3)^2 = 20$

$a^2-8a+16+4a^2-12a+9=20$

$5a^2-20a+5=0;\quad a^2-4a+1=0$

чистовик

№3

$a^2-4a+1=0$

$$\begin{cases} a=2\pm\sqrt{3} \\ b=2a-5 \end{cases} \to \begin{matrix} (2+\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}-1) \\ (2-\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}-1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=20 \\ b=2a-5 \end{cases};\quad a^2+4a^2-20a+25=20$$

$$5a^2-20a+5=0$$

$$a^2-4a+1=0;\quad a=2\pm\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}-1),\ (2-\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}-1)$$

Как видим окр пересекают прямую в одних и тех же точках.

Так же можно заметить что окружности проходят через центры друг ~~дру~~ друга

$$\begin{cases} O_1(4;-2) \\ a^2+b^2=20 \end{cases} \to 16+(-2)^2=20 \text{ верно} \to O_1\in \text{окр } 2.$$

$$\begin{cases} O_2(0;0) \\ (a-4)^2+(b+2)^2=20 \end{cases} \quad (-4)^2+2^2=20 \text{ верно} \to O_2\in \text{окр } 1$$

Заметим, также что расстояние от окр до прямой это $\sqrt{5}$;

$$O_1: \begin{cases} \rho_1=\dfrac{|b-2a+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|-2-8+5|}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \\ O_1(4;-2) \end{cases}$$

$$O_2: \begin{cases} \rho_2=\dfrac{|b-2a+5|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|5-0+0|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \\ O_2(0;0) \end{cases}$$

Чистовик

№3

Здесь была использована формула расстояния от точки до прямой;

Также заметим что сер O_1O_2

точка $N\left(\frac{4+0}{2}; \frac{-2+0}{2}\right) = (2;-1)$ ∈ прямой $b = 2a - 5$

$\begin{cases} N(2;-1) \\ b = 2a-5 \end{cases} \to -1 = 4-5$ – верно ⇒ N ∈ прямой

расстояние $O_1N = O_2N = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} = \rho$ ⇒

$O_1N \perp$ прямой $b = 2a-5$ и $O_2N \perp$ прямой

Пусть еще $A(2-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}-1)$

$B(2+\sqrt{3}; 2\sqrt{3}-1)$

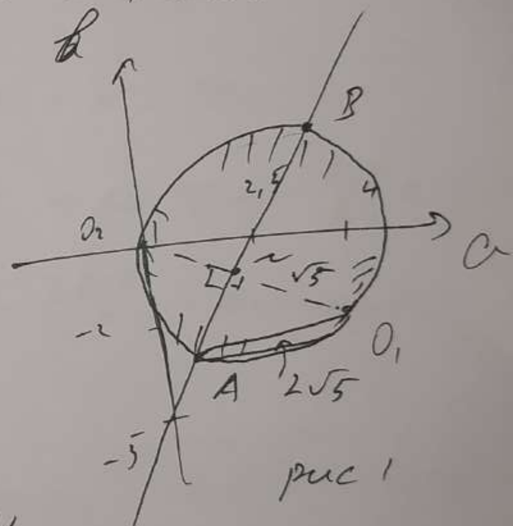


рис 1

2) Вернёмся к (1):

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

данное нер-во на пл-ти

xoy задаёт круг с центром $(a;b)$

и радиусом $2\sqrt{5}$; Очевидно, что множество всех центров данных окр – это рис 1., а тогда фигура M это:

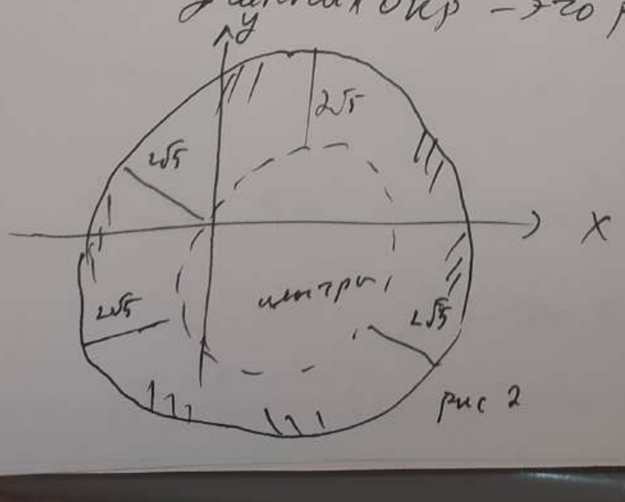


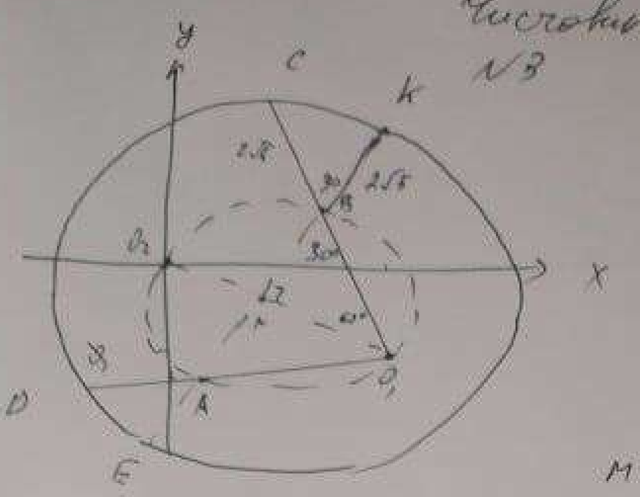
рис 2

Вот такая фигура как на рис 2

чем-то напоминающая круг.

Чистовик

№3



Перенесём все точки с пл-ти ровно пл-ти xoy оставив их координаты прежними, и добавим ещё новые точки как на рис слева.

Заметим что площадь M в силу симметрии это площадь фигуры EDCK (криволинейной) умноженной на 2.

$$S_{EDCK} = \underbrace{S_{CDO_1}}_{\text{сегмент}} - \underbrace{S_{AO_1B}}_{\text{треуг.}} + 2S_{BCK} + \underbrace{S_{DEA}}_{\text{в силу симметрии}} =$$

$$= S_{CDO_1} - S_{AO_1B} + 2S_{BCK}.$$

$\cancel{S_{CDO_1}} =$ $\angle BO_1N = 60° = \angle ANO_1$ т.к. $O_1N \perp AB$ и

$O_1N = \sqrt{5} = \frac{1}{2} O_1B = \frac{1}{2} R_1 = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} = \sqrt{5} \rightarrow \cos BO_1N = \frac{O_1N}{BO_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$S_{CDO_1} = \frac{120}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3}\pi (2\sqrt{5})^2 = \frac{20\pi}{3}$ - формула площади сегмента окр.

$S_{AO_1B} = \frac{1}{2} AB \cdot O_1N$; $\quad AB = 2AN = 2\sqrt{(2-\sqrt{3}-2)^2 + (-2\sqrt{3}-1+1)^2} =$

$= 2\sqrt{3+12} = 2\sqrt{15} \rightarrow \quad S_{AO_1B} = \frac{1}{2} 2\sqrt{15}\sqrt{5} = 5\sqrt{3}$

Что же такое BCK ?? — это сегмент окр с углом 30°, радиуса $2\sqrt{5} \rightarrow S_{BCK} = \frac{30}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{12}\pi 20 = \frac{5}{3}\pi \rightarrow$

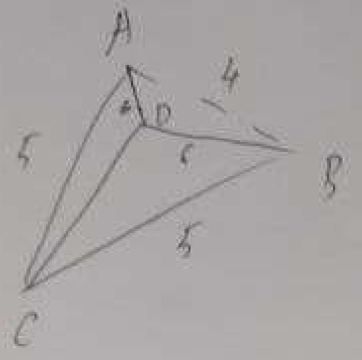
$S_{EDCK} = \frac{20\pi}{3} + 2\frac{5}{3}\pi - 5\sqrt{3} = \frac{30\pi}{3} - 5\sqrt{3} = 10\pi - 5\sqrt{3} =$

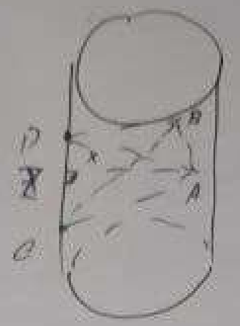
$= 5(2\pi - \sqrt{3})$; тогда $S_M = 2S_{EDCK} = 10(2\pi - \sqrt{3})$

Ответ: $S_M = 10(2\pi - \sqrt{3})$

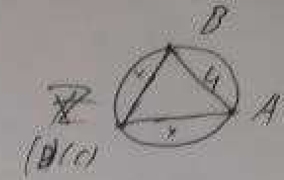
Чистовик

N 2





Вид сверху



1) Заметим, что D, C равноудалены от AB ⇒

D и C лежат в серединно перпендикулярной

плоскости к AB (пл-ть проходящая через середину

AB и ⊥ AB; мн-во всех точек равноудалённых от т. A и B)

поэтому т.к. AB ⊥ CD; но т.к. ~~CD~~ ⊥ CD и оси цилиндра →

CD ⊥ основанию ⇒ AB ∥ основанию
(AB ⊥ CD)

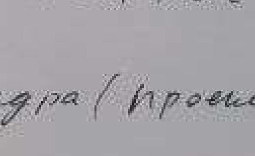
2) Пусть Z – ~~точка~~ проекция точек D и C на

пл-ть α: AB ∈ α и α ∥ осн. цилиндра (проекция обеих

точек, т.к. DC ⊥ осн)

Пусть AZ = ZB = x (AZ = ZB в силу симметрии отн

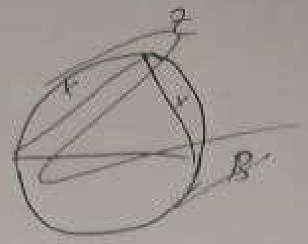
(CDN), где N – сер AB)



Тогда $CD = CZ + ZD =$
$= \sqrt{25-x^2} + \sqrt{36-x^2}$

№ 2 чистовик

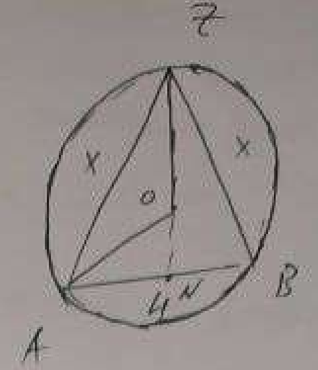
А если:



ZN - высота,

Т.к. ZA = AB → △ZAB р/б

N - сер AB



Пусть O центр окр описанной около AZB

Эта окр и это проекция оснований цилиндра над

Тогда если R - это радиус этой окр, то

$$ZN = \sqrt{x^2-2^2} = \sqrt{x^2-4}$$ из теоремы Пифагора из $\triangle AZN$ $(\angle ANZ = \frac{\pi}{2})$

$ZO = R \to ON = ZN - R$ и

$AO^2 = NO^2 + AN^2$ (теорема Пифагора в $\triangle AON$)

$$R^2 = (ZN-R)^2 + 2^2 \to R^2 = R^2 - 2ZN\cdot R + ZN^2 + 4$$

$$2ZN\cdot R = x^2-4+4 = x^2 \to R = \frac{x^2}{2ZN} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}} =$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $x \in (0; +\infty)$, т.к. x - это AZ

$(R(x) = \frac{f(x)}{2})$

$$f'_x = \frac{2x\sqrt{x^2-4} - x^2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{(x^2-4)} = \frac{2x\left(x^2-4-\frac{x^2}{2}\right)}{(x^2-4)^{3/2}} = \frac{2x\left(\frac{x^2}{2}-4\right)}{(x^2-4)^{3/2}}$$

$$f'_x = \frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)^{3/2}} \qquad f'_x = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

черновик

f' + − +

f $0 \nearrow 2 \searrow 2\sqrt{2} \nearrow$ x

единственная достижимая точка минимума это $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

~~Rmi~~ $R \to min$, когда $x = 2\sqrt{2}$; а по условию задачи $R = R_{min} \to x = 2\sqrt{2} \to$

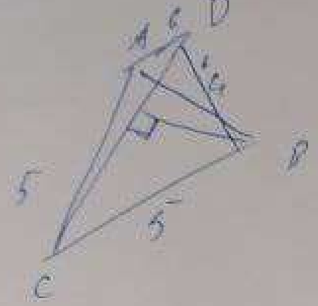
$$CD = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{36 - x^2} = \sqrt{25 - 8} + \sqrt{36 - 8} =$$
$$= \sqrt{17} + \sqrt{28}$$

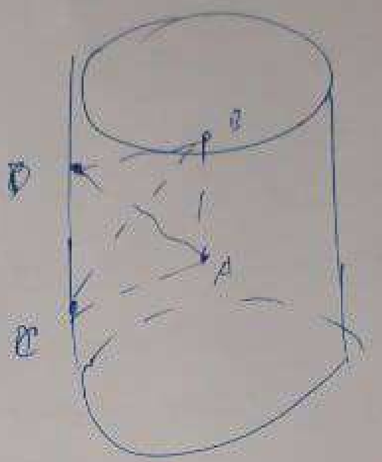
Ответ: CD принимает единственное значение $CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

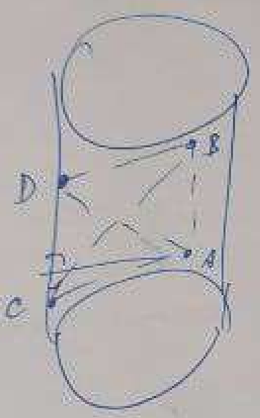
9

Черновик

1

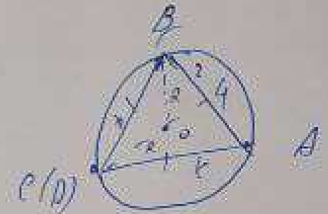


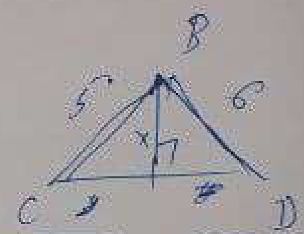




Вид сверху

DA D ∥ оси





$R - ?$ $R(x) - ?$

$h = \sqrt{x^2 - 4}$

$(h-R)^2 + 2^2 = R^2$

$h^2 + 4 = 2Rh$

$x^2 - 4 + 4 = 2R\sqrt{x^2-4}$

$R = R(x) = \dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\ }}\ 2x$

$R'(x) = \dfrac{2x\,2\sqrt{x^2-4} - x^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}\ 2x}{4(x^2-4)} =$

$= \dfrac{4x\left(\sqrt{x^2-4} - \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}\right)}{4(x^2-4)} = \dfrac{x(2(x^2-4)-x^2)}{2(x^2-4)^{3/2}} =$

$= \dfrac{x(x^2-8)}{2(\ \ )}$

$R' = 0;$ $x = 0$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

R': $-\ \ +\ \ -\ \ +$; $-2\sqrt{2}$, -2, 0, 2, $2\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{25-x^2}$ $\sqrt{36-x^2}$

$CD = \sqrt{25-x^2} + \sqrt{36-x^2}$

$CD = \sqrt{25-8} + \sqrt{36-2} =$

$= \sqrt{13} + \sqrt{24}$

Черновик

№ 1

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7$, - арифм. прогр. из целых чисел

$$\begin{cases} a_8 a_{17} > S + 27 \\ a_{11} a_{14} < S + 60 \end{cases}$$

$\exists a_1$?

$$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > (a_1 + 3d)7 + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < S + 60 \; (a_1 + 3d)7 + 60 \end{cases}$$

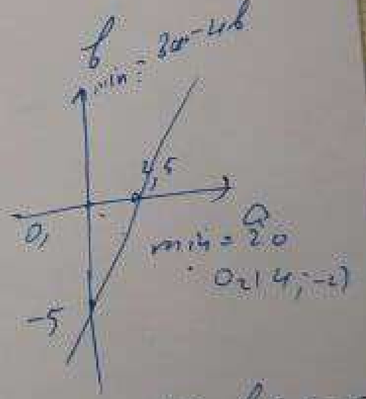
№ 3

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 20$ — окр. с центром $(a; b)$ и радиуса $2\sqrt{5}$

$a^2 + b^2 \leq \min(8a - 4b; 20)$

$8a - 4b \leq 20$, $4b \geq 8a - 20$;

$b \geq 2a - 5$



$\min = 8a - 4b$ при $b \geq 2a - 5$

$a^2 + b^2 \leq 8a - 4b$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \leq 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \leq 20$

окр. с центром $(4; -2)$ радиуса $2\sqrt{5}$

расстояние до прямой $b = 2a - 5$; $b - 2a + 5 = 0$

$$\rho = \frac{|-2 - 8 + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < R$$

$\min = 20$ при $b \leq 2a - 5$

$a^2 + b^2 \leq 20$

окр. с центром $(0; 0)$ радиуса $2\sqrt{5}$

$\rho = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < R$

находятся и пересек

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101257**

ID профиля: **374629**

Вариант 21

чистовик

№5

1) ~~Пусть~~ $\cancel{\log_{\sqrt{2x3}}(x+1)}$

~~ОДЗ:~~

Условия на существование логарифмов

$$\begin{cases} x+1>0 \\ \sqrt{2x-3}>0 \\ \sqrt{2x-3}\neq 1 \\ \cancel{(2x-3)^2>0} \\ \cancel{(2x-3)^2\neq 1}\ (2x-3)^2\neq 1 \\ \cancel{2x^2-3x+5\neq 1} \\ \cancel{2x^2} \quad D=9-40<0 \\ 2x^2-3x+5>0, \forall x\in R \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \to \forall x\, R \\ D=9-32<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1 \\ x>\frac{3}{2} \\ 2x-3\neq 1 \\ 2x-3\neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 4/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

2) Пусть $\cancel{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1) = 2\cdot A}$

$\cancel{\log_{2x}}$ $\log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = A$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = B$$

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = C$$

Тогда у нас 3 случая

1. $A+1=B=C \Rightarrow (A+1)^2 = B\cdot C$

2. $B+1=A=C \to (B+1)^2 = A\cdot C$

3. $C+1=A=B \to (C+1)^2 = A\cdot B$

чистовик №5

3) случай 1:

$$\left(\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)+1\right)^2=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

~~Пусть $\log_{2x-3} x+1$~~ $\left(2\log_{2x-3}(x+1)+1\right)^2=\log_{x+1}(2x-3)^2$

Пусть $\log_{2x-3}{x+1}=t$: $(2t+1)^2=2\frac{1}{t}$ $|\cdot t\neq 0$

$$\begin{cases}4t^3+4t^2+t-2=0\\ t\neq 0\end{cases}$$

$t=\frac{1}{2}$:

$4\frac{1}{8}+4\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2=0$ верно $\rightarrow$

$t=\frac{1}{2}$ корень

схема горнера

	4	4	1	−2
$\frac{1}{2}$	4	6	4	

$4t^2+6t+4=0$

$2t^2+3t+2=0$

$D=9-16<0$

Обратная замена: $\log_{2x-3}{x+1}=t=\frac{1}{2}$

$x+1=\sqrt{2x-3}$; $x^2+2x+1=2x-3$ $\rightarrow$ $x^2=-4$
нет реш

2 случай.

$$\left(\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1\right)^2=\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\log_{x+1}2x^2-3x+5$$

$t=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$: $(2t+1)^2=\frac{2}{t}$

$$\begin{cases}4t^3+4t^2+t-1=0\\ t\neq 0\end{cases}$$ единственное реш $t=\frac{1}{2}\rightarrow$

2

Чистовик

№5

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=\frac{1}{2}$; $2x-3=\sqrt{2x^2-3x+5}$

$4x^2+9-12x=2x^2-3x+5$;

$2x^2-9x+4=0$; $D=81-\cancel{64}^{32}=\cancel{25}^{49}$

$x=\frac{9\pm7}{4}=\left[\begin{array}{l}4\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.$

но по ограничениям $x>\frac{3}{2}\rightarrow$ $x=4$

единств реш

3 случай. в этом случае

$\left(\log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1\right)^2=\log_{\sqrt{2x-3}}x+1\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$t=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$;

$(t+1)^2=2\cdot2\cdot\frac{1}{t}$ ~~$+t\neq0$~~

$t^2+2t+1=\frac{4}{t}\ 1\cdot t\neq0$

$t^3+2t^2+t-4=0$; ~~введём f(t)=~~

$t=1$: $t^3+2t^2+t-4=1+2+1-4=0$ верно $\rightarrow t=1$ - корень

схема горнера

	1	2	1	-4
1	1	3	4	

$t^2+3t-4=0$

$D=9+16=5^2$

Чистовик

№5

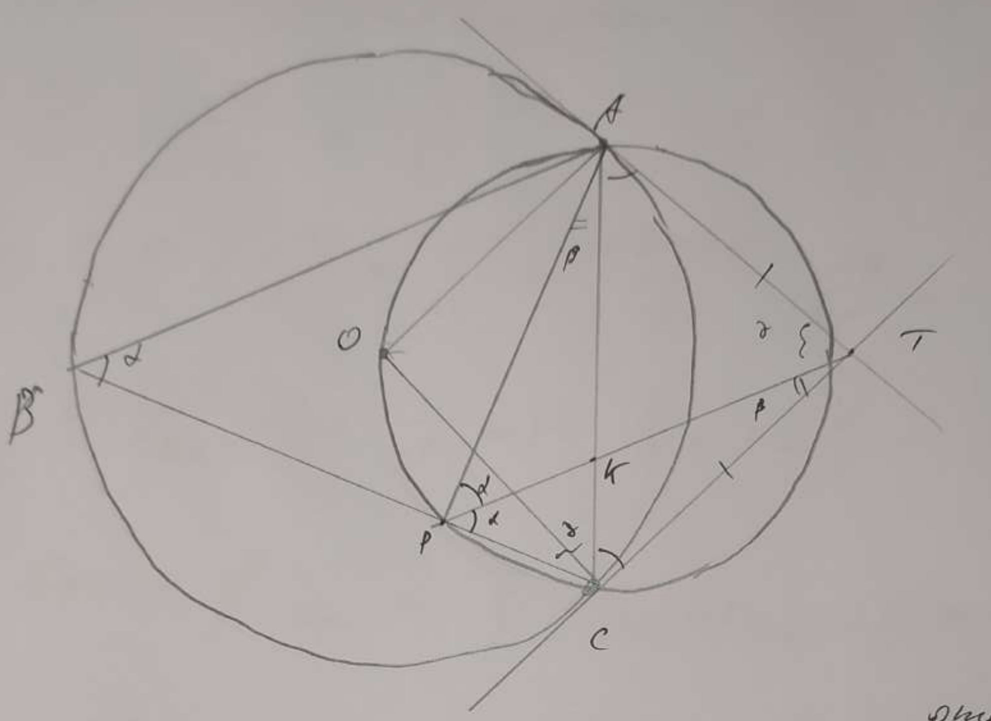
$t^2+3t-4=0;\ t=\dfrac{-3\pm 5}{2}=\left[\begin{matrix}-4\\1\end{matrix}\right.$

но по ограничениям $x>\frac{3}{2}$ => нет реш

в этом случае

Ответ: $x=4$

Чистовик
№6



1) $\frac{S_{ABC}}{S_{APK}} = \frac{BC}{PC}$

2) $\angle APT = \angle ACT$ (как ~~вписанные~~ опирающиеся на $\smile AT$)

$\angle TPC = \angle TAC$ / как опирающиеся на $\smile CT$

$\angle TAC = \angle TCA$ (т.к. $\triangle ATC$ – р/б
$AT = TC$ – как отрезки касательных) $\Rightarrow$

$\cancel{\angle APK = \angle KPC \rightarrow}$ $\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{AP \cdot PK \sin \angle APK}{\cancel{PC \cdot PK \cdot \sin CPK}} = \frac{AP}{PC}$

$\angle APK = \angle KPC$

3) $\frac{S_{APK}}{S_{PCK}} = \frac{AK}{KC}$ как треугольники с одинаковыми высотами

4) $\triangle BAC \sim CPK$ ($\angle ACB$ – общий, $\angle CPK = \angle CBA$:
если $\angle CBA = \alpha$, то $\angle COA = 2\alpha$ (центральный), $\rightarrow \angle CPA = \angle COA$
как опирающиеся на $\smile CA$, $\Rightarrow \angle CPK = \frac{1}{2}\angle CPA$, т.к. $\angle CPK = \angle KPA \rightarrow$
$\angle CPK = \frac{1}{2}\angle COA = \frac{1}{2} 2\alpha = \alpha = \angle CBA) \rightarrow$

Чистовик

№6

$\triangle BAC \sim \triangle CPK$ по двум углам:

$$\frac{AC}{KC} = \frac{BC}{PC} \rightarrow$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APK}} = \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{KC} = \frac{AK+KC}{KC} = \frac{AK}{KC} + 1 =$$

$$= \frac{S_{APK}}{S_{PCK}} + 1 = \frac{12}{9} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{7}{3} S_{APK} = \frac{7}{3}(S_{ADK} + S_{PCK}) = \frac{7}{3}(12+9) = \frac{7}{3} \cdot 21 =$$

$$= 49$$

~~a)~~ б) Теперь дано, что $\alpha = \angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$

Пусть еще $\angle ACB = \gamma$, $\angle PAC = \beta \Rightarrow$

$\angle PTC = \angle PAC = \frac{1}{2} \smile PC$; ~~∠TA~~ $\angle ACP = \angle PTA = \frac{1}{2} \smile AP \rightarrow$

$\angle PTC = \beta$, $\angle PTA = \gamma$, а еще

$\angle PTC + \angle PTA = \angle ATC = 180^\circ - \angle COA = 180^\circ - 2\alpha$

т.к. ~~AOCT~~ AOCT вписан ($\angle OAT + \angle TCO = 90+90 = 180$) $\rightarrow$

и еще

$$\frac{S_{APK}}{S_{PCK}} = \frac{AP \cdot PK \sin APK}{PK \cdot PC \cdot \sin CPK} = \frac{AP}{PC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3},$$ а еще

$$\frac{AP}{PC} = \frac{2r \sin \gamma}{2r \sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$, где r - радиуса ~~окр~~ окр описанной около $\triangle OAC$

Чистовик

№6

Имеем $\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AP}{PC} = \frac{4}{3} \\ \gamma + \beta = 180 - 2\alpha \end{cases} \to$

$3\sin\gamma = 4\sin(180 - 2\alpha - \gamma) = -4\sin(2\alpha + \gamma)$

$3\sin\gamma = -4(\sin 2\alpha \cos\gamma + \sin\gamma \cos 2\alpha) \to$

$3 = -4(\sin 2\alpha \operatorname{tg}\gamma + \cos 2\alpha) \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\gamma = \cancel{\frac{-3}{4\cos 2\alpha}} \quad \frac{-\frac{3}{4} - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha};$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} \to \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{49+9}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}} \to \sin 2\alpha = \frac{14}{58} = \frac{7}{29}$

$\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{49}{29^2}} = \frac{\sqrt{22 \cdot 36}}{29} = \frac{-6\sqrt{22}}{29} \to$

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{-3/4 - \frac{6\sqrt{22}}{29}}{\frac{7}{29}} = \frac{-\frac{3}{4}\cdot 29 + 6\sqrt{22}}{7} =$

$= \frac{-77 + 24\sqrt{22}}{28}$; Вообщем нашли бы γ: что

по т. sin в $\triangle APC$: $\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{PC}{\sin\beta}$ (β из γ) $\to$

PC через AC, потом S_{PCK} через PC и AC и γ $\to$

AC через S_{PCK} и коэф-т

Чистовик

№4

1) Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$

$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot p_3^{\gamma_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – простые числа

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

2) ~~Тогда~~ ~~но~~ Т.к. НОД $= 35$, то

т.к. какое-то из чисел содержит 5^1, а какое-то 7^1, и ~~а~~ a, b, c ~~не содержат~~ ~~ничего~~ могут быть представлены только в виде произведения степеней 5 и 7.

Т.к. НОК $= 5^{18} \cdot 7^{16}$, то ~~так степень~~ какое-то число a, b или c содержит 5^{18} ~~и 7^{16}~~ а какое-то -7^{16}, и при том числа a, b, c не содержут в разложение на простые множетели 5 в степени более чем 18 и 7 в степени более чем 16.

3) Тогда можно сказать, что

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$, $b = 5^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 5^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$, и ~~от~~ ещё вместо кол-во троек $(a; b; c)$ ме ~~от~~ ищем кол-во наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) = A$ (набор)

8

Чистовик
№4

~~Какое-то число из A равно~~

Какое-то из $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ равно 18, а какое-то 1, а оставшееся $\in [1; 18]$
Какое-то из чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ равно 16, а какое-то 1
а оставшееся $\in [1; 16]$
в силу сказанного в 2)

4) Кол-во способов выбрать из $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$
которое равно 18 – 3 штуки, кол-во способ
выбрать из оставшихся $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, которое равно 1
2 штуки (т.к. одно уже занято), а и кол-во
способ выбрать значение для последнего числа
18 штук $\rightarrow$ $3 \cdot 2 \cdot 18$ способов выбрать подходящие $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$
Способы перемножаются, т.к. действие производятся
независимо друг от друга
Аналогично 3 способа выбрать из $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ которое
равно 16, 2 сп. которое равно 1, и еще 16 способ
выбрать оставится. $\rightarrow$ $3 \cdot 2 \cdot 16$ способов выбрать
подходящие $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

Способы перемножаются, т.к действия производятся
независимо

9

~~Во~~ Чистовик №4

Всего способов выбрать подходящие ~~вооо~~ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ это $3\cdot2\cdot18\cdot3\cdot2\cdot16$

т.к. набора выбираются независимо.

5) ~~Х~~ Учёт повнотров:

набор $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ $(18;18;1)$ мы посчитали дважды

сначала когда $\alpha_1 \in [1;18]$ и $\alpha = 18$, а второй раз когда выбрали $\alpha_1 = 18$ изначально.

Всего троек повторов 6, поэтому надо вычесть 6.

$(18;18;1)$, $(18;1;18)$, $(1;18;18)$,

$(1;1;18)$ $(1;18;1)$ $(18;1;1)$

Но еще такие же повторы были в наборе $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ поэтому вычитаем еще 6 =>

Ответ: $2^2\cdot3^2\cdot16\cdot18-12$

10

Черновик ②

a b c

$5^{\alpha_1} 7^{\alpha_2}$ $5^{\beta_1} 7^{\beta_2}$ $5^{\gamma_1} 7^{\gamma_2}$ [2; 17]

$3 \cdot 2 \cdot \cancel{18}\ 17$

кто-то из $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$: 1, а кого 18

оставшиеся $\in [1; 18]$ 19 вар

° [2; 15]

аналогично

$3 \cdot 2 \cdot \cancel{17}$ 15

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ $\in [1; 15]$ 17 вариант

$\alpha_1 = 18$ $\beta_1 c \ldots$

[18; 18; 1] дважды посчитал , или 18

$\alpha_1 c \ldots$ $\beta =$

(18; 18; 1) $3 \cdot 2 \cdot 2$

N1 Черновик

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots$

$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2}$

НОД $= p_1^{min} p_2^{min} p_3^{min} \ldots$

НОК $= p_1^{max} p_2^{max} p_3^{max} \ldots$

НОД $(a, b, c) = 35 = 7 \cdot 5$

1) Кто-то содержит 5^{18} и кто-то 7^{16}

2) ~~max~~ но кто-то содержит max 7^1 и 5^1

и никто не содержит ничего кроме 5^n и 7^k

① 5^{16} и 7^{16} у одного и 5^1 и 7^1 у одного

a	b	c
$5^{18} \cdot 7^{16}$	$5 \cdot 7$	$5^{1,2,3,\ldots,16}$ $7^{1,2,3,\ldots,16}$

$19 \cdot 17$

$6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 17$

④ Всё у разных

a	b	c
$5^{16} 7$	$5^1 7^{16}$	$7^1 5$
17		19

② $5^{16} \cdot 7^{16}$ у одного и 5^1 и 7^1 у разных

a	b	c
$5^{16} \cdot 7^{16}$	$7^1 5^{\ldots}$	$5^1 7^{\ldots}$
	19	17

$3 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 17$

③ 5^1 и 7^1 у одного $5^{18}, 7^{16}$ у разных

a	b	c
$5^{17} \cdot 7^{\ldots}$	$5^1 \cdot 7^1$	$7^{16} \cdot 5^{\ldots}$
17		$\cdot 18$

$3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 18$

x^2

x

черновик ①

$2x^2-3x+5 \vee 2x-3$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{2x-3}(x+1)^2 \cdot \log_{(2x-3)^2} 2x^2-3x+5 = 1$

$\frac{1}{2}(2x^2-3)^2+3x+0,5$

$a = x+1,\ b = 2x-3,\ c = 2x^2-3x+5$

$\log_{\sqrt{b}} a,\ \log_c b^2,\ \log_a c$

$\begin{cases} x+1>0,\ x+1\neq 1 \\ 2x-3>0,\ 2x-3\neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0 \checkmark \quad D=9-40<0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \checkmark \\ D=9-32<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1,\ x\neq 0 \\ x>1,5\quad x\neq 2 \end{cases}$

$\downarrow$

ОДЗ: $x>1,5,\ x\neq 2$

~~$x=3$: $\log_{\sqrt{3}}$~~

$x=4$: $\log_{\sqrt{5}} 5$, $\log_{25} 5^2$, $\log_5 25$

2, 1, 2

если ① = ② − 1 = ③ − 1, ≥ 0

$\log_{2x-3} x+1 = \frac{1}{2}$ $\quad ((1)+1)^2 = (2)\cdot(3)$: $\quad (\underbrace{2\log_{2x-3}(x+1)}_{t} + 1)^2 = 2\underbrace{\log_{x+1}(2x-3)}_{t^{-1}}$

$x+1 = \sqrt{2x-3}$

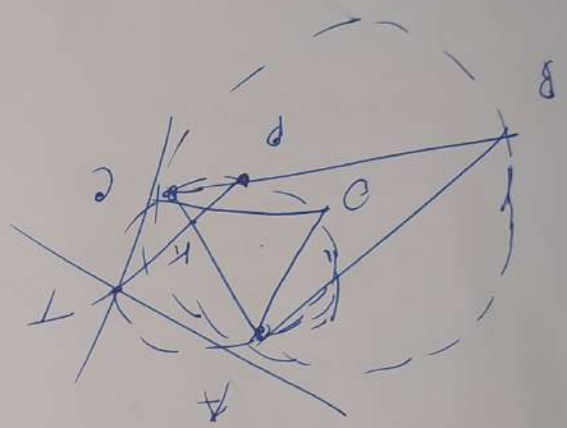
$x^2+2x+1 = 2x-3$

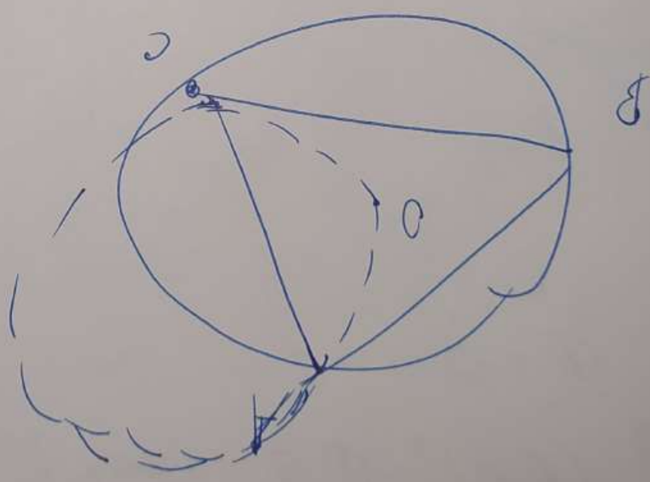
$x^2 = -4$;

$(2t+1)^2 = \frac{2}{t}$; $\quad 4t^2+4t+1 = \frac{2}{t}$; $\quad 4t^3+4t^2+t-2=0$;

$4\frac{1}{8}+4\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2=0$

$t=\frac{1}{2}$.





S_{ABC} - ? Черновик (3)

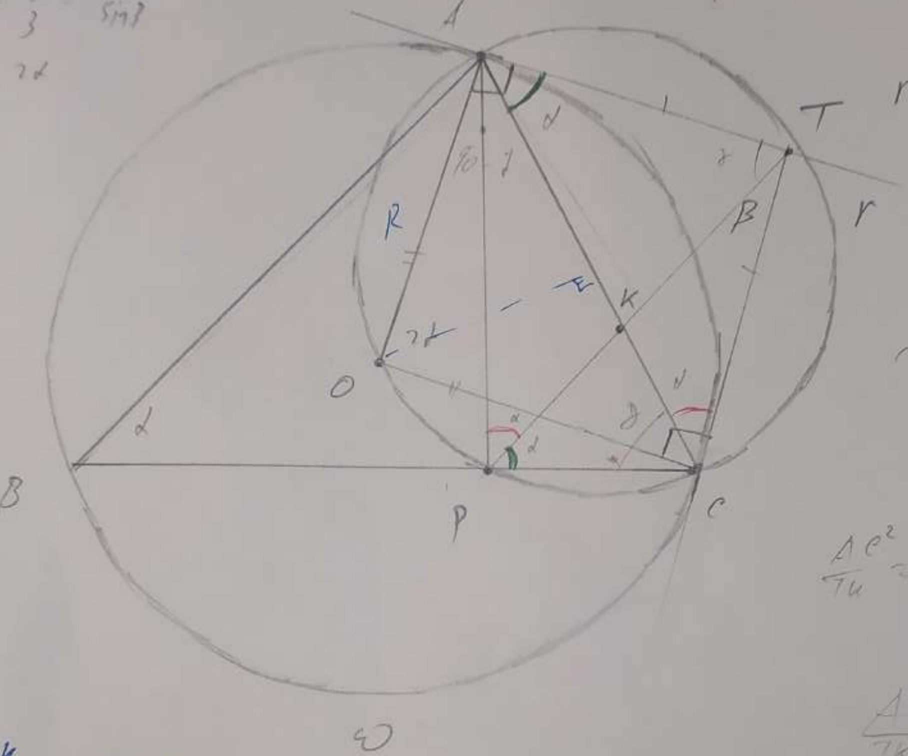
$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

$\gamma + \beta = 2\alpha$

$S = 21$



$r = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$

$\frac{AC^2}{TK} = \frac{BC^2}{TP}$

$\frac{AC}{TK} = \frac{BC}{AT}$

$\frac{AC}{AT} = \frac{BC}{TP}$

$\frac{AC}{KC} = \frac{BC}{PC}$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AP\cdot PK \sin APK}{PK \cdot CP \sin CPK} = \frac{AP}{CP} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; $\frac{AK}{CK} = \frac{4}{3}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{KC} = \frac{AK+KC}{KC} = \frac{AK}{KC} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$

$S_{ABC} = \frac{7}{3} S_{APC} = \frac{7}{3} 21 = 49$

AC - ?

$2R\sin\alpha = AC$