Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101115**

ID профиля: **827453**

Вариант 21

1

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S_7 + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S_7 + 60 \end{cases}$$

Пусть d - знаменатель возрастающей арифметической прогрессии $\Rightarrow d > 0$

$a_8 = a_1 + 7d$; $a_{17} = a_1 + 16d$; $a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{14} = a_1 + 13d$;

$$S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > (a_1 + 3d)7 + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < (a_1 + 3d)7 + 60 \end{cases}$$

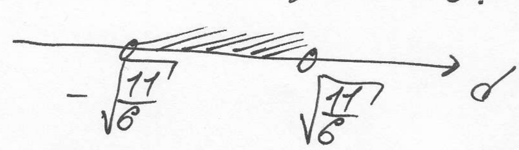
$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > S + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60 \\ -a_1^2 - 23a_1 d - 112d^2 < -S - 27 \end{cases} +$$

$$18d^2 - 33 < 0$$

$$6d^2 - 11 < 0 \quad ;$$

Методом интервалов:



Так как $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} d \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < d < \sqrt{\frac{11}{6}} \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d = 1$

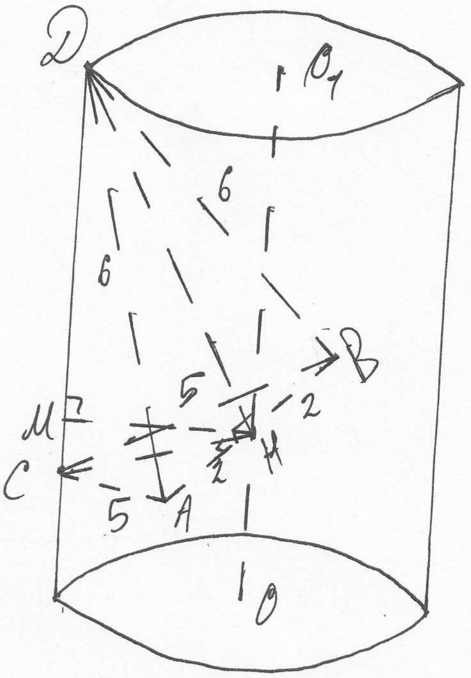
$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases} \quad \begin{cases} (a + 8)^2 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \frac{\sqrt{60}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -11 \le a \le 5$

Ответ: $a \in \{-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5\}$



OO_1 - ось цилиндра;
Так как по условию задачи $CD \parallel OO_1$ и вершины лежат на боковой поверхности => CD лежит в боковой плоскости перпендикулярно основанию цилиндра. По условию все вершины опираются на боковую сторону, и радиус цилиндра при этом должен быть минимальным, значит $R_{цил.} = \frac{1}{2}AB = \frac{4}{2} = 2$

В $\triangle ADB$ и $\triangle BAC$ проведем высоту DH и CH. По теореме Пифагора:

$DH = \sqrt{AD^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$CH = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$;

$AH \in AB$ => AH лежит на оси. В $\triangle CDH$ проведем высоту MH; $CD \perp$ оси осн. и $MH \perp CD$ => MH параллельно оси основания => $MH = R = 2$; В $\triangle DMH$ и $\triangle CMH$:
По теореме Пифагора:

$DM = \sqrt{DH^2 - MH^2} = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$CM = \sqrt{CH^2 - MH^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$ => $CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S_7 + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S_7 + 60 \end{cases};\quad a_8 = a_1 + 7d;$$

$$a_{17} = a_1 + 16d$$

$$S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$a_{14} = a_1 + 13d$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7(a_1 + 3d) + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7(a_1 + 3d) + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > S + 27 \\ a_1^2 + 23d + 130d^2 < S + 60 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -112 \\ 48 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\cancel{a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > S + }$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60 \\ -a_1^2 - 23a_1 d - 112d^2 < -S - 27 \end{cases}$$

$$18d^2 < 33$$

$$6d^2 < 11$$

$$6d^2 - 11 < 0$$

$$d_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{11}{6}}$$

$$-\sqrt{\frac{11}{6}} \qquad \sqrt{\frac{11}{6}}$$

т.к. $d \in Z \Rightarrow$

$$d_1 = -1 \qquad d_2 = +1$$

1) $a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 130 < 60 + 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases}$$

$(a_1 + 8)^2 > 0$ всегда > 0

$$a_1 + 16a_1 + 49 < 0$$

$$a = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \frac{\sqrt{60}}{2}$$

т.к. $a \in Z \Rightarrow -11 \leq a \leq -5$

Черновик

2) $\begin{cases} a_1^2 - 23a_1 + 112 > 7a_1 - 21 + 27 \\ a_1^2 - 23a_1 + 130 \le 7a_1 - 21 + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 - 30a_1 + 106 > 0 \\ a_1^2 - 30a_1 + 91 < 0 \end{cases}$

$476 : 4 = 119$

$536 : 4 = 134$

$a = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 424}}{2} = \frac{30 \pm \sqrt{476}}{2} = \frac{30 \pm 2\sqrt{119}}{2} = 15 \pm \sqrt{119}$

$a = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 364}}{2} = \frac{30 \pm \sqrt{536}}{2} = 15 \pm \sqrt{134}$

$\cancel{a \geq 1}$ $15 + \sqrt{119} \le a \le 15 + \sqrt{134}$

т.к. $a \in \mathbb{Z}$

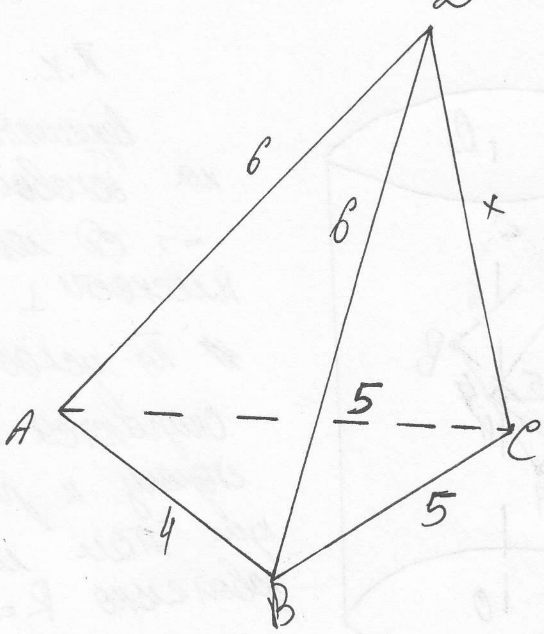
$26 \le a \le 26 \Rightarrow a = 26$

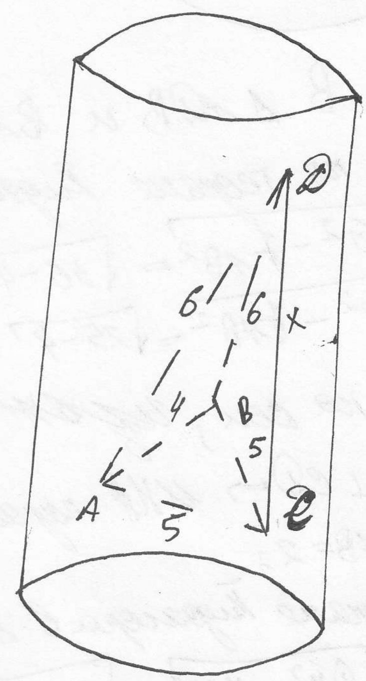
$15 - \sqrt{134} \le a \le 15 - \sqrt{119}$

т.к. $a \in \mathbb{Z}$

$4 \le a \le 4$

Ответ: $a \in [-11; -5] \cup \{4; 26\}$





Радиус минимальн
когда

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \Rightarrow$

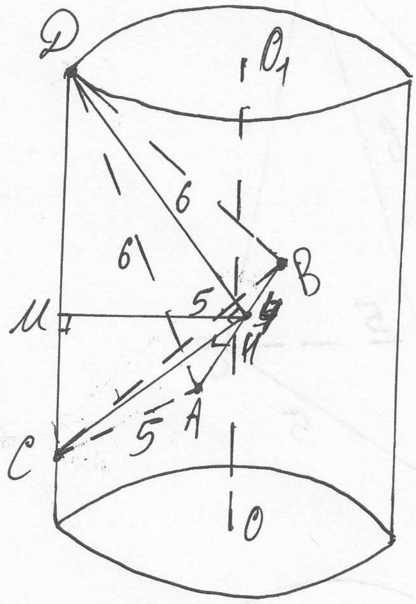
$\Rightarrow$ уровн. окруж. $\Rightarrow R \le \sqrt{20}$; $R \le 2\sqrt{5}$

3; 1

$10 \le 20$ $a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$

$8a-4b<20$

~~вта~~



OO_1 - ось цилиндр

т.к. $CD \parallel OO_1$ и вершины тетраэдра лежат на боковой поверхности => => CD лежит в боковой плоскости $\perp$ основанию.

~~#~~ по условию все вершины опираются на на боковую сторону и радиус цилиндра при этом минимальный, следовательно $R = \frac{1}{2}AB = 2$

В $\triangle ADB$ и BAC проведем высоты DH и CH; по теореме Пифагора

$DH = \sqrt{AD^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$CH = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

AH лежит на оси; ~~из AH~~ В $\triangle CDH$ проведем высоту MH; $MH \perp CD$ => MH парал. оси цилиндра =>

$MH = R = \frac{1}{2}AB = 2$;

По теореме Пифагора в $\triangle DMH$:

$DM = \sqrt{DH^2 - HM^2} = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

в $\triangle CMH$ $CM = \sqrt{CH^2 - MH^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$ =>

=> $CD = DM + CM = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$;

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101115**

ID профиля: **827453**

Вариант 21

чистовик

1

$$\begin{cases} НОД(a;в;c) = 35 \\ НОК(a;в;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

Из ~~НОК~~ следует, что каждое из чисел a, в, c это произведение степеней „5" и „7". То есть, каждое из них равно $5^x \cdot 7^y$, где $x \in [1;18]$ и $y \in [1;16]$. Всего перестановок: $5^1 : 5^{18} : 5^x = 3! = 6$. Посчитаем кол-во вариантов x для одной из перестановок. $x \in [2;17] \Rightarrow 16$ ~~вариантов~~ как ... $\Rightarrow$ всего $16 \cdot 6 = 96$. При $x=1$ $5^1 : 5^1 : 5^{18}$ – всего 3 варианта аналогично при $x = 18 \Rightarrow$ всего ~~ва~~ комбинаций степеней „3" $= 96+6 = 102$.

Аналогично распишем для „7". $7^1 : 7^{16} : 7^y$

$y \in [2:15] \Rightarrow 14 \cdot 3! = 84$ варианта

При $y=1$ и $y=16$ по 3 варианта $\Rightarrow$ всего: $84+6=90$

Всего троек $(a;в;c) = 90 \cdot 102 = 9180$

Ответ: 9180

Черновик

(1)

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=35 \\ НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

$\cancel{70}$ $\cancel{7\cdot 10}$

$5^6\cdot 7^5;\ 5^6\cdot 7^5;\ 5^6\cdot 7^6$

(2)

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1),\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3);\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3}\neq 1 \\ \sqrt{2x-3}>0 \\ x+1>0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0 \end{cases}$$

$\log_{\sqrt{a}} b;\ \log_c a;\ \log_b c$

$\log_{2x-3}(x+1)^2=\dfrac{1}{\log_{2x-3}2x^2-3x+5}$

$\cancel{\log_{2x-3}(x+}$

$\cancel{(x+1)(2x-5)}$

$2\log_a b=\dfrac{1}{\log_a c}$ $\cancel{\log}$

$\dfrac{2\log_a b\cdot\log_a c-1}{\log_a c}=0$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1 \\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1 \end{cases}$$

$\cancel{2x^2-3x-5}$

$$\begin{cases} x\neq 2 \\ x>\frac{3}{2} \\ x>-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

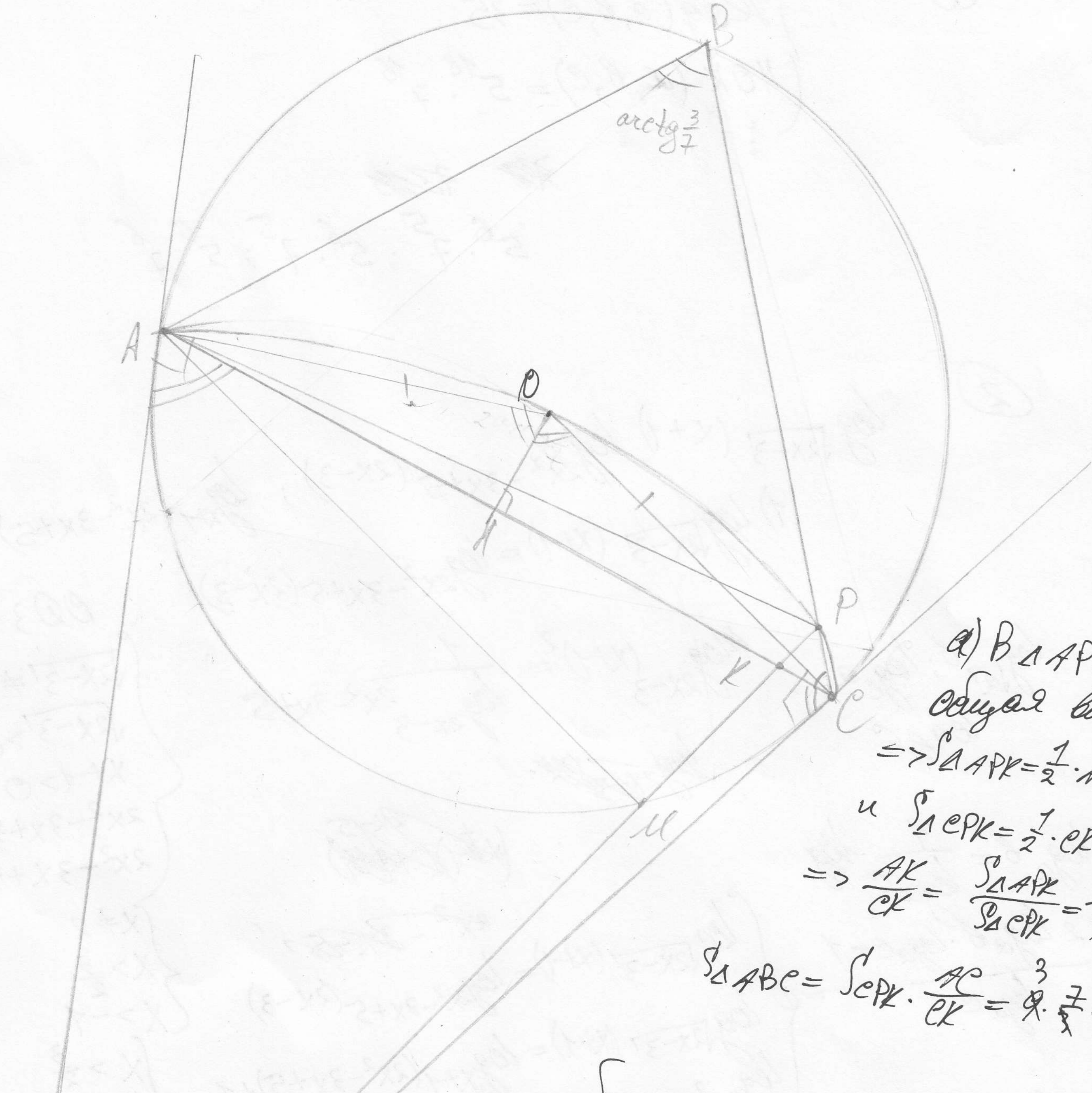
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{a}} b=\log_c a \\ \log_{\sqrt{a}} b=\log_b c+1 \\ \log_c a=\log_b c+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\log_{x+1}(2x-3)}=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \\ \dfrac{2}{\log_{x+1}(2x-3)}=\log_{x+1}((2x^2-3x+5)(x+1)) \\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=\log_{x+1}((2x^2-3x+5)(x+1)) \end{cases}$$

Черновик   2 лист из 4

$S_{APK}=12$

$S_{CPK}=9$



а) В $\triangle APC$ – общая выс. =>

=> $S_{\triangle APK}=\frac{1}{2}\cdot AK\cdot h$

и $S_{\triangle CPK}=\frac{1}{2}\cdot CK\cdot h$ =>

=> $\frac{AK}{CK}=\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

$S_{\triangle ABC}=S_{CPK}\cdot\frac{AC}{CK}=\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\frac{7}{\cancel{3}}=21$

б) $\angle AOC=2\angle ABC$;

т.к. $AO=CO=R$ => $\triangle AOC$ – равнобедр. =>

=> OH – выс. и биссек. =>

=> $tg\angle COH=\frac{CH}{OC}=\frac{3}{7}$ => пусть $CH=3x$ =>

$OC=AO=R=7x$

$AC=6x$;

$R=\frac{abc}{4S}$ => $\overset{1}{\cancel{7x}}=\frac{\cancel{7x}\cdot 7x\cdot 6x}{4\cdot 21}$

$84=\cancel{42}x^2$ $x^2=2$; $x=\sqrt{2}$ => $AC=6\sqrt{2}$

Ответ: $6\sqrt{2}$

$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Черновик 3 лист из 4

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$\cancel{\sqrt{2x-3} = x+1}$

$\cancel{2x-3 = x^2+2x+1}$

$$2\log_{2x-3}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1$$

$$\frac{2}{\log_{(x+1)}}$$

$$2\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x-3)} = 2\frac{\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)}+1$$

$\cancel{4x^2-12x}+$

$$\frac{2\ln(x+1)}{\ln(2x-3)} = \frac{2\ln(2x-3)+\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(2x^2-3x+5)}$$

$$\frac{1}{\log_{(x+1)}2x-3} = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$$2\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x-3)} = \frac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x+1)}$$

$$2x^2-3x+5 = (x+1)^2$$

$$x^2-3x+5 = \cancel{x^2}+2x+1$$

$$x^2-5x+4=0$$

$x_1=4;\ x_2=1$ не $\in$ ОДЗ

$$2\ln(x+1)\cdot\ln(2x^2-3x+5) = \ln(2x-3)\cdot\ln((2x-3)^2(2x^2-3x+5))$$

$$2\ln^2(x+1) = \ln(2x-3)\cdot\ln(2x^2-3x+5)$$

$x+1 = 2x-3$

$x=4$

$\ln^2 25 = \ln 5 \cdot \ln 25$

$\ln^2 25 = \ln^2 25$

$\boxed{\text{Ответ: 4}}$

$$\begin{array}{r} \times\ 99 \\ 87 \\ \hline 693 \\ 792\ \ \\ \hline 8613 \end{array}$$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

Из НОК следует, что каждое из чисел a, b, c – это представление ~~чисел~~ $5^x \cdot 7^y$, где $x \in [1;18]$ и $y \in [1;16]$. Рассмотрим сперва комбинации степеней пятерки. Всего у нас три варианта.

$5^1 : 5^{18} : 5^x$ => комбинаций будет $3! = 6$.

Соотвественно $x \in [2;17]$ – это 16 чисел, таким образом $16\cdot 6 = 96$ вариантов. ~~так же~~ И ситуация, когда $5^1 : 5^1 : 5^{18}$ – следовательно это дает ещё 3 варианта => ~~99~~ 102 вариантов всего для „5"

Аналогично для „7" $7^1 : 7^{16} : 7^y$ при $y \in [2;15]$ => $14 \cdot 6 = 84$ варианта и комбинация $7^1 : 7^1 : 7^{16}$ дает ещё 3 варианта => ~~87~~ 90 вариантов

Всего: $87 \cdot 99 = 8613$

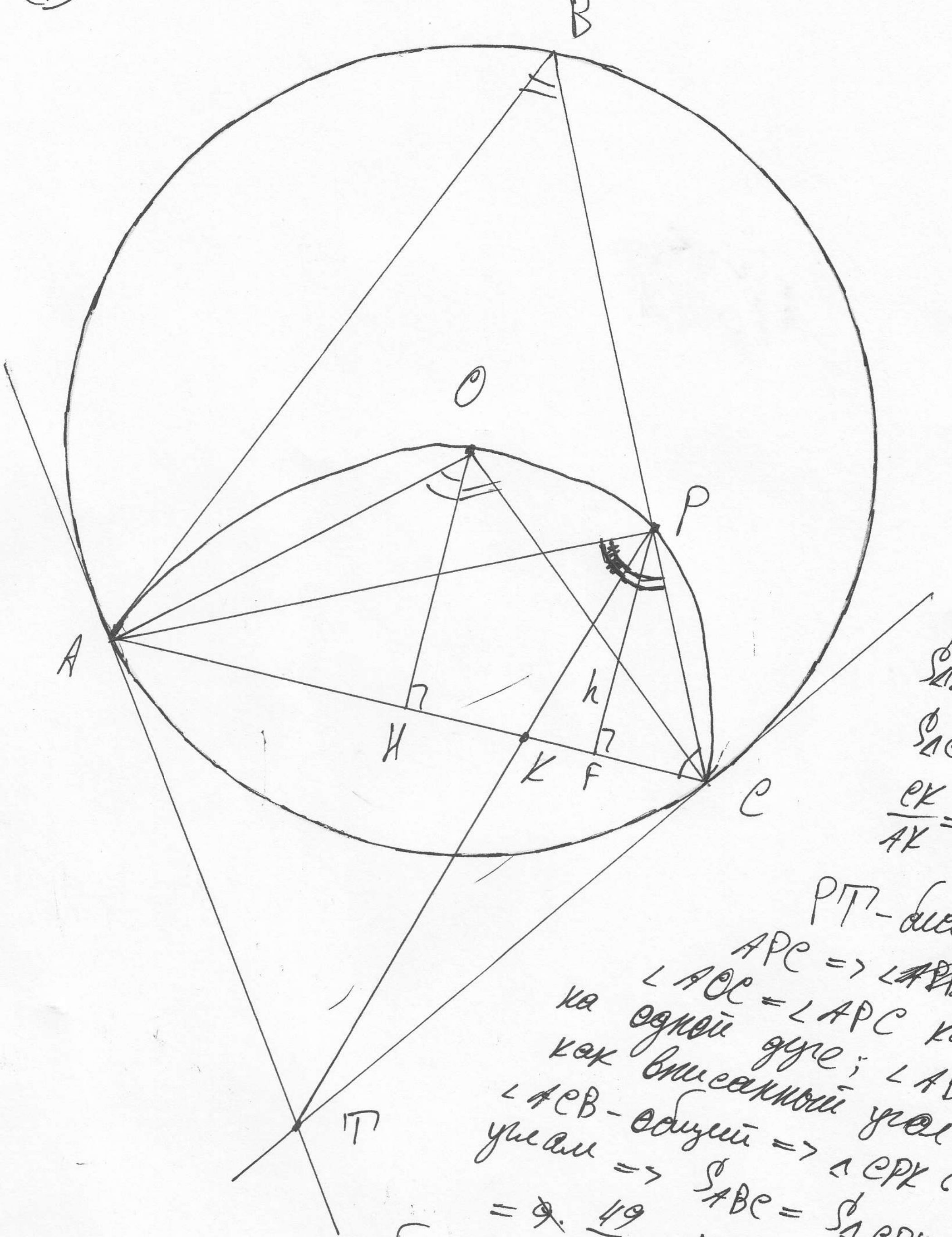
Ответ: ~~8613~~ 9180

$$\begin{array}{r} \times\ 102 \\ 90 \\ \hline 9180 \end{array}$$

чистовик

лист 2 из 2

3



Дано:

$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

Найти:

а) $S_{\Delta ABC}$

б) $\angle ABC = \operatorname{arcctg}\frac{3}{7}$

Найти: AC

Решение:

а) В ΔAPK и ΔCPK общая высота h => $S_{\Delta APK} = \frac{1}{2}\cdot AK\cdot h$ и $S_{\Delta CPK} = \frac{1}{2}\cdot CK\cdot h$ => $\frac{CK}{AK} = \frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

PT - биссектриса угла APC => $\angle APK = \angle CPK$; $\angle AOC = \angle APC$ как лежащие на одной дуге; $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ как вписанный угол => $\angle ABC = \angle CPK$; $\angle ACB$ - общий => $\Delta CPK \sim \Delta ABC$ по 2 углам => $S_{ABC} = S_{\Delta CPK}\cdot\left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \cancel{9}\cdot\frac{49}{\cancel{9}} = 49$

б) $AO = CO = R$ => ΔAOC - равнобедр. => HO - высота, медиана и биссектриса => $\angle COH = \angle ABC = \operatorname{arcctg}\frac{3}{7}$ => $\operatorname{tg}\angle COH = \frac{CH}{OH} = \frac{3}{7}$. Пусть $CH = 3x$ => $OH = 7x$.

По теореме Пифагора: $CO = AO = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{9x^2 + 49x^2} = \sqrt{58x^2} = x\sqrt{58}$; $CR = \frac{AO\cdot CO\cdot AC}{4\cdot S_{AOC}}$; $\frac{AC}{KC} = \frac{7}{3}$;

$\sin\angle COH = \frac{CH}{OC} = \frac{3x}{x\sqrt{58}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$; $AC = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$; 49