Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101253**

ID профиля: **830273**

Вариант 21

№1 Чистовик

Пусть k – слагаемое ~~прог~~ арифметической прогрессии, тогда:

$S = 7a_1 + \frac{k\cdot(7-1)7}{2} = 7a_1 + 21k = 7(a_1+3k)$.

$$\begin{cases} a_8 a_{17} = (a_1+7k)(a_1+16k) = a_1^2 + 23a_1k + 112k^2 > S+27 = 7a_1+21k+27 \\ a_{11}a_{14} = (a_1+10k)(a_1+13k) = a_1^2+23a_1k+130k^2 < S+60 = 7a_1+21k+60 \\ k>0, \text{ т.к. прогрессия – возрастающая.} \end{cases}$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Z} \;\| \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} k>0 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} k\geq 1 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+23a_1k+112k^2 > 7a_1+21k+27 \\ 7a_1+21k+60 > a_1^2+23a_1k+130k^2 \end{cases}$ +

$\cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1k}+112k^2+\cancel{7a_1}+\cancel{21k}+60 > \cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1k}+130k^2+\cancel{7a_1}+\cancel{21k}+27$

$18k^2 < 33$

$k^2 < \frac{33}{18} = \frac{11}{6}$

$\begin{cases} k < \sqrt{\frac{11}{6}} \\ k\geq 1 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$1 < \frac{11}{6} < 2$

$1 < \sqrt{\frac{11}{6}} < 2$

$k \geq 1$

$k\in\mathbb{Z}$

$\| \Rightarrow k=1$

$a_1^2+23a_1k+112k^2 = a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21k+27 = 7a_1+21+27 = 7a_1+48$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0$

$a_1 \neq 8$

$a_1^2+23a_1k+130k^2 = a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+21k+60 = 7a_1+81$.

$a_1^2+16a_1+49<0$

$a_1^2+16a_1+49=0$

Чистовик

$D = 256 - 196 = 60 = (2\sqrt{15})^2$

~~$a_1 \in ($~~

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{-16 + 2\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15} - 8 \\ a_1 = \dfrac{-16 - 2\sqrt{15}}{2} = -8 - \sqrt{15} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \\ a_1^2 > 0 \end{array}\right\| \Rightarrow a_1 \in (-8 - \sqrt{15}; -8 + \sqrt{15})$$

$3 < \sqrt{15} < 4$

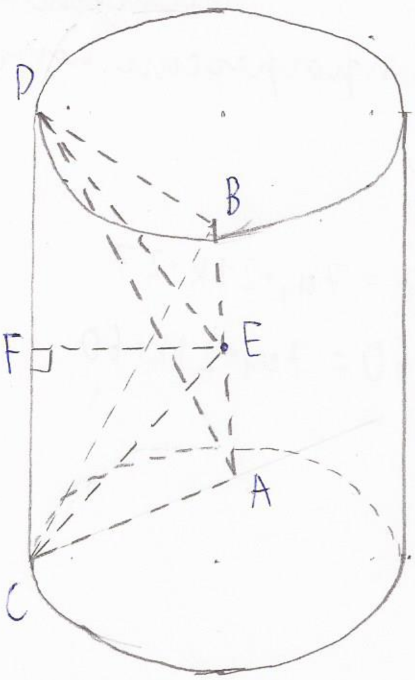
$$\left.\begin{array}{l} -12 < -8 - \sqrt{15} < -11 \\ -5 < -8 + \sqrt{15} < -4 \end{array}\right\| \Rightarrow a_1 \in [-11; -5]$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in [-11; -5] \end{cases}$$

$a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

Чистовик



№2.

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $AB=4$; $AC=BC=5$; $AD=BD=6$; r – наименьший

Найти: CD

Решение:

1) $ABCD$ – тетраэдр $\Rightarrow AB \perp CD$

2) Очевидно, что r – наименьший, если AB – диаметр.

3) ~~AB~~ Построим E, $AE=BE$, $E \in AB$.

4) $AC=BC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобед.

5) $AE=BE$

$\Rightarrow CE$ – высота $\Rightarrow CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{25-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{25-\frac{16}{4}}=\sqrt{21}$

6) $AD=BD \Rightarrow \triangle ABD$ – равнобед

7) $AE=BE$

$\Rightarrow DE$ – высота $\Rightarrow DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}$

8) AB – диаметр.

$AE=BE$

$\Rightarrow E \in$ центральной оси цилиндра.

9) Построим F, $F \in CD$, $EF \parallel$ основанию цилиндра. $\Rightarrow EF \perp CD$

10) $E \in$ оси цилиндра

$EF \parallel$ основанию цилиндра

~~CF~~ $F \in$ боковой стороне цилиндра

$\Rightarrow EF = r = \frac{AB}{2}=\frac{4}{2}=2$

11) $EF \perp CD \Rightarrow CF=\sqrt{CE^2-EF^2}=\sqrt{21-4}=\sqrt{17}$

$DF=\sqrt{DE^2-EF^2}=\sqrt{32-4}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

12) $CD=CF+DF=\sqrt{17}+2\sqrt{7}$

Ответ: $\sqrt{17}+2\sqrt{7}$

Черновик

$a+a+k+a+2k+a+3k+a+4k+a+5k+a+6k=7a+21k$

$16 \cdot 7 = 112$

$4(2a-b)$

$2a-b<20$

~~$x-a^2\le 20$~~

~~$x\le 20+a^2$~~

~~$x-a$~~

$2a<20+b$

$112-21=91$, $91-27=64$

$(a+7k)(a+15k)>7a+21k+27$

$(a+10k)(a+13k)<7a+21k+60$

$$\begin{cases} a^2+23ak+112k^2>7a+21k+27 \\ a^2+23ak+130k^2<7a+21k+60 \end{cases}$$

$a^2+23ak+112k^2>7a+21k+27$

$7a+21k+60>a^2+23ak+130k^2$

$\cancel{a^2}+2\cancel{3ak}+112k^2+\cancel{7a}+\cancel{21k}+60>\cancel{a^2}+\cancel{23ak}+130k^2+\cancel{7a}+\cancel{21k}+27$

$a^2+23a+112>7a+21+27$

$a^2+16a+64=(a+8)^2>0$

$60+112k^2>130k^2+27$

$18k^2<33$

$6k^2<11$

$k^2<\frac{11}{6}$

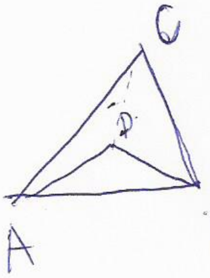
$-1\le k\le 1$

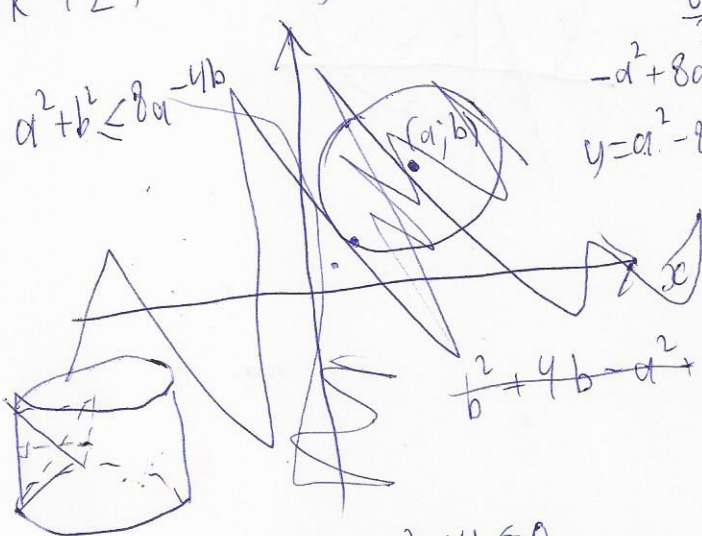
$a^2+b^2\le 8a-4b$

$\frac{8}{2}=4$

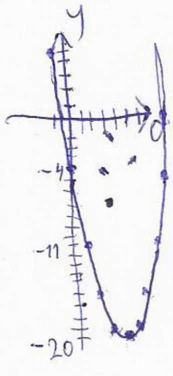
$-a^2+8a+4$

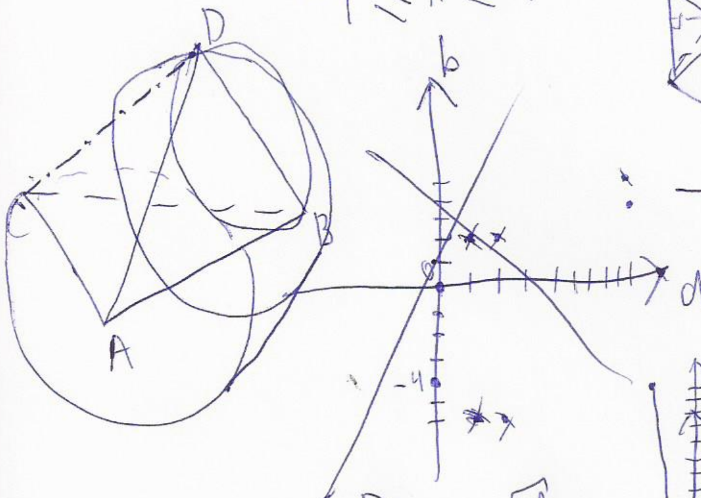
$y=a^2-8a-4=0$





~~b^2+4b-a^2+~~





$a^2-8a+b^2+4b\le 0$

$b^2+4b+a^2-8a\le 0$

$D=16-4a^2+32a=4(-a^2+8a+4)$

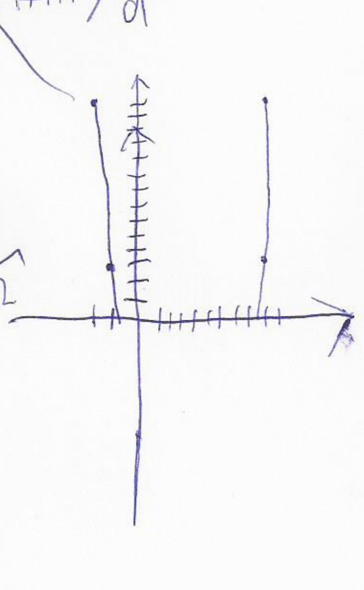
$b=\frac{-4\pm 2\sqrt{-a^2+8a+4}}{2}=$

$\pm 2\sqrt{-a^2+8a+4}-2$

-4

$\sqrt{21}$

$\sqrt{32}$



$\sqrt{32}$

Черновик

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2-8a+b^2+4b \le 0$

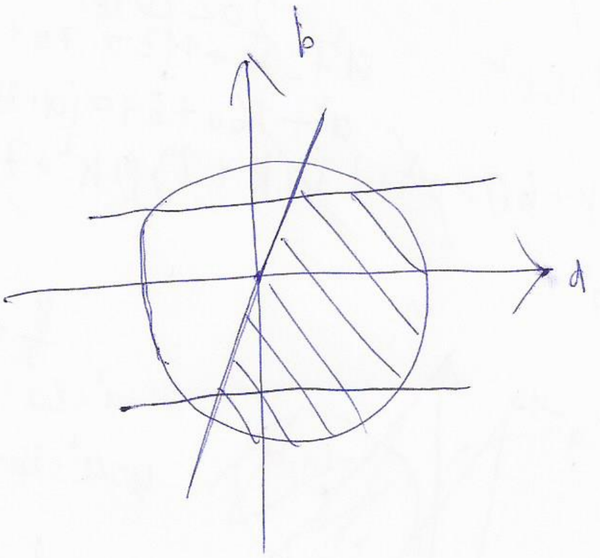
$b^2+4b+a^2-8a \le 0$

$D=16-4a^2+32a=4(-a^2+8a+4)$

$b=$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$2a=b$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101253**

ID профиля: **830273**

Вариант 21

№4

Чистовик.

$НОК(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \;||\Rightarrow$ у a, b, c простые делители только 5 и 7.

~~НОД(a;b;c) = 35 = 7·5 ||=>~~

$$НОД(a;b;c) = НОД(5^{U}\cdot 7^{V}; 5^{W}\cdot 7^{X}; 5^{Y}\cdot 7^{Z}) = 35 = 5\cdot 7 \;||\Rightarrow \begin{cases} \min(U;W;Y)=1 \\ \min(V;X;Z)=1 \end{cases}$$

$$НОК(a;b;c) = НОК(5^{U}\cdot 7^{V}; 5^{W}\cdot 7^{X}; 5^{Y}\cdot 7^{Z}) = 5^{18}\cdot 7^{16} \;||\Rightarrow \begin{cases} \max(U;W;Y)=18 \\ \max(V;X;Z)=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \min(U;W;Y)=1 \\ \max(U;W;Y)=18 \end{cases} \\ \begin{cases} \min(V;X;Z)=1 \\ \max(V;X;Z)=16 \end{cases} \end{cases}$$

~~U=1~~

$(1;18;Y): Y\in[2;17]$ } 16 вариантов.

~~(1;18;Y)~~ $16\cdot 6 = 96$ троек, состоящих из 1 „1" и 1 „18".

$$\left.\begin{matrix} (1;18;18) \\ (18;1;18) \\ (18;18;1) \\ (1;1;18) \\ (1;18;1) \\ (18;1;1) \end{matrix}\right\} \text{ещё 6 вариантов, где } Y\in\{1;18\}.$$

$$\left.\begin{cases} \min(U;W;Y)=1 \\ \max(U;W;Y)=18 \end{cases}\right\} - 96+6=102 \text{ варианта.}$$

$(1;16;Z): Z\in[2;15]$ } 14 вариантов.

$14\cdot 6 = 84$ тройки.

$$\left.\begin{matrix} (1;16;16) \\ (16;1;16) \\ (16;16;1) \\ (1;16;1) \\ (16;1;1) \\ (1;1;16) \end{matrix}\right\} \text{ещё 6 вариантов, где } Z\in\{1;16\}.$$

$$\left.\begin{cases} \min(V;X;Z)=1 \\ \max(V;X;Z)=16 \end{cases}\right\} - 84+6 = 90 \text{ вариантов.}$$

$$\left.\begin{cases} \begin{cases} \min(U;W;Y)=1 \\ \max(U;W;Y)=18 \end{cases} \\ \begin{cases} \min(V;X;Z)=1 \\ \max(V;X;Z)=16 \end{cases} \end{cases}\right\} - 90\cdot 102 = 9180 \text{ троек.}$$

Ответ: 9180.

№5 Черновик

~~Пусть.~~ $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2\log_{2x-3}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

Пусть первые 2 числа равны, тогда:

$\log_{2x-3}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

№4 Черновик

НОД$(a;b;c)=35=5\cdot 7$

НОК$(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16}$ || => у a, b, c нет делителей, кроме 5 и 7.

НОД$(a;b;c)=5\cdot 7$ || => есть как минимум 1 число, содержащее только 1 семёрку, и $\exists$ число, содержащее ровно 1 пятёрку.

Пусть $a=5\cdot 7$, тогда:

$$\begin{cases} b=7^x\cdot 5^y \\ c=7^w\cdot 5^z \\ \max(x,w)=16 \\ \max(y,z)=18 \end{cases}$$

1 1 16   1 16 X

16 16 1

1 16 1

16 1 16

16 1 1

1 16 16

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}14\\6\end{array} \\ \hline 84 \end{array}$$

Рассмотрим 7:

$$\begin{cases} b=7^x k \\ c=7^w k \\ \max(x;w)=16 \\ \min(x;w)=1, \text{ т.к. НОД}(a;b;c)=7\cdot 5. \end{cases}$$

При $x=16$: $w\in[1;16]$. || => таких вариантов: $16+16-1=31$, т.к.
При $w=16$: $x\in[1;16]$ || в $16+16$ посчитано 2 раза $(16;16)$.

Рассмотрим 5:

$$\begin{cases} b=5^y k \\ c=5^z k \\ \max(y;z)=18 \\ \min(y;z)=1 \end{cases}$$

При $y=18$: $z\in[1;18]$ || => таких вариантов: $18+18-1=35$.
При $z=18$: $y\in[1;18]$

При $a=5\cdot 7$ получаем $35\cdot 31=1085$ ~~вариан~~ троек.

Черновик.

$2x^2-3x+5=0$

$D=9-40<$

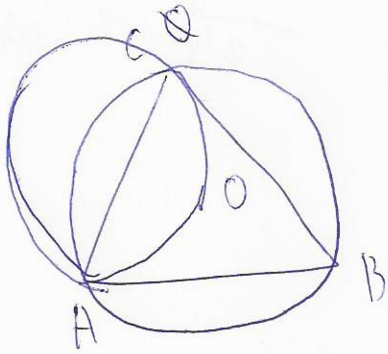
$2x^2-3x+4=0$

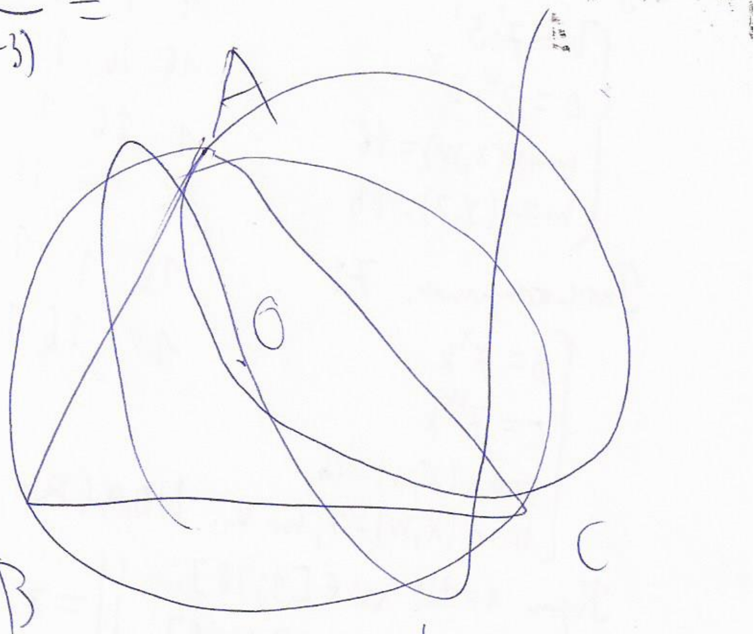
$D=9-$

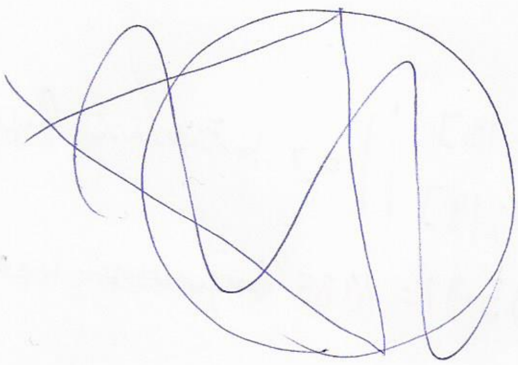
ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 1{,}5 \\ \cancel{x \neq \{0{,}5;\ 0{,}5;} \\ x \neq 2 \end{cases}$

$$\log_{2x-3}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$$

$$\frac{\cancel{k}\ln(x+1)}{\cancel{k}\ln(2x-3)}=$$







Черновик

~~НОД(28; 16) = 4~~

~~НОК(9; 36) = 36~~

~~$(2x-3)^{\frac{1}{a}} = x+1$~~

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x-3)} = \frac{\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)}$

$\ln(x+1)\ln(2x^2-3x+5) = \ln^2(2x-3)$

$\log_a b = \log_c a$

~~$a = 5k \quad b = 7k \quad c = 7^{16}$~~

~~a:b~~ $a = 35k; \; b = 35k; \; c =$

$\log_a b = \frac{1}{\log_a c}$

$a = 5 \cdot 7^{x}$ $x \in [1;16]$

$b = 5^x \cdot 7$

$c = 5^x \cdot 7^x = 5^{16} \cdot 7^{16}$

$-2x^2 - 3x$

$-2x^2 + 2x$

$-5x$

$\log_a b \log_c d = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$

$\log_a b \log_b c = 1$

$\log_a b = (a-1)(b$

35 : 35 : x35

287

288

16 1
16 2
16 3
16 4
16 5
16 6
16 7
16 8

7^{35} 31 35