Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101141**

ID профиля: **374809**

Вариант 21

Чистовик Матем. 11 кл. (В21) стр 1

№1 $S = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7(a_1+3d)$, d – р-ть ар. пр. $d>0; d\in Z$

$\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14} < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7(a_1+3d)+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+7\cdot16d^2-7a_1-21d-27>0 \\ a_1^2+23a_1d+130d^2-7a_1-21d-60<0 \end{cases}$

Пусть $X = a_1^2+23a_1d+7d\cdot16d-7a_1-21d$; $X\in Z$

$\begin{cases} X>27 \\ X+18d^2-60<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X\geq 28 \\ 18d^2<60-X\leq 32 \end{cases} \Rightarrow 0\leq d^2\leq\frac{32}{18}$; $d>0; d\in Z$

$0\leq d^2\leq 1 \Rightarrow \underline{d=1}$

$\begin{cases} X\geq 28 \\ X<60-18d^2=42 \end{cases} \Leftrightarrow 28\leq X\leq 41$

$41\geq a_1^2+23a_1+112-7a_1-21\geq 28$

$14\geq(a_1+8)^2\geq 1$

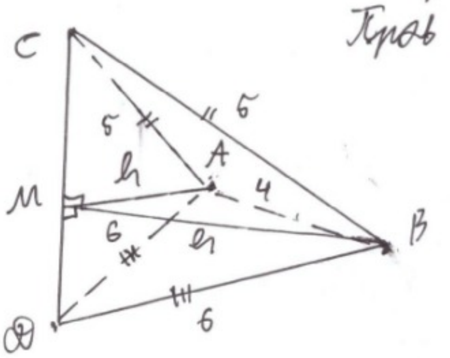
$\sqrt{14}\geq|a_1+8|\geq 1 \Rightarrow 3\geq|a_1+8|\geq 1$

$a_1+8\in\{-1;-2;-3;1;2;3\}$

$a_1\in\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$

Ответ: $a_1\in\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$.

№2. $CD \parallel$ оси $\Rightarrow CD$ — образующий.



Пров. AM; $AM\perp CD$.

Расс. $\triangle ABM$, радиус опис. около него окр-ти равен радиусу цилиндра; по т. синусов:

$R=\frac{4}{2\sin\angle AMB} \Rightarrow R_{min}=\frac{4}{2\cdot1}=2$; $\angle AMB=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AM=MB=2\sqrt{2}$

По т. Пифагора для $\triangle CMB$; MBD: $CD=\sqrt{CB^2-MB^2}+\sqrt{DB^2-MB^2}=\sqrt{25-8}+\sqrt{36-8}=$

$=\sqrt{17}+2\sqrt{7}$

21101141 (U374809 M1297771)

Ответ: $\sqrt{17}+2\sqrt{7}$

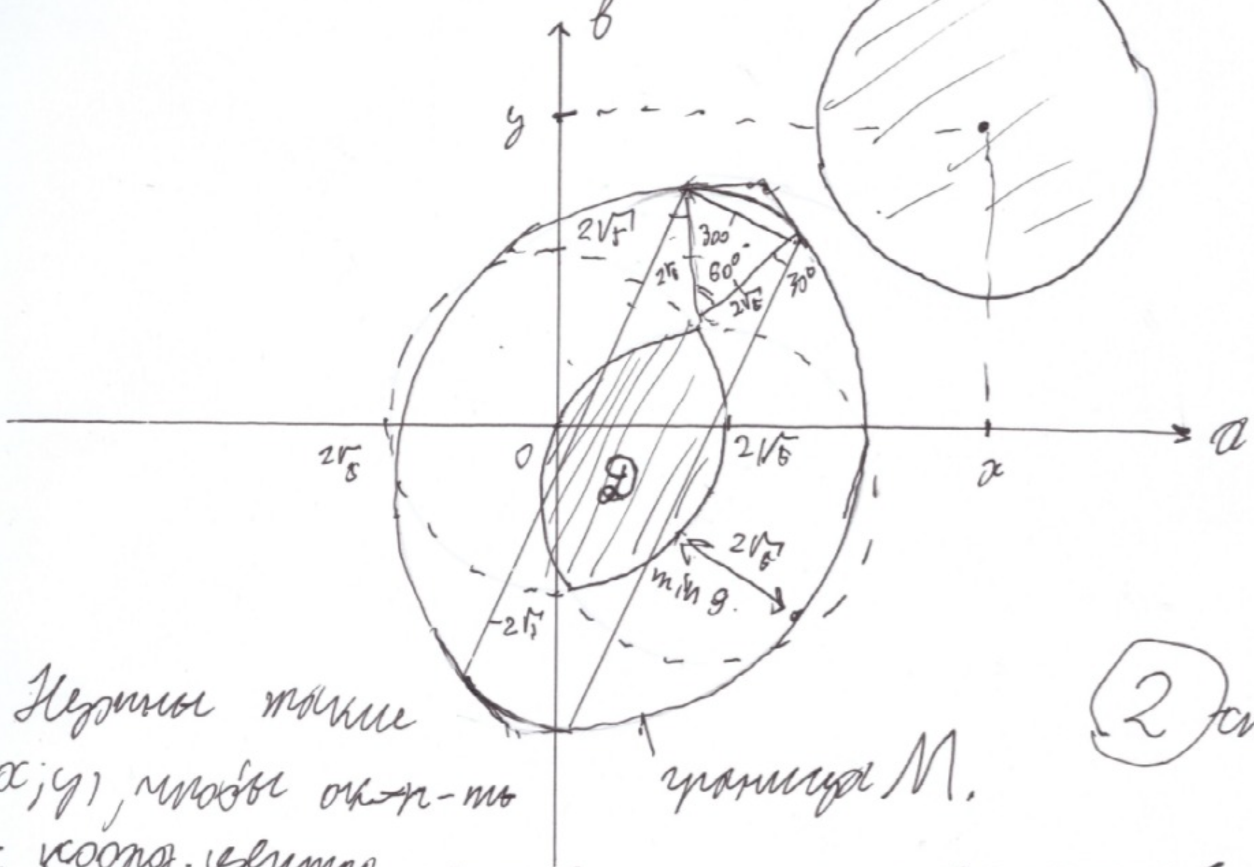
1 стр.

Чистовик Матем. 11 Кл. В21 стр. 2.

№3 $(x;y): \exists a, b \in \mathbb{R}:$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b;20)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20\end{cases}$$ — рассм. мн-во на пл-ти aOb



Нужны такие $(x;y)$, чтобы ок-р-ть с коорд. центра $a=x; b=y$ имела пересечение с фигурой D, образованной окр-ю с коорд. центра $(0;0)$ и окр-ю такого же радиуса (равного $2\sqrt{5}=\sqrt{20}$) проходящей ч/з $(0;0)$ и имеющей коорд центра $(4;-2)$. $(\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20})$.

граница М.

2 стр.

Понятно, что мн-во $(x;y)$ ограничено точками, минимальное расстояние от которых до точек фигуры D равно $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. ~~Это мн-во пересечение окр-тей радиусом $4\sqrt{5}$, содержащих центры друг друга.~~

$$\boxed{S=2\cdot\left(\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}\right)=40\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\ \text{Ответ: } 40\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right).}$$

Эк Чистовик матем. 11 Кл. В 21 стр. 3.

Это мн-во состоит из 2-х сегментов окр-тей радиуса $4\sqrt{5}$, огр. дугами этих окр-тей, равных по $120°$

~~$S_1 = 40$~~ $S_1 = 2\left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = 40\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) = \frac{160}{3}\pi - 40\sqrt{3}$

прямоугольником, сост. из 2-х хорд, стягивающ. эти сегменты и 2-х сторон, равных $2\sqrt{5}$

$S_2 = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} = 40\sqrt{3}$

И 2-х сегментов окр-тей радиуса $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$, стянутых хордами $2\sqrt{5}$.

$S_3 = 2\cdot\left(\frac{1}{6}\pi \cdot 20 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 20\right) = \frac{20\pi}{3} - 10\sqrt{3}$

$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{160}{3}\pi - 40\sqrt{3} + 40\sqrt{3} + \frac{20\pi}{3} - 10\sqrt{3} =$

$= \frac{180\pi}{3} - 10\sqrt{3} = 60\pi - 10\sqrt{3} = 10(6\pi - \sqrt{3})$; $S = 10(6\pi - \sqrt{3})$

Ответ: $10(6\pi - \sqrt{3})$

3 стр.

21101141 (U374809 M1297771)

Черновик мэтем-11-Кш

№1. $S=\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)\cdot 7$ – целые все

$a_8 a_{17} > S+27$, $a_{11}a_{14} < S+60$ $\quad a_1=?$

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d)>(a_1+3d)\cdot 7+27\\ (a_1+10d)(a_1+13d)<7(a_1+3d)+60\end{cases}$$

$$\begin{cases}\underline{a_1^2+23a_1d+7d\cdot 16d-7a_1-21d}-27>0\\ a_1^2+23a_1d+130d^2-7a_1-21d-60<0\end{cases}$$

$x-27>0 \quad x>27 \quad x\geq 28$

$x+18d^2-60<0 \quad 0\leq 18d^2<60-x$

$0\leq 18d^2\leq 59-x\leq$

$x\geq 28 \quad 0\leq 18d^2\leq 31$

$x<60-18=42 \quad 0\leq d^2\leq \frac{31}{18}$

$x\leq 59-18=41 \quad 0\leq d^2\leq 1$

$d=1$

$41\geq a_1^2+23a_1+112-7a_1-21\geq 28$

$41\geq a_1^2+16a_1+91\geq 28$

$41\geq a^2+16a_1+64+27\geq 28$

$41\geq (a_1+8)^2+27\geq 28$

$14\geq (a_1+8)^2\geq 1$

$3\geq |a_1+8|\geq 1$

$\left[\begin{array}{l}a_1+8\in\{1;2;3\}\\ a_1+8\in\{-1;-2;-3\}\end{array}\right.$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l}a_1\in\{-7;-6;-5\}\\ a_1\in\{-9;-10;-11\}\end{array}\right.}$$

$-x\leq -28$

$59-x\leq 60-28$

$60-x\leq 32$

$104\ 42=112d^2$

18

$\frac{-46}{9}$

$-x\leq -28$

$59-x\leq 31$

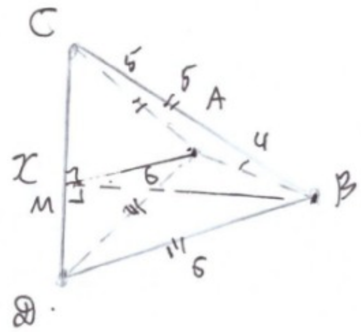
$\frac{31}{18}$

$111-20=101-10=91$

$91-60=31-4=30-3=27$

$21-7=20-6=14$

№2. $AB=4$, $AC=CB=5$; $DA=DB=6$.



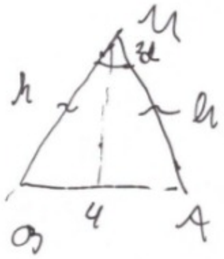
опис. в цилиндр. $\quad$ 30-2

$CD=?$; радиус min

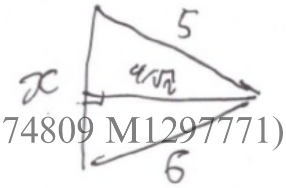
R_{min}.

$R=\frac{\cancel{4}}{2\sin 2\alpha}$ $\quad R_{min}=\frac{4}{2\cdot 1}=2$

; $\sin 2\alpha=1 \Rightarrow 2\alpha=90^\circ \Rightarrow$



$\Rightarrow h=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$



$x=\sqrt{5^2-8}+\sqrt{6^2-8}=\sqrt{25-8}+\sqrt{36-8}=$

$=\sqrt{17}+2\sqrt{7}$

21101141 (U374809 M1297771)

Черновик. 11 кл. матем.

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 20$

№3. $(x;y):\exists\, a,b\in\mathbb{R}:$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases}$$

(2)

$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20\end{cases}$$

$2\sqrt{5}$

$\sqrt{16+4}$

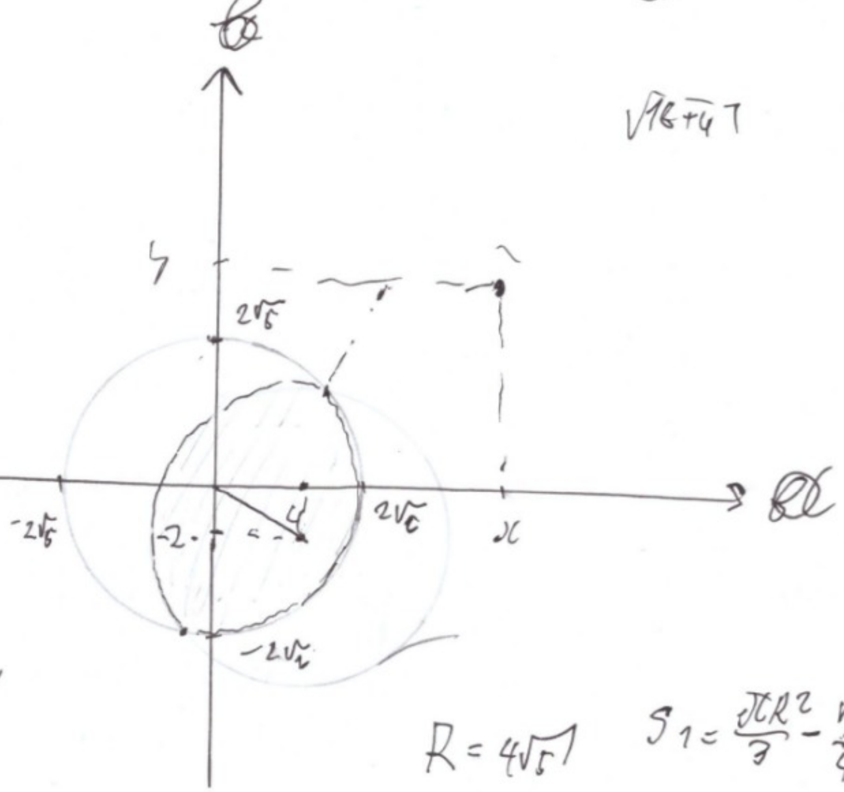
$\frac{1}{3}\cdot\pi R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2;$

$=R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$R^2\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$16\cdot 5=40\cdot 2$

$40\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right).$



$R=4\sqrt{5}$ $\quad S_1=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$

$\cancel{S=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi R^2}$ $\quad S=2S_1=2\cdot\left(\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right.$

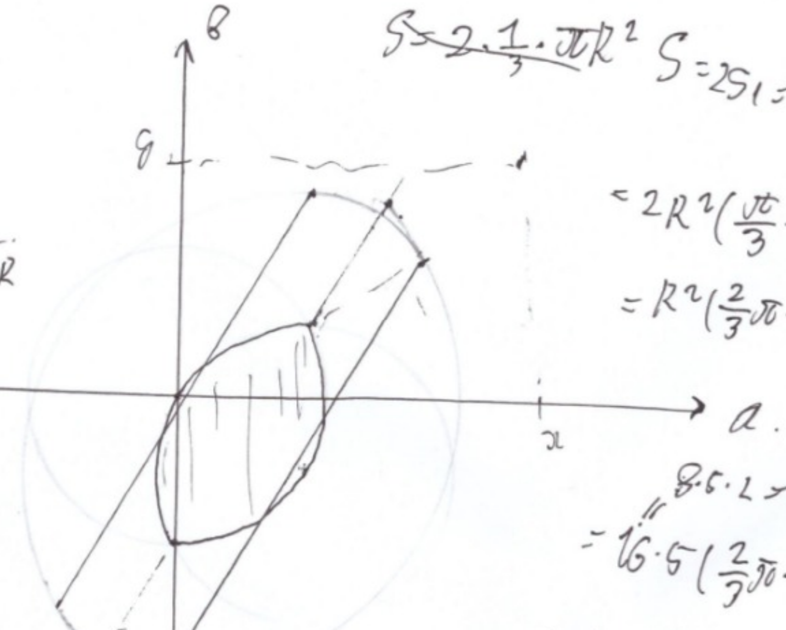
$\frac{x}{\sin 60^\circ}=2R$

$x=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$=2R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=$

$=R^2\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a

$\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$



$8\cdot 5\cdot 2=40\cdot 2$

$=16\cdot 5\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$

$=40\cdot\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

21101141 (U374809 M1297771)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101141**

ID профиля: **374809**

Вариант 21

Чистовик лист. 11 Кл. В.21 стр. 1

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=5\cdot 7 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} abc = 5^{19}\cdot 7^{17} \\ a,b,c \geq 35 \end{matrix}$$

Пусть $a=5^i\cdot 7^k$; $b=5^\alpha\cdot 7^\beta \Rightarrow c=5^{19-(i+\alpha)}\cdot 7^{17-(k+\beta)}$

$i+\alpha \leq 18$; $i;\alpha \geq 1$

$i \in \{1;\dots;17\}$

$\alpha \in \{1;\dots;17\}$

$i=1 \Rightarrow \alpha \in \{1;\dots;17\}$ – 17 случаев на α

$i=2 \Rightarrow \alpha \in \{1;\dots;16\}$ – 16 сл. на α

$i=3$ – 15 сл на α

$\vdots$

$i=17$ – 1 сл. на α

Всего $\frac{1+17}{2}\cdot 17 = 9\cdot 17$ ~~случаев~~ способов выбрать i и α

$k \in \{1;\dots;15\}$

$\beta \in \{1;\dots;15\}$ – по аналогии $\frac{15+1}{2}\cdot 15 = 8\cdot 15$ способов выбрать k и β.

$k+\beta \leq 16$

Всего случаи: $9\cdot 17\cdot 15\cdot 8 = 18360$

Ответ: 18360.

1

Чистовик стр. 2.

№5

Представим эти числа в виде:

$$\frac{2}{\log_{(x+1)}(2x-3)};\ \frac{2\log_{(x+1)}(2x-3)}{\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)};\ \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$$

пусть $a=\log_{(x+1)}(2x-3)$; $b=\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

$$\frac{2}{a};\ \frac{2a}{b};\ b$$

1) сл $\begin{cases}\frac{2}{a}=\frac{2a}{b}\\ \frac{2}{a}=b+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=a^2\\ \frac{2}{a}=a^2+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\neq 0\\ (a-1)(a^2+a+2)=0\end{cases}$

$a=1 \Rightarrow b=1$

$\log^2_{(x+1)}\cancel{(2x-3)}=\cancel{\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)}$

$\begin{cases}\log_{(x+1)}(2x-3)=1\\ \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+1=2x-3 \Rightarrow x=4\\ x+1=2x^2-3x+5\end{cases}\ \varnothing$

2) сл. $\begin{cases}\frac{2}{a}=b\\ \frac{2a}{b}+1=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{a}=b\\ a^2+1=\frac{2}{a}\end{cases} \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=2$.

$\begin{cases}x=4\\ x^2+2x+1=2x^2-3x+5 \Rightarrow x^2-5x+4=0\end{cases}$

2

$x=4$

3) сл $\begin{cases}\frac{2a}{b}=b\\ \frac{2}{a}+1=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{b^2}{2}\\ b^3-b^2-4=0 \Rightarrow (b-2)(b^2+b+2)=0\end{cases}$

$b=2$

$\begin{cases}b=2\\ a=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+2x+1=2x-3 \Rightarrow x^2=-4\\ x^2+2x+1=2x^2-3x+5\end{cases}\ \varnothing$

21101141 (U374809 M1297772)

Ответ: 4

Черновик.

$\log_{y>0}(2y-5)^{>0}$

$y > \frac{5}{2}$

y

$\alpha^3 + \alpha = 2$

$\alpha^3 + \alpha - 2 = 0$

$2(x+1)^{-a} = 2x+2-a$

$\frac{2a}{\frac{2}{a}} + 1$

$x = y$

$2a$

$\alpha = \frac{b^2}{2}$

$2 = ab \quad b = \frac{2}{a}$

$\frac{2a}{b} + 1 = \frac{2}{a}$

$\frac{2a}{\frac{2}{a}} + 1 = \frac{2}{a}$

$a^2 + 1 = \frac{2}{a}$

$b^2 = 2a$

$\frac{2}{a} + 1 = b$

$\frac{4}{b^2} + 1$

$5 = 32 - 12 + 5.$

$x = 4$

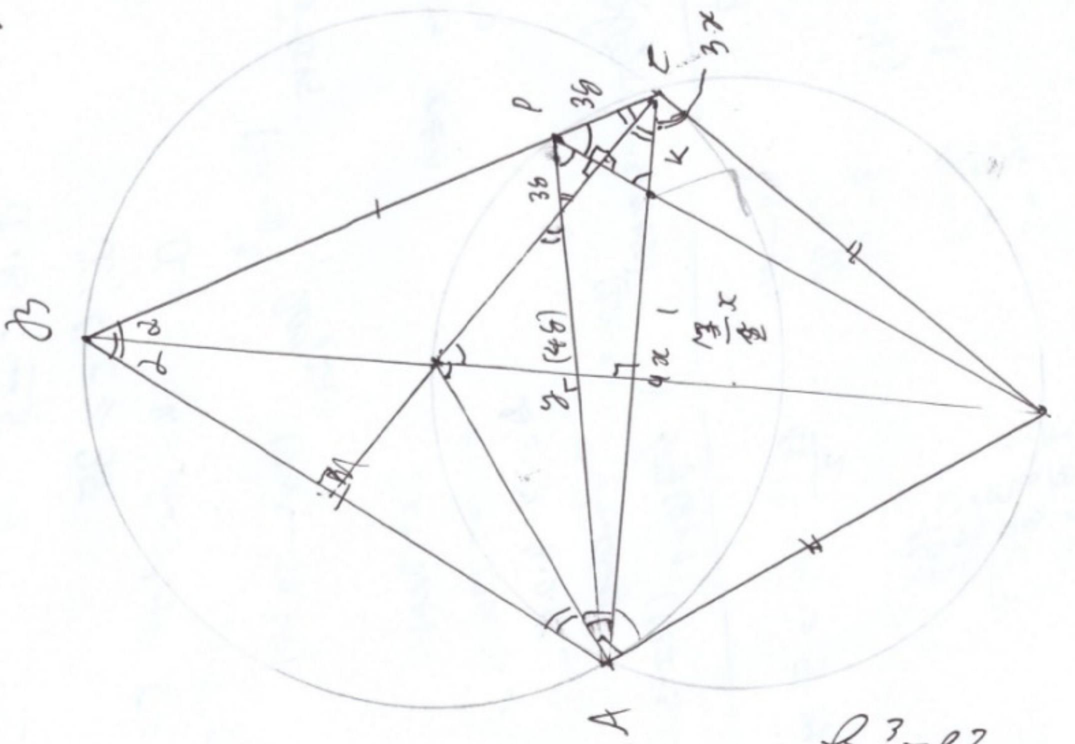
$a = \frac{b^2}{2}$

x^2

$$\begin{array}{l|l} a^3 + a - 2 & a-1 \\ \hline a^3 - a^2 & a^2 + a + 2 \\ a^2 + a & \\ a^2 - a & \\ 2a - 2 & \\ 2a - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$a = 1$

log



$\frac{5}{4}$

$2a = \frac{3}{4}$

$\frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 5$

$5 - \frac{9}{8} = \frac{31}{8}$

$\frac{2}{\frac{b^2}{2}} + 1 = b$

$\frac{4}{b^2} + 1 = b$

$4 + b^2 = b^3$

$b^3 - b^2 - 4 = 0$

$8 - 4 - 4$

$b = 2$

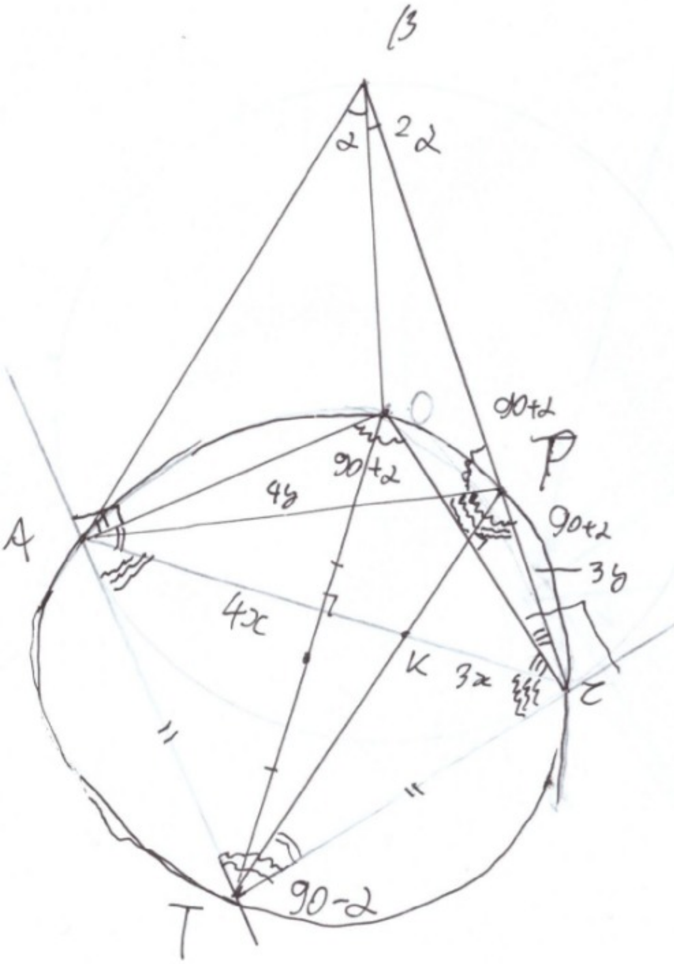
$(2x-3)x + 5$

$(2x-3)x + 5$

$$\begin{array}{l|l} b^3 - b^2 - 4 & b-2 \\ \hline b^3 - 2b^2 & b^2 + b + 2 \\ b^2 - 4 & \\ b^2 - 2b & \\ 2b - 4 & \end{array}$$

21101141 (U374809 M1297772)

Черновик



$S_{ADK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$S_{\Delta ABC} = ?$

$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$

$\alpha + \beta + \gamma = 90°$

$\gamma + \beta = 90° - \alpha$

$180 - (\gamma + \beta) = 90 + \alpha$

$180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$

$90 + \alpha$

$90 - \alpha$

$\alpha = \gamma$!

$\angle OAT = \angle OCT = 90°$;

$\angle CAT = \angle ACT \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA.$

$\frac{2}{\log_{(x+1)}(2x+3)}$; $\frac{2\log_{(x+1)}(2x-3)}{\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)}$; $\log_{(x+1)}(2x^2-3x-5)$.

$\frac{2}{a}$; $\frac{2a}{b}$; b

$2 = ab$

$a - 1 = \frac{2a}{b} = a^2 =$

$\frac{2}{a} = b$

$\frac{2}{a} = \frac{2a}{b} \Rightarrow b = a^2 = \frac{2}{a} - 1$

21101141 (U374809 M1297772)