Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101111**

ID профиля: **260612**

Вариант 21

Чистовик Математика, вариант 21

№1

$a_8 \cdot a_{17} = (a_1+7d)\cdot(a_1+16d) = a_1^2+23da_1+112d^2$, где d - разность прогрессии

$a_{11}\cdot a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2+23da_1+130d^2$

$S = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$

Из условия $\begin{cases} a_1^2+23da_1+112d^2 > S+27 \\ a_1^2+23da_1+130d^2 < S+60 \end{cases}$, откуда $18d^2 < 33$ или $d^2 < 1\frac{5}{6}$,

учитывая, что прогрессия возрастает (т.е. $d>0$) и состоит из целых чисел ($d \in \mathbb{Z}$), то $d=1$

Тогда имеем

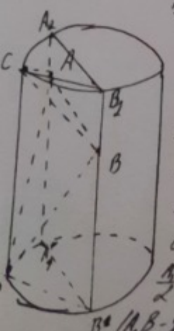
$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27 \\ a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+21+60 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$$

Для $(a_1+8)^2>0$ имеем $a_1 \neq -8$

Для $a_1^2+16a_1+49<0$ вершина $a_в = \frac{-16}{2} = -8$, корни симметричны, причём при $a_1=-5$: $(-5)^2+16(-5)+49=-6$; при $a_1=-4$: $(-4)^2+16\cdot(-4)+49=1$, т.е. подходят ~~a_1~~ $a_1 = \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

№2



$\triangle ADC = \triangle BDC$ по трём сторонам ($BD=AD=6$, $AC=BC=5$, CD-общая)

~~Тогда~~, Не нарушая общности задачи можно оказать, что CD - образующая цилиндра (иначе берём цилиндр меньшей высоты) тогда, т.к. A и B равно удалены от C и D, то проекция A_1B_1 ~~отрезка~~ AB на его основание ~~равна~~ $A_1B_1 = AB$. Возьмём проекцию на основание с вершиной D, ~~тогда из равнобедренного~~ Если радиус основания цилиндра минимален, то он равен $\frac{A_1B_1}{2}$. ~~Из тогда~~ из равнобедренного прямоугольного $\triangle A_1B_1D$ (A_1B_1-диаметр) имеем $DB_1 = 2\sqrt{7}$, cл-но $\cos\angle BDB_1 = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ($BB_1 \perp DB_1$ - т.к. BB_1 лежит на образующей), ~~$CD \perp A_1B_1$ (образующая)~~, тогда ~~$\angle CDB = 90^\circ - \angle BDB_1$, и $\sin\angle CDB = \cos\angle BDB_1 = \frac{\sqrt{7}}{3}$, тогда из треуг.~~

продолжение на следующем листе

1

Черновик

№2

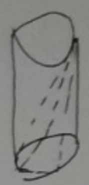
Черновик

№1

$a_5 a_{12} > 5+27$

$(a_1+7d)(a_1+11d) = a_1^2+23a_1d+112d^2 > 5+27$

$(a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2+23a_1d+130d^2 < 5+60$



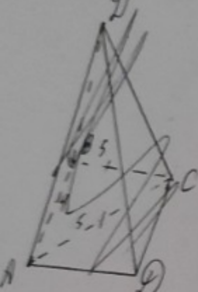
$18d^2 < 33$ $\quad 16-64+49=1$

$6d^2 < 11$

$d^2 < \frac{11}{6}$ $\quad 25-80+49=-6$

$d = \pm 1$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > \frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 + 27$



$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ a_1^2+23a_1d+130d^2 < 7a_1+21d+60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+48 \\ a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+81 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1^2+16a_1+64 > 0 \\ a_1^2+16a_1+49 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 8 \end{cases}$

$D = 468$

$3{,}4 < \sqrt{13} < 3{,}5$

$\frac{9}{2} < \sqrt{21} < 5$

$\frac{81}{4} = 20{,}25$

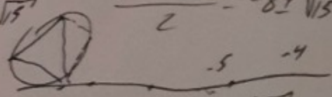
$16^2 - 4 \cdot 49 = 4 \cdot 64 - 4 \cdot 49 = 4 \cdot 15 = 60$

$\frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}$

$\frac{49}{4} = 12{,}25$

$15-7\sqrt{13}$

$\frac{105}{42} = 2\frac{21}{42}$ $\quad 36-4=32$ $\quad 4\sqrt{2}$



$-12 \quad -8-\sqrt{15} \quad -11 \quad -10{,}5 \quad -8+\sqrt{15}$

$3{,}5 < \sqrt{15} < 4$

$-5{,}5 < -8+\sqrt{15} < -4$

$\frac{8}{9} + \frac{1}{3} = 1$

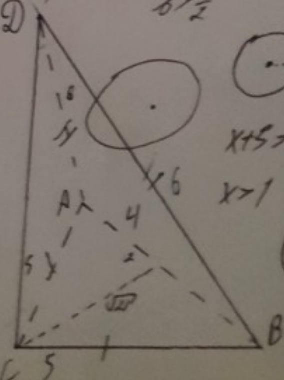
$8a - 16b \leq 0$

$b > \frac{a}{2}$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$R = \frac{9}{4}\sqrt{2}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{6}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2R$



$x+5 > 6$

$x > 1$

$\frac{5}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{25\sqrt{21}}{21} = 2R$

$R = \frac{25\sqrt{21}}{42}$ $\quad 2\sqrt{21}$

1

1

Чистовик

Математика, 21 вариант

Из т. Пифагора для $\triangle BB_1D$ имеем $BB_1 = \sqrt{BD^2 - DB_1^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$,

Для трапеции A_2B_2 на другом основании имеем аналогично

$CB_2 = 2\sqrt{2}$, $B_2B = \sqrt{CB^2 - CB_2^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$

CD - образующая, как и B_2B_1, тогда $CD = B_2B_1 = B_2B + BB_1 = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

Ответ: $\sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

№3

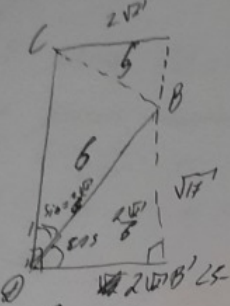
~~Второе ур-ие~~ первое говорит о ро взаимных точках центра круга, описанного первым уравнением, имеем, в зависимости от расположения его на прямой $y = 2x - 5$ для центра либо ~~окружность~~ круг центром $(0;0)$ радиусом ..., либо центром $(-2;4)$ того же радиуса, или переходит на пересечение, а нужно. Фигура М будет пересечением окружностей с теми же центрами ~~того же радиуса~~, но радиусом на 2 больше, тогда её площадь

$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{5} + 2)^2 = 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)^2 = 2\sqrt{3}(6 + 2\sqrt{5}) = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{15}$

Ответ: $12\sqrt{3} + 4\sqrt{15}$

Черновик

№2



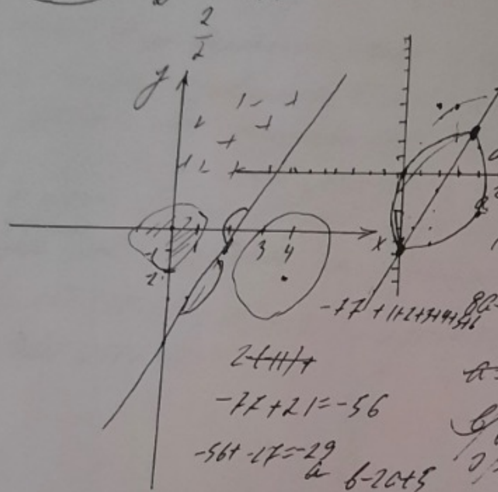
$\frac{30}{2\sqrt{21}} = \frac{15}{\sqrt{21}} = 1{,}5\sqrt{21}$

$6 < 5$

$-3 < -1$

$2\sqrt{21}\ B^2\ 25 - 8 = 17$

$2\sqrt{5}42$



$x^2 + y^2 =$

$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{5}42) =$

$= \sqrt{15} + \sqrt{31}$

$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$

$a^2 - 8a^2 + b^2 + 4b \le 0$

$(a - 4)^2 + (b + 2)^2 \le 20$

$-17 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

$8a - 4b < 20$

$2 + 1 + 1 + 1$

$-77 + 21 = -56$

$-56 + -17 = -29$

$a = \frac{b}{2}$

$6 - 20 + 5$

$0 > 2 - 5 - 1$

$-4 \cdot 5 = -20 > -29$

$-35 + 21 = -14$

$2 \cdot 11 = 22$

$\frac{|5|}{\sqrt{144}} = \sqrt{5}$

$-4127 = 23$

46

$\frac{|-2-8+5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$-5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1$

$-15 + 1 = -14$

$5 \cdot 8 = 40$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101111**

ID профиля: **260612**

Вариант 21

№4 Чистовик математика, вариант 21

Т.к. НОД$(a;b;c)=35=5\cdot7$, то есть числа в которые 5 входит не более чем в 1 степени и также с 7 (возможно тоже число 1) (в НОД идут простые множители из разложения каждого числа в наименьшей встречающейся степени), а также в каждом числе есть 5 и 7 хотя бы в 1 степени.

Т.к. НОК$(a;b;c)=5^{18}\cdot7^{16}$, то максимально встречается в разложении этих чисел на простые множители 5 в степени 18 и 7 в степени 16, других простых множителей в этих числах нет (в НОК идут простые множители из разложений этих чисел в наибольшей встречающейся степени)

Тогда ~~без ограничения общности~~ имеем ~~например~~ следующую тройку $a=5^{18}\cdot7$, $b=7^{16}\cdot5$, $c=5\cdot7$, заметим, что в любых двух множителях можно изменять в одном степень 5 от 1 до 18, а в другом степень 7 от 1 до 16, но нельзя изменять сразу в 3-им степень одного числа (НОД увеличится), тогда несчитая перестановки можем составить $\cancel{7}\cdot16\cdot18+18\cdot16+16\cdot18-2=3\cdot16\cdot18-2=3\cdot288-2=864-2=862$

Учитывая перестановки $6\cdot864-3-3-3-3=5172$

Ответ: 5172

№5

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-3>0 \\ \sqrt{2x-3}\neq1 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5\neq1 \\ x+1>0 \\ x+1\neq1 \end{cases} \iff x\in(1,5;2)\cup(2;+\infty)$

Мы можем иметь 3 пары равных чисел, рассмотрим их по порядку

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \overset{ОДЗ}{=} \frac{4}{\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)}$, тогда их произведение $4\log_{2x^2-3x+5}(x+1)=t^2$,

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=\frac{1}{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)}=\frac{4}{t^2}$, тогда из условия $\frac{4}{t^2}+1=t$,

$\cancel{\frac{4t^3-4t^2-1}{4t^2}=0}$ $\frac{4}{t^2}+1=t$, $\frac{t^3-t^2-4}{t^2}=0 \iff \frac{(t-2)(t^2+t+2)}{t^2}=0 \iff t=2$

$4\log_{2x^2-3x+5}(x+1)=4$, откуда $x+1=2x^2-3x+5$ на ОДЗ; $2x^2-4x+4=0$, $D=(-4)^2-4\cdot2\cdot4=-16<0$,

т.е. нет корней и такой случай невозможен

1

2) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$, откуда $t^2=\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\frac{4}{t^2}$,

тогда аналогично $t=2$ и $2x^2-3x+5=(\sqrt{2x-3})^2$ на ОДЗ, которое $x=4$ и $x=-0,5$

Чистовик

Из ОДЗ подходит $x=4$. $\sqrt{2\cdot4-3}=\sqrt{5}$, $4+1=5$, $2\cdot4^2-5\cdot4+5=25$,

$\log_{\sqrt{5}}5=2=\log_{5}25$, $\log_{25}25=1=2-1$ - верно

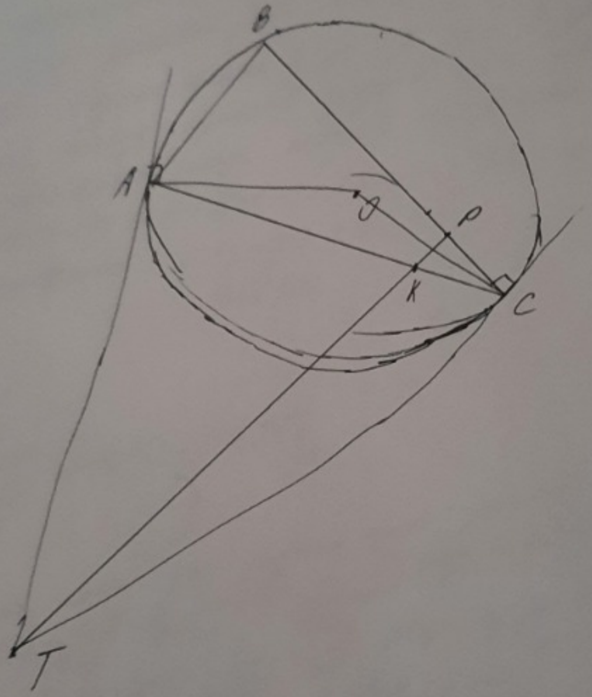
5) $\log_{2x^2-5x+5}(2x-3)^2=\log_{x+1}(2x^2-5x+5)$, откуда $b^2=4\log_{x+1}\sqrt{2x-3}$, $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\frac{4}{b^2}$, тогда аналогично

$b=2$ и $4\log_{x+1}\sqrt{2x-3}=4$, $\sqrt{2x-3}=x+1$, $2x-3=x^2+2x+1$, $x^2=-4$ - неверно

Окончательно имеем, что подходит только $x=4$

Ответ: 4

Черновик



Черновик

№ 4

$abc = 5^{18} \cdot 7^{18}$

$a \; bc$

$2\cdot 3 \quad 2^2 \cdot 3 \quad 3^2 \cdot 2$

$18 + 6 = 24$

$5^{18} \cdot 7^{16} \quad 5^{18} \cdot 7^{16} \cdot 35$

$18 \cdot 16 + 18 \cdot 16 + 3 \cdot 16 \cdot 18$

$\log_5 5 ; \log_{25} 5^2 ; \log_5 25$

$18nk - 12 - 12 = 18nk - 24$

$18 \cdot 2 \cdot 5 - 24 = 72 - 42 = 48$

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 3$

$5^9 \cdot 7^8$

$5^{18} \cdot (7 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 7$

$(7 \cdot 5^{18}) \cdot 7^{16} \cdot 7$

$\frac{1}{4t^2} + 1 = 6$

$\begin{cases} x > 1{,}5 \\ x \neq 2 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$

$5^{18} \cdot 7^{17} \cdot 36$

$a = 5^{18} \cdot 7$

$b = 7^{16} \cdot 5 \quad 17 \quad c$

$c = 35 \quad 15 \quad 17$

abc, bac, bca

123, 132, 213, 231, 312, 321

$5^{18} \cdot 7 \cdot (7^{16} \cdot 5) \cdot 5 \cdot 7$

$6 \cdot 16 \cdot 18$

$600 + 240 + 24 = 864$

$16 \cdot 18 + 18 \cdot 16 + 16 \cdot 18 = 3 \cdot 16 \cdot 18 = 3 \cdot (160 + 128) = 3 \cdot 288$

$= 2900 + 240 + 24 = 1164 \cdot 6$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2 - 3x + 5) = 4$

$864 \cdot 6 = 4800 + 360 + 24 =$

$= 6600 + 64 \cdot 6 =$

$= 6600 + 384 =$

$= 3984$

$t^2 = \frac{4}{t^2} + 1$

$\frac{4}{t^2} + 1 = 6 \Leftrightarrow \frac{t^3 - t^2 - 4}{t^2} = 0$

$t = 2$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 0 \\ \sqrt{2x-3} \neq 1 \\ 2x^2 - 3x + 5 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 5 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$

$2x^2 - 3x + 4 \neq 0$

$8 - 4 \cdot 4$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

$(t-2)(t^2 + t + 2)$

$1 - 8 = -7 < 0$

$2 \cdot 16 - 3 \cdot 4 + 5 =$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2 - 3x + 5) = 4$

$32 - 17 = 15$

$2x^2 - 3x + 5 = 4x^2 - 12x + 9$

$2x^2 - 9x + 4 = 0$

$D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 49$

$\frac{9 \pm 7}{4} = 4; \; 0{,}5$

$\frac{3}{4}$

$2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} + 5 =$

$= \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 5 = 5 - \frac{9}{8} = 3\frac{7}{8}$

1