Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101157**

ID профиля: **865395**

Вариант 21

Чистовик ①

№ 1

~~S - арифметическая прогрессия - арифм.~~

S - сумма первых 7 членов возрастающей арифм. прогрессии

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$$

$$S = \frac{2 \cdot a_1 + 6 \cdot d}{2} \cdot 7 = 7 \cdot a_1 + 21d$$

$$a_8 = a_1 + 7d$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$a_{14} = a_1 + 13d$$

$$a_{17} = a_1 + 16d$$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} (a_1 + 7d) \cdot (a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27 \\ (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23d \cdot a_1 + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 & ① \\ a_1^2 + 23d \cdot a_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 & ② \end{cases}$$

Домножим ② на (-1), затем ① + ②:

$$a_1^2 - a_1^2 + 23d \cdot a_1 - 23da_1 + 112 \cdot d^2 - 130d^2 > 7a_1 - 7a_1 + 21d - 21d + 27 - 60$$

$$18d^2 < 33$$

$$d < 2$$

Так как прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел, то $d = 1$. Подставим в систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

Чистовик ②

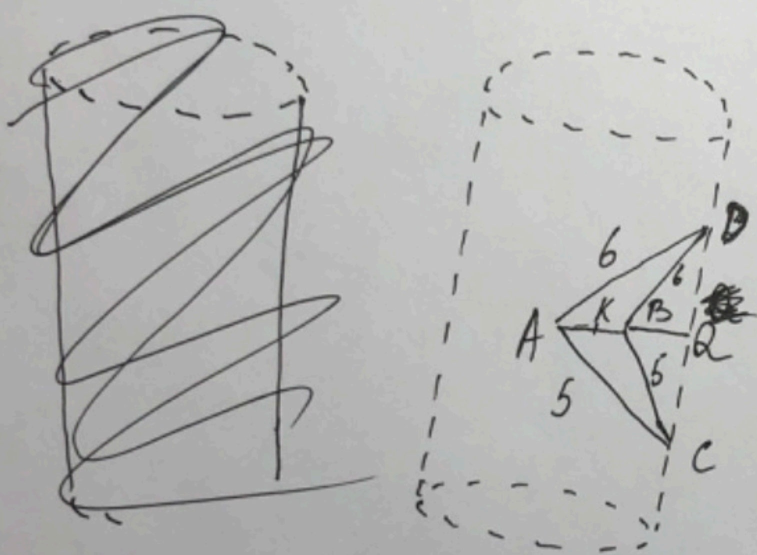
$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ (a_1+8)^2<15 \end{cases}$$, тогда $\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ |a+8| < \sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow |a_1+8| \leq 3$

$a_1 \in \{-5;-6;-7;\cancel{-8}\,-9;-10;-11\}$

Ответ: $a_1 \in \{-5;-6;-7;\cancel{-8}\,-9;-10;-11\}$

№2



Так как $CD \parallel$ Оси цилиндра из соображений симметрии видим, что $AB \parallel$ плоскости основания цилиндра, значит AB - хорда. Следовательно радиус минимален, когда хорда = диаметру $\Rightarrow r = \frac{AB}{2} = 2$

Середина AB - точка K

Отметим (K-перпендикуляр на CD - точка Q)

$KQ = 2$

$DK = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$CK = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$DQ = x$

$CQ = DC - x$

$32 = 4 + DQ^2$

$DQ = \sqrt{28}$

$DC = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

Чистовик ③

Также нужно не забыть, когда $C \in DQ$, тогда $X = DQ$; $CQ = X - DC$

Тогда $DC = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

Ответ: $DC = \sqrt{28} + \sqrt{17}$; $DC = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

№3

Раз искомое множество точек (a, b), которые удовлетворяют условию

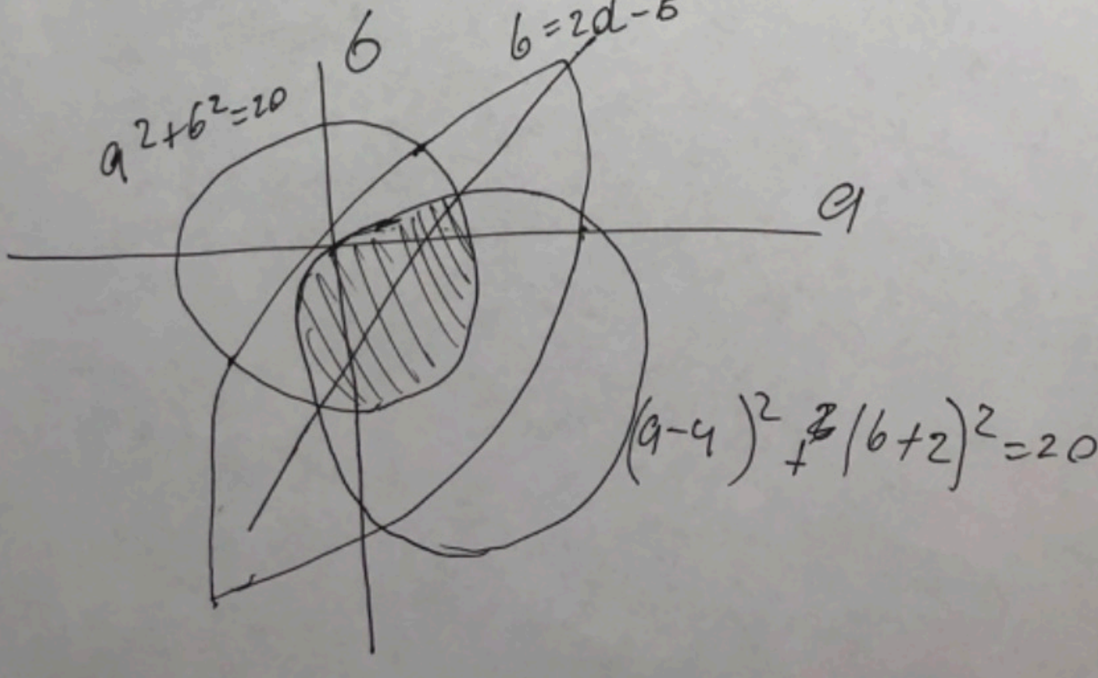
$$a^2 + b^2 \leq \min(8a - 4b, 20)$$

Это равносильно объединению следующих двух множеств:

$$\begin{cases} 8a - 4b \leq 20 \\ a^2 + b^2 \leq 8a - 4b \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 8a - 4b \geq 20 \\ a^2 + b^2 \leq 20 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2a - b \leq 5 \\ (a-4)^2 + (b+2)^2 \leq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - b \geq 5 \\ a^2 + b^2 \leq 20 \end{cases}$$

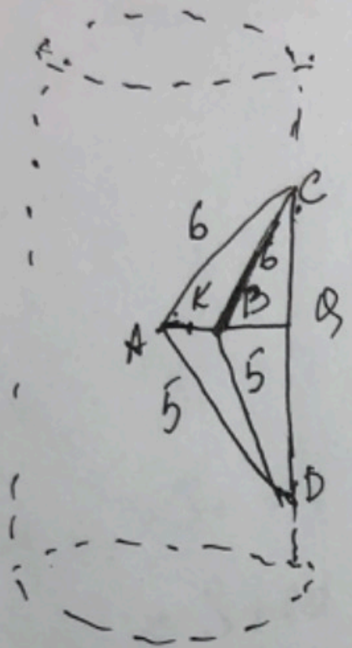


Чистовик ④

Заметим, что уравнение $b=2a-5$ является прямой, проходящей через точки пересечения окружностей $(a-4)^2+(b+2)^2=20$ и $a^2+b^2=20$

Тогда решением первого уравнения является ~~плос~~ ~~плоскость~~ S_1, а решением второго ~~плоск~~ S_2. Тогда все р

Черновик



AD = 5 = DB

№1 Черновик

S_7

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = S$

$a_8 a_{17} > S + 27$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$a_{11} a_{14} < S + 60$

$a_{11} a_{14} < S+60$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$\cancel{a_{17} \cdot a_8}$ $S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$

$a_8 \cdot (a_8 + 9d) > S + 27$

$a_8^2 + 9a_8 d > \frac{7}{2}(2a_1 + 7d)$

$a_8^2 + 9a_8 d > \frac{7}{2} 7a_1 + 7d$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

$S = a_1 + (a_1 + d) + a_1 + 2d + a_1 + 3d$

$S = \frac{a_1 + a_7 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}(a_1 + a_7)$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S+60 \quad \frac{7}{2}(a_1 + a_1 + 7d)$

$a_{11} \cdot (a_{11} + 3d) < S+60$

№2.

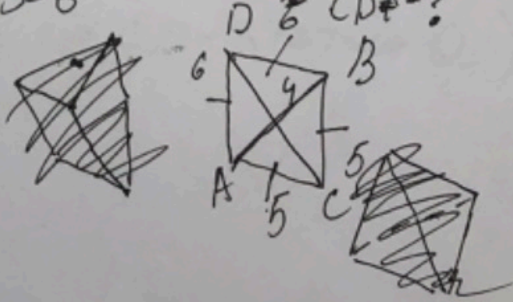
$AB = 4$

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 6$

R_{min} - ?

CD - ?



№3) $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b, 20) \end{cases}$

$$(x^2-2ax+a^2)+(\cancel{y-b}\ y^2-2by+b^2)\le 20$$

$$a^2+b^2\le \min(\cancel{8a}\ 4(2a-b),20)$$

$$\cancel{\min(8a-4,20)}$$

$$\cancel{(4,20)}$$

~~解~~:

$$\cancel{x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2\le 20}$$

$$\cancel{x^2+y^2}\ \cancel{a^2+b^2\le 20+2ax-x^2-a^2-y^2+2by}$$

$$\cancel{20+}$$

21101157 (U865395 M1302450)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101157**

ID профиля: **865395**

Вариант 21

Чистовик 1

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = \cancel{35}\ 5\cdot 7 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

Простые делители только 5 и 7, чтобы выполнялись оба условия у нас из тройки одно число делиться на 5 и одно на 5^{18}, третье же на 5^n, где $n \in [1;18]$, n - натуральное.

Все варианты перестановок это $3!\cdot 18$, но нужно не ~~зб~~ забыть, что варианты, где две ~~1~~ 1 или две ~~восемнадцат~~ восемнадцатки мы считаем по два раза. Таких вариантов ~~6~~ 6, поэтому $3!\cdot 18 - 6$, аналогично с 7 одно делится ровно на семь и одно на 7^{16} и одно на 7^k, $k \in [1;16]$, k - натуральное.

Итого $16\cdot 3!$ и не забываем про 6 вариантов, которые посчитаны дважды $16\cdot 3! - 6$.

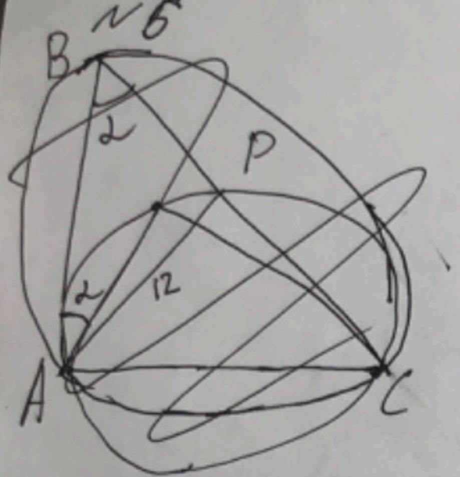
Значит

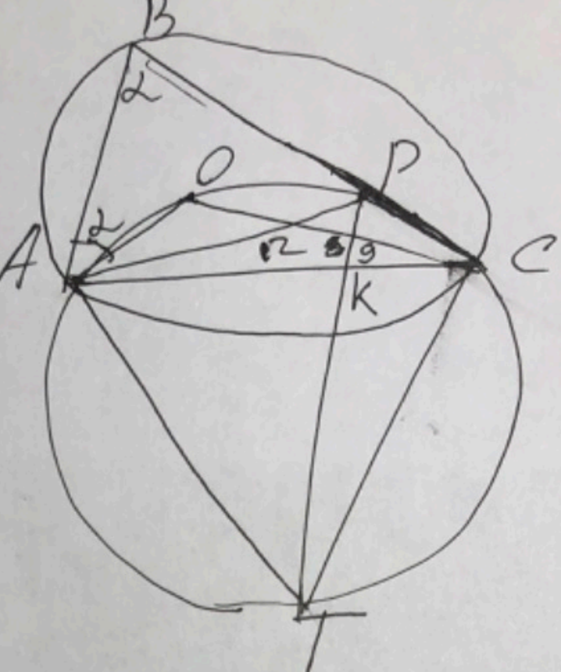
Ответ: $(16\cdot 3! - 6)\cdot(18\cdot 3! - 6) = 90\cdot 102 =$
$= 9180$ - вариантов троек, ~~если мы не учитываем варианты где две 1 или две восемнадцатки; а если учитываем то~~
~~$(16\cdot 3!)\cdot(18\cdot 3!) = 96\cdot 108 = 10368$~~

21101157 (U865395 M1302451)

Чистовик 2

№6





Решение:

Как известно $\angle OAT$ $\angle OCT = 90°$, а значит точки A, O, P, C, T лежат на одной окружности более того $AT = TC$, а значит PK - биссектриса $\angle APC$. Как известно $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$ но с другой стороны, по условию $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{12}{9} \left(= \frac{4}{3}\right)$. Значит $\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$, но при этом $21 = 12 + 9 = S_{APK} + S_{PKC} = S_{APC} = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin\angle APC}{2}$, подставим сюда $PC = \frac{3}{4} \cdot AP$, получим, что $21 = \frac{\frac{3}{4} AP^2 \cdot \sin\angle APC}{2}$, то есть $AP^2 \cdot \sin\angle APC = 56$, далее обозначим $\angle ABC = \alpha$, как известно $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$, значит $\angle BAP = \alpha$

~~Черновик~~ Чистовик

~~Твердааааь~~

То есть $\triangle ABP$ — равнобедренный и $AP = BP$, но тогда $S_{ABP} = \frac{AP \cdot BP \cdot \sin\angle APB}{2} = \frac{AP^2 \cdot \sin\angle APC}{2} =$

$= 28$, так как $\angle APB + \angle APC = 180^\circ$, значит

~~Так как~~ $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = 49$

б) По условию $tg\, a = \frac{3}{7}$, значит $\frac{\sin a}{\cos a} =$

$= \frac{3}{7}$, при этом значит $\sin a = \frac{3}{\sqrt{58}}$,

$\cos a = \frac{7}{\sqrt{58}}$.

Далее $\sin\angle APC = \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{21}{29}$. А значит поскольку $AP^2 \cdot \sin\angle APC =$

$= 56$, а $\sin\angle APC = 21$, то $AP = \sqrt{\frac{8 \cdot 29}{3}}$,

$PC = \frac{3}{4} \cdot AP = \sqrt{\frac{29 \cdot 3}{2}}$. Наконец, из теоремы косинусов для $\triangle APC$

$$AC^2 = \frac{16 \cdot 29 + 29 \cdot 9}{6} - 116 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1 = \frac{24}{29}$$

Таким образом, $AC^2 = \frac{725 - 576}{6} = \frac{149}{6}$

Ответ: б) $AC = \sqrt{\frac{149}{6}}$; а) $S_{ABC} = 49$

21101157 (U865395 M1302451)

~~Черновик~~ (4)
Чистовик

№5

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$$

$$=\frac{2\cdot\ln(x+1)}{\ln(2x-3)}\cdot\frac{2\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x+1)}=4,$$

Значит перемножив два равных числа и число на один меньше мы получим 4. Пускай это k

$k^2\cdot(k-1)=4$, значит $k=2$

Значит $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$, тогда $x=4$, либо $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1$, тогда ~~x+2~~ $x^2+4=0$

$x\in\mathbb{Q}$ значит $x=4$

Проверка $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1$

$32-12+5=64-48+9$

$25=25$ ✓ при $x=4$

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$$

$$x^2+2x+1=2\cdot x^2-3x+5$$

$25=25$ ✓ при $x=4$

Ответ: 4

21101157 (U865395 M1302451)

Черновик

№4

~~НОД~~

НОД$(a;b;c)=35$

НОК$(a;b;c)=5^{18}\cdot7^{16}$

$$\begin{array}{r} \times 108 \\ 96 \\ \hline 648 \\ 972 \\ \hline 10368 \end{array}$$

$96\cdot108$

НОК$(a;b;c)=5^{16}\cdot7^{16}\cdot5^{2}=$

$=5(35)^{16}\cdot5^{2}=$

$=35^{16}\cdot25=$

$=(35^{14}\cdot35^{2})^{2}$

1) $25;35^{8};35^{8}$

2) $5;5;35^{16}$

3) $35^{9};35^{7};25$

4) $25;35^{9};35^{7}$

5) $35^{7};35^{9};25$

$35^{6};35^{10};25$

6) $35^{10};35^{6};25$

7) $25;35^{10};35^{6}$

8) $25;35^{6};10$

9) $35^{6};25;35^{10}$

10

№5

Ограничения.

1) $\sqrt{2x-3}\neq1$

$\sqrt{2x-3}>0$

$x\neq2$

$x>\frac{3}{2}$

$a;b;c=000,000,000$

$x+1>0$

$x>-1$

2) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$2x^2-3x+5\neq1$

$2x^2-3x+4\neq0$

$D=9-4\cdot2\cdot4$ — действит. корней нет

$2x^2-3x+5>0$

Действ. корней нет

$(2x-3)^2>0$

$2x-3\neq0$

$x\neq\frac{3}{2}$

3) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2x^2-3x+5>0$

$x+1\neq1$

$x\neq0$

$x+1\geq0$

$x>-1$

21101157 (U865395 M1302451)