Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101211**

ID профиля: **333519**

Вариант 21

№ 1. Чистовик (1) Вар 21

арифм прогр.

$a_8 a_{17} > S + 27$ $S = a_1 + a_2 + \ldots a_7$

числа целые

$a_{11} a_{14} < S + 60$

$a_1 - ?$

$\frac{(a_1 + a_7) \cdot 8}{2} = (a_1 + a_1 + 6n) \cdot 4$

$= 8a_1 + 24n$

$(a_1 + 7n)(a_1 + 16n) > 8a_1 + 24n + 27$

$(a_1 + 10n)(a_1 + 13n) < 8a_1 + 24n + 60$

$a_1^2 + 23a_1 n + 112n^2 - 8a_1 - 24n - 27 > 0$

$a_1^2 + 23a_1 n + 130n^2 - 8a_1 - 24n - 60 < 0$

$11{,}5 \cdot 2$

$115 \cdot 115 = 575 + 115 + 115 = 132{,}25$

$\cancel{(a_1^2 + 11{,}5n)^2 - 20{,}25n^2 - 8a_1 - 24n - 27 > 0}$

$a_1 ... + 23...$

$\cancel{a_1^2 + 23a_1 n + 112n^2}$

$\cancel{a_1^2 + 23a_1 n + 130n^2} + 18n^2 - 8a$

$\boxed{18n^2 - 33 \text{ меняет знак}}$

т. е n - не может быть > 1

$\Rightarrow n = 1$, если известно, что послед. возраст.

$(a_1 + 10)(a_1 + 13) < 8a_1 + 84$

$(a_1 + 7)(a_1 + 16) > 8a_1 + 51$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 - 8a_1 - 84 < 0$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 - 8a_1 - 51 > 0$

$a_1^2 + 15a_1 + 46 < 0 \Rightarrow$ $D = 225 - 184 = 41$

$a_1^2 + 15a_1 + 61 > 0$

$a_1 = -\frac{15 \pm \sqrt{41}}{2} \approx -11{,}5 \quad 4 - 4{,}5$

$D = 225 - 244 \Rightarrow$ всегда > 0

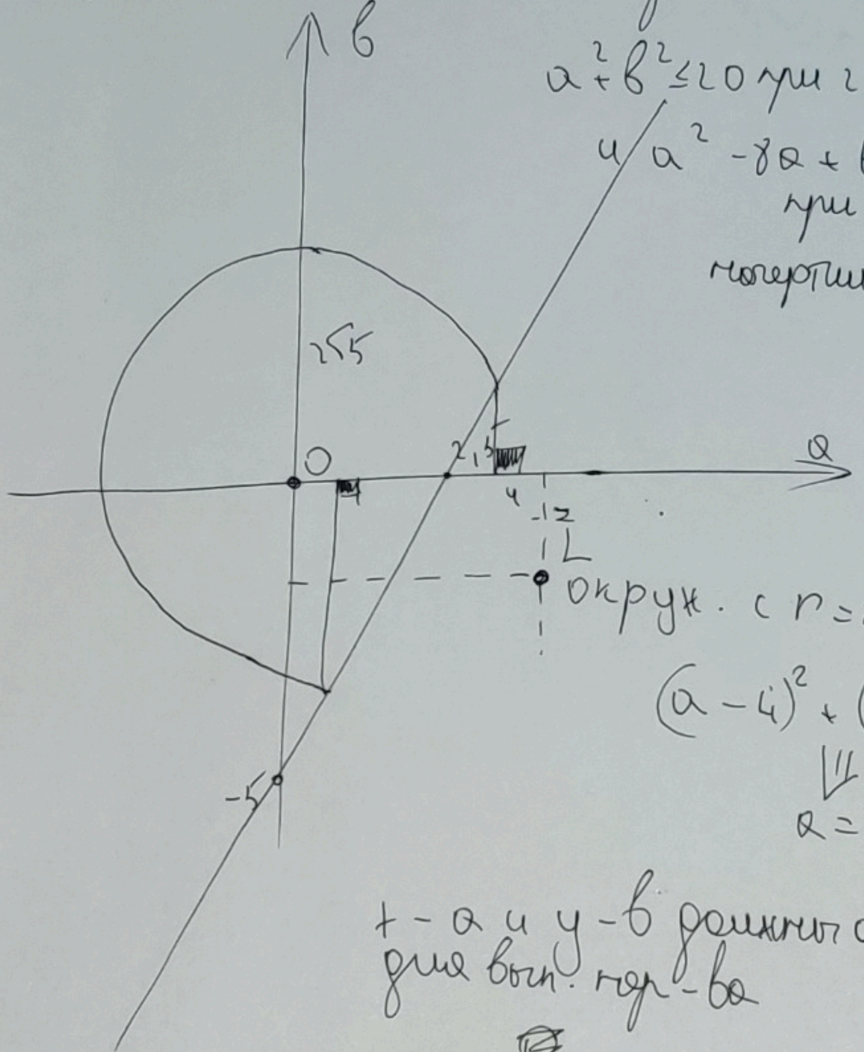
21101211 (U333519 M1302290)

удовлетвор от $[-11$ до $-5]$, ~~если a_1 сущ~~. $\Rightarrow a_1$ может быть ~~...~~ только в целых числах

Ответ: ~~$a_1 \in [-11; -5]$~~ ~~...~~ ~~a_1 целое~~

$a_1 \in [-11; -5]$, где a_1 - целое

№3. для начала решим 2 нер-во на aOb



$a^2+b^2\le 20$ при $20<8a-4b$

и $a^2-8a+b^2+4b\le 0$

при $20\ge 8a-4b$

начертим $8a-4b=20$

$b=2a-5$;

что выше — больше 20, что ниже — меньше;

=> сверху прямой — окруж. с $r=2\sqrt5$; а ниже —

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 0$

$\Downarrow$

$a=4$ и $b=-2$ точка L

$x-a$ и $y-b$ должны оба быть меньше $2\sqrt5$ или равны для вып. нер-ва

нарисуем реш. нер-ва в xOy для точки

$(x-4)^2+(y+2)^2\le 20$

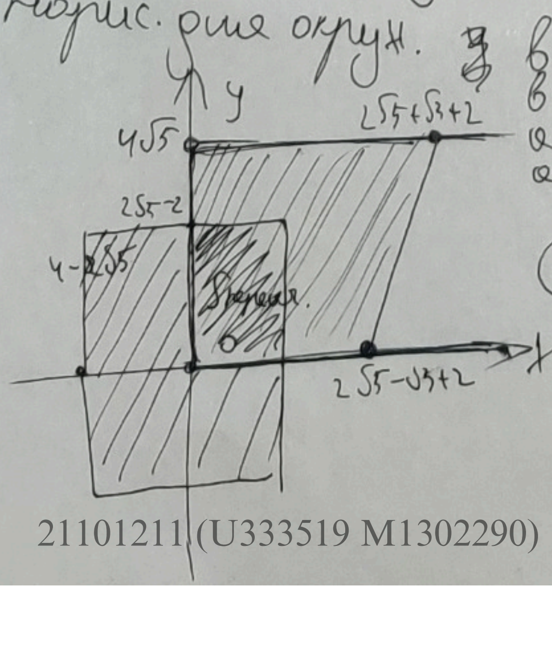
нарис. для окруж.

$b-max=2\sqrt5$

$b-min=-2\sqrt5$

$a-max=$

$a-min=-2\sqrt5$



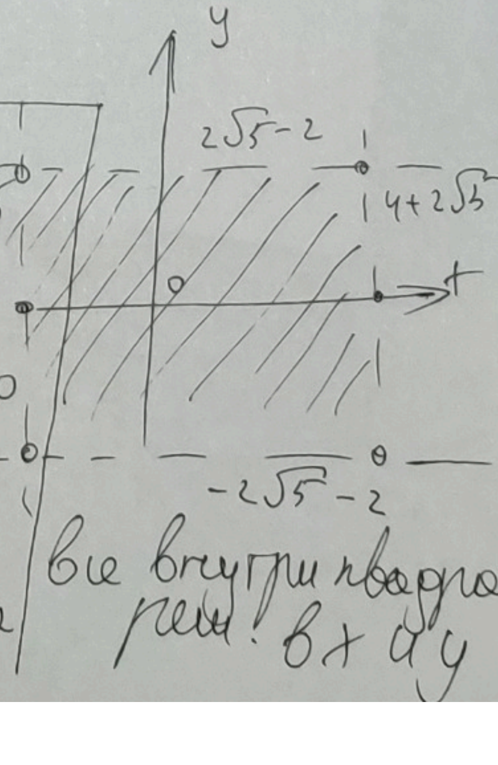
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$

$x-min=0$

$y\ max=2\sqrt5+2\sqrt5=4\sqrt5$

$y\ min=0$

$x\ max=2\sqrt5+\sqrt3+2$



все внутри квадрата — реш. в x и y

21101211 (U333519 M1302290)

№3 Чистовик Вар 21. 3

Общая площадь фигуры – площ. объедин. первого квадрата и 2 фигуры.

$S_2 = 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 80$ (16, 5)

$S_1 = \dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}+2+2\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}{2} \cdot 4\sqrt{5}$

$= (2\sqrt{5}+2)\, 4\sqrt{5}$

$= 40 + 8\sqrt{5}$

$S_{объед.} = S_1 + S_2 - S_{пересеч.}$

$S_{пересеч.} = \frac{1}{4} S_2 = 20 \Rightarrow S_{объед} = 80+40+8\sqrt{5}-20$

$= 100 + 8\sqrt{5}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101211**

ID профиля: **333519**

Вариант 21

Чистовик 2 Вар 21

№ 4.

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 35 \\ НОК(a; b; c) = 5^{\cancel{8}} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

кол-во троек!

$5^{17} \cdot 7^{16}$

$a \vdots 35$ $b \vdots 35$ $c \vdots 35$

$a = 7 \cdot 5 \cdot x$

$b = 7 \cdot 5 \cdot y$

$c = 7 \cdot 5 \cdot z$

в НОК сод. только степени 5 и 7

~~Аналог~~ $xyz = \boxed{5^{16} \cdot 7^{15}}$

если в $\cancel{...}^{+}$ $5^{n} \cdot 7^{k}$

~~если 35 НОК => нигде не встр. 5 или 7 и больше в каждом 1 числе.~~

если НОД $= 35$, то ~~ни в каком~~ в 3 числах не встр. ~~помимо~~ 5 и 7 помимо 5^1 и 7^1 => числа имеют вид (случай 1)

$5^{n} \cdot 7^{k} \cdot 7^{l}$ и т.д $= 5^{16} \cdot 7^{15}$

т.е варианты — 5^{16} . . . . . .

7^{15} . . . . ; здесь 15 вариантов

; здесь 16 вар.

и так по 3 раза

a	$35 \cdot 5^{n}$	5	5	7	7	7
b	$35 \cdot 7^{k}$	5	7	7	5	5
c	$35 \cdot 7^{l}$	7	5	5	7	5

=> ответ: ~~$(15+16) \cdot 3 = 93$ вар. тройки~~

(2 случай)

одновременно и 5 и 7 входить во все 3 не можем., есть

еще вар $35 \cdot 5^{n} \cdot 7^{n}$

$35 \cdot 5^{l} \cdot 7^{m}$

35; таких вариантов еще 480

21101211 (U333519 M1302291)

34

Чистовик Вар 21

еще один случай когда

$35 \cdot 7^k \cdot 5^n$

$35 \cdot 5^k$ таких случаев

$35 \cdot 7^n$

$3 \cdot 16 \cdot 15 = 720$

=> всего вариантов $480 + 720 + 93 = 1293$

=> еще вар. когда 1 число $= 5^{17} \cdot 7^{16}$; а ост. 35 и 35

=> еще 3 вар.

Числови ③ Втор 21.

№5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\boxed{x>1{,}5 \quad x\neq 2}$

$\Downarrow$ всегда полож.

R $>0 \neq 1$

~~всегда~~

$x>-1$

$x\neq 0$

два числа $=$; 3 меньше на 1

случай

1 $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=\dfrac{\log_{2x^2-3x+5}2x^2-3x+5}{\log_{2x^2-3x+5}x+1}$

$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=\dfrac{1}{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)}\ \Big|\cdot\log_{2x^2-3x+5}x+1$

$\cancel{2}\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log\ldots(x+1)=1$

$\Downarrow$ t $\quad\Downarrow$ $\frac{1}{t}$

$\cancel{(2x+3)^2}$

отсюда $x=\cancel{0}$

случай 2.

$2\log_{2x-3}x+1=\log_{x+1}2x^2-3x+5$

отсюда $x=\frac{1}{2}$ и 4

$\frac{1}{2}$ не подходит ОДЗ,

заметим, что при $x=4$ условие вып. $\Rightarrow$ 4 ответ.

21101211 (U333519 M1302291)

случай 3.   чистовик

Вар 21

$\log_{\sqrt{2x+3}} x+1 = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

отсюда $x = 2$ и $\frac{1}{2}$ – не подх

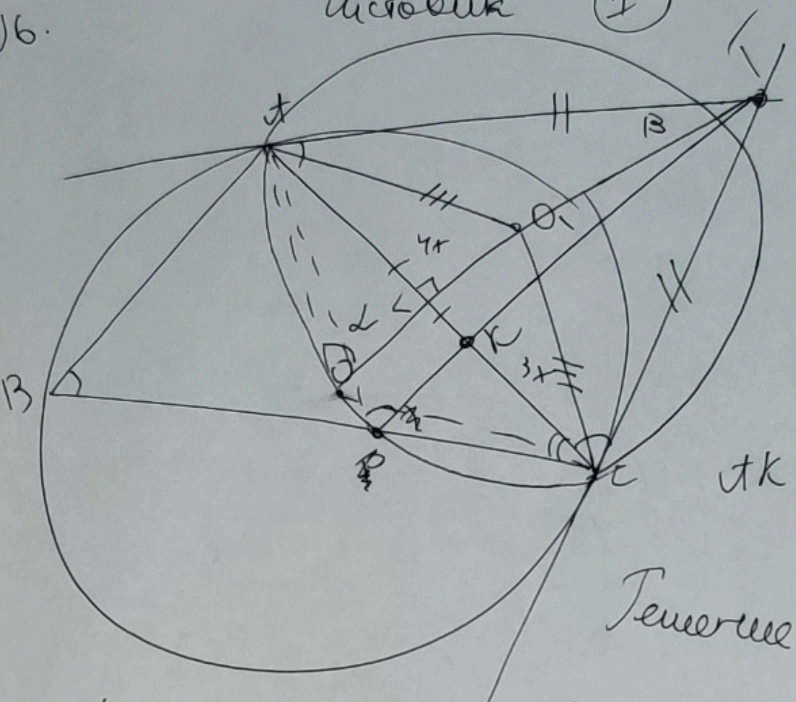
не подх

из этого случая решений нет $\Rightarrow$

Ответ: $x = 4$

21101211 (U333519 M1302291)

№6. Чистовик (1) Вар 21.



$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

S_{ABC} – ?

AC – ?

$AK / KC = \frac{4}{3}$ по т. S

Решение:

поскольку $AOCT$ – впис., то окр. прох. через AOC проходя через T тоже; а впис. он т.к. в нем два равных ΔAOT и TOC; где $TAO = \angle TCP = 90^\circ$; а $TOA = \angle TOC$ т.к. медиан. как стороны в р.б ΔAOC, где AO и OC – R

$\Rightarrow \angle TAC = \angle TPC \Rightarrow \Delta BCA \sim \Delta PCK \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$

$= \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$; тогда $S_{ABC} = \frac{9 \cdot 49}{9} = 49$ Ответ: $S = 49$

(пункт б)

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$

$S_{APK} + S_{PKC} = 21 =$

$\angle APC = 2\angle ABC$ т.к. $AOPC$ – впис.

~~пусть $OL = y$; а $O_1T = x$; тогда используя ($\angle\alpha = ABC$);~~

~~найдем, что~~ т.к. PK – бисс $\Rightarrow AP / PK = 4y / 3y$

$\Rightarrow S = 6y^2 \sin 2\alpha \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$= S = 6y^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{58}} \cdot 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{58}} = 21 \qquad \frac{12y^2 \cdot 21}{58} = 21$

$12y^2 = 58$

$y = \sqrt{\frac{58}{12}}$

w6.

Чистовик 3

Вар 21.

по т. cos

$\cancel{3}\ 9\cdot\frac{58}{12}+16\cdot\frac{58}{12}-2\cdot 12\cdot\frac{58}{12}\cos 2\alpha=?$

$\frac{58}{12}(25-24\cos 2\alpha)=?$

$\frac{58}{12}\left(25-\frac{\overset{12}{\cancel{24}}\cdot 40}{\underset{29}{\cancel{58}}}\right)=AC^2$

$AC^2=\frac{245}{6}$