Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101097**

ID профиля: **289276**

Вариант 21

Чистовик Математика 11 класс.

Часть 1. Вариант 21.

№1.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_1 + a_1 + b + a_1 + 2b +$
$+ a_1 + 3b + a_1 + 4b + a_1 + 5b + a_1 + 6b = 7a_1 + 21b.$

По условию $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $a_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 - a_1 = b \in \mathbb{Z}$
и так как прогрессия возрастающая $\Rightarrow b > 0$

Также $\begin{cases} a_8 a_{17} > S + 27 \\ a_{11} a_{14} < S + 60. \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1 + 7b)(a_1 + 16b) > 7a_1 + 21b + 27 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 13b) < 7a_1 + 21b + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 b + 112b^2 > 7a_1 + 21b + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 b + 130b^2 < 7a_1 + 21b + 60. \end{cases}$ $\Rightarrow 18b^2 < 33$, при это $b \in \mathbb{Z}$ и $b > 0$

$b = 1$ – уд.
$b = -1$ – не уд;
$b = 0$ – не уд.

Подставим $b = 1$ в систему

$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1 + 8)^2 > 0 \\ (a_1 + 8)^2 < 15. \end{cases}$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$ решениями данной системы будет $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$, -8 исключаем, т.к. $(a_1 + 8) > 0$.

Ответ: $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$.

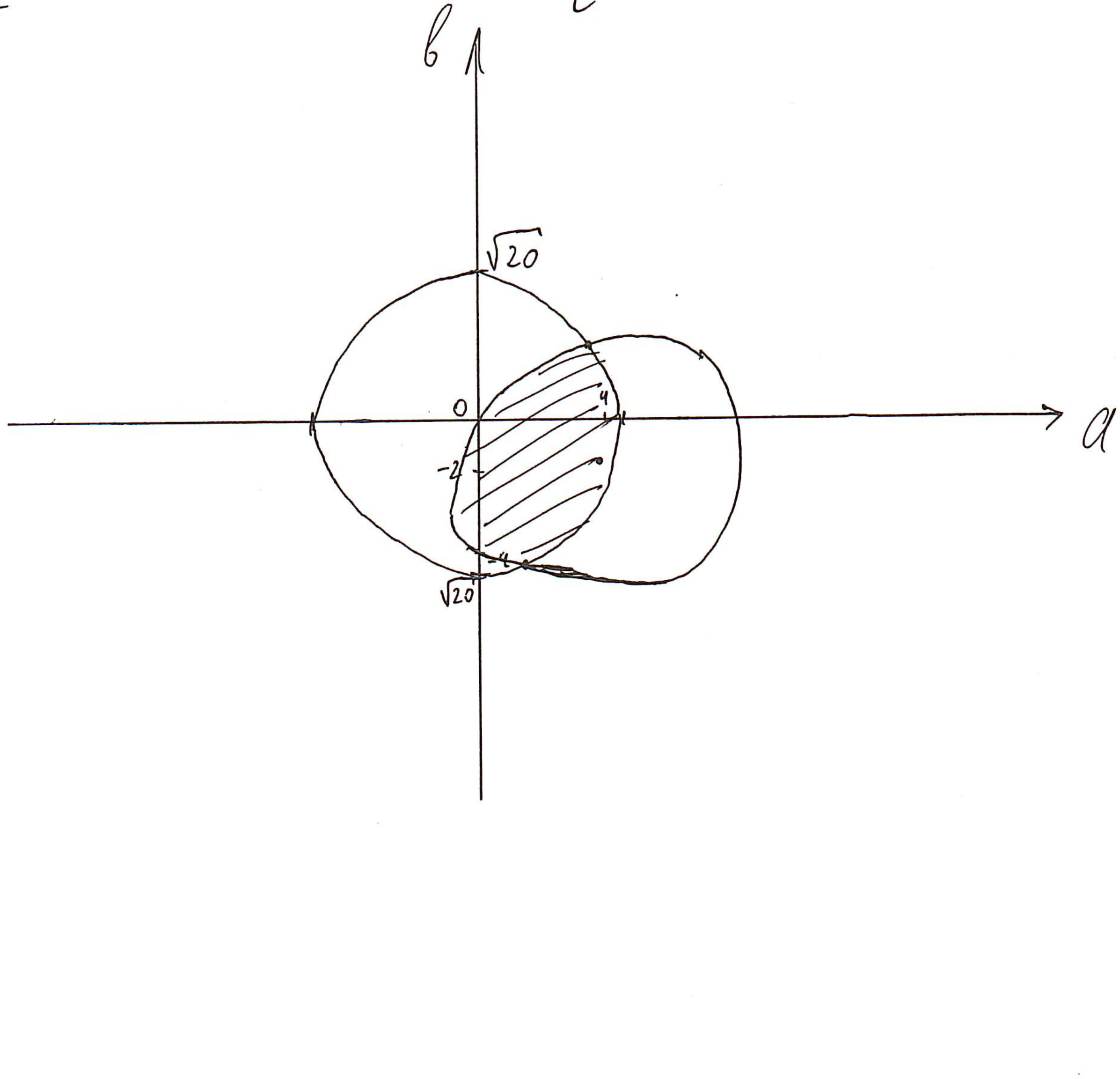
Чистовик Математика 11 класс.

Часть 1 Вариант 21.

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq \min(8a-4b; 20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq 8a-4b \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20. \end{cases}$$



Черновик. Математика. 11 кл

№1.

$a_1; b \in \mathbb{Z}$

$b > 0$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = S.$

$a_1 + a_1 + b + a_1 + 2b + a_1 + 3b + a_1 + 4b + a_1 + 5b + a_1 + 6b = 7a_1 + 21$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$S = \frac{(a_1 + a_7)\cdot 7}{2} =$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$= \frac{(a_1 + a_1 + 6b)7}{2} = 7a_1$

$$\begin{cases} (a_1 + 7b)(a_1 + 16b) > 7a_1 + 21b + 27 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 13b) < 7a_1 + 21b + 60. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 b + 112b^2 > 7a_1 + 21b + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 b + 130b^2 < 7a_1 + 21b + 60. \end{cases}$$

$18b^2 < 33$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$, т.к. $b > 0$.

$b^2 = 0.$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27. \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1 + 8)^2 > 0 \\ (a_1 + 8)^2 < 15 \end{cases}$$

$a_1 \neq -8.$

$a_1 = -5 \qquad a_1 = -7 \qquad a_1 = -10$

$a_1 = -6 \qquad a_1 = -9 \qquad a_1 = -11.$

Ответ: $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}.$

Черновик Математика 11 клас

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases}$$

$\min(8a-4b;20)$.

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b.\end{cases}\qquad \begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}\qquad \sqrt{20}$$

x y

$(a-4)^2-a^2+(b+2)^2-b^2\le 0.$

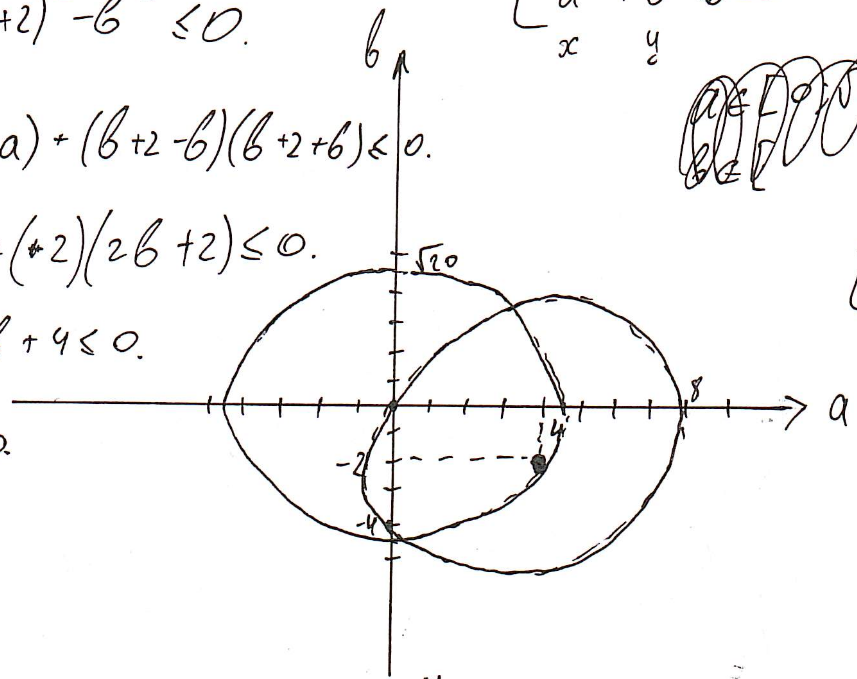
$(a-4-a)(a-4+a)+(b+2-b)(b+2+b)\le 0.$

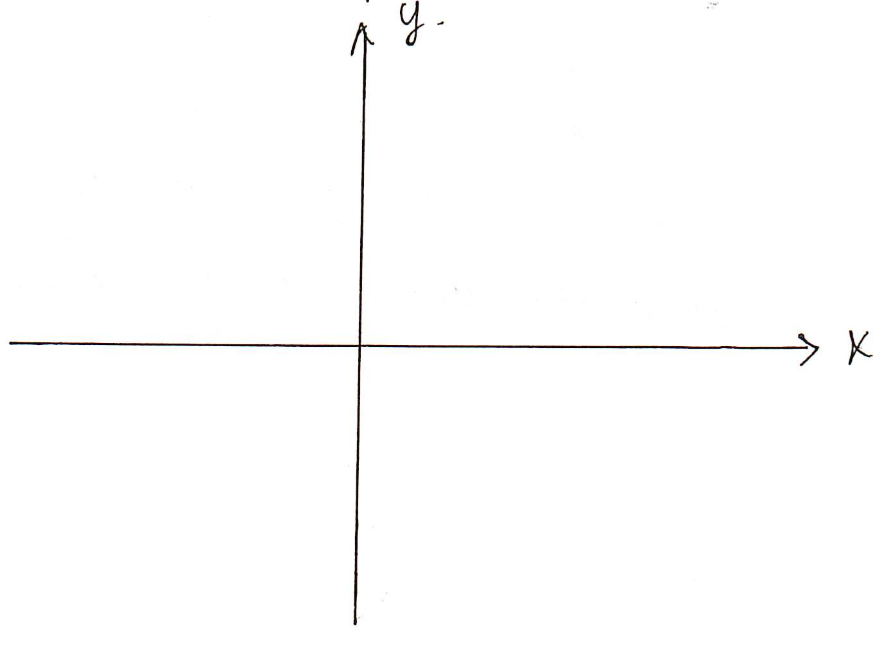
$-4(2a-4)+(2)(2b+2)\le 0.$

$-8a+16+4b+4\le 0.$

$8a+4b\ge 20.$

$a=4$
$b=2.$



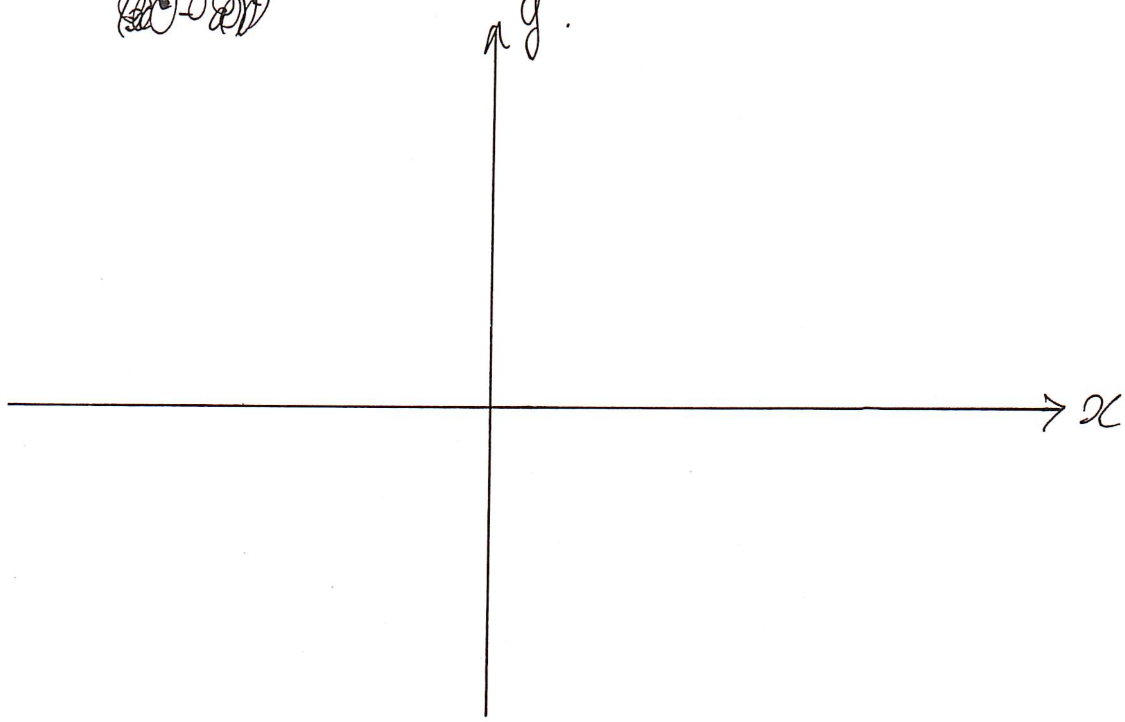


Черновик.

№3.

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \end{cases}$$



№2.

$a^2+b^2-20 \le 0$

$a^2+b^2-8a+4b \le 0.$

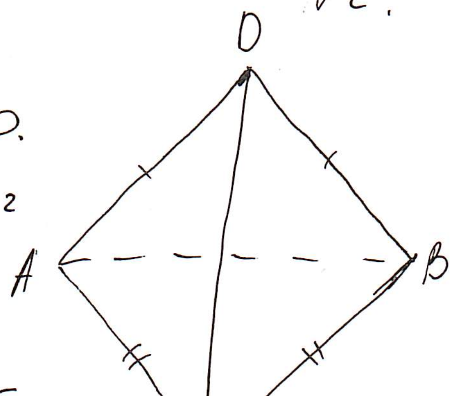
$a^2 \le 20-b^2$

$a^2-8a+b^2+4b \le 0.$

$D=64-4(b^2+4b)=$

$=64-4b^2-16b$

$$a=\frac{8 \pm \sqrt{64-4b^2-16b}}{2}.$$



$AB=4$

$AC=CB=5$

$AD=DB=6.$

$$\begin{cases} x+y<20 \\ x+y-3<20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y<20 \\ x+y<23 \end{cases}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101097**

ID профиля: **289276**

Вариант 21

Чистовик Математика 11 класс

Часть 2. Вариант 21.

№ 6.

Дано:

$S_{\triangle APK} = 12$

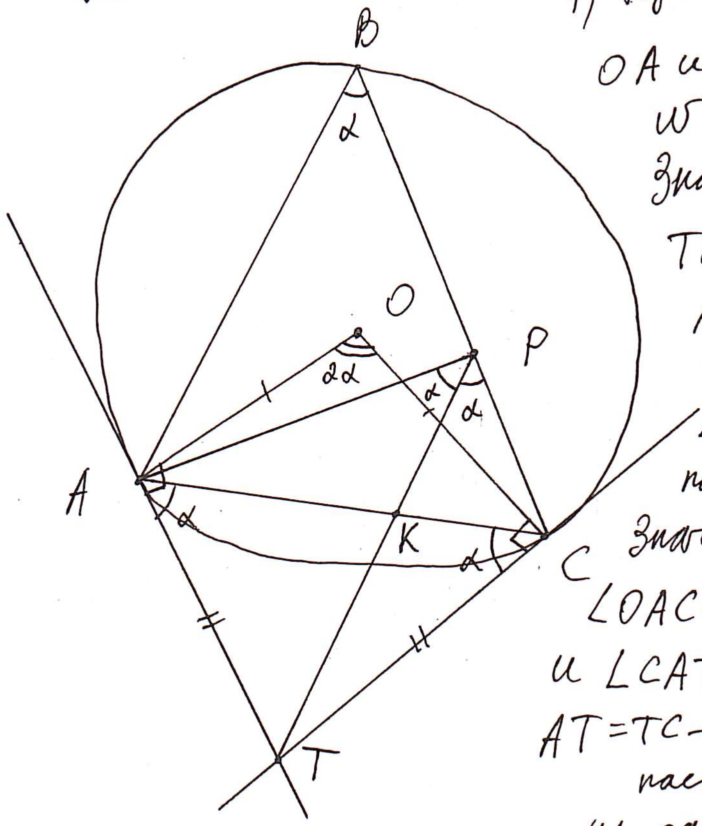
$S_{\triangle CPK} = 9$.

Найти:

1) S_{ABC} – ?

2) AC, если $\angle ABC = arctg\frac{3}{7}$.

Решение:



1) Пусть $\angle ABC = \alpha$.

OA и OC – радиу

ω.

Значит $AT\perp$

$TC \perp OC$, т.

AT и TC – кас

тельные.

$\angle AOC = 2\alpha$ –

как централ

Значит

$\angle OAC = \angle OCA = 90$

и $\angle CAT = \angle ACT = \alpha$

$AT = TC$ – отрезки касательных.

из одной точ

$A; O; C; P$ – лежат на одной окр-

по условию и т.к. $\angle TCO + \angle TAO = 180° \Rightarrow TAOC$ –

описан этой окружностью и T тоже лежит

на этой окружности.

Тогда: $\angle TPC = \angle CAT = \alpha$ и $\angle TPA = \angle ACT = \alpha$ –

как углы опирающиеся на одну дугу.

Заметим, что $KP \parallel AB$, т.к. $\angle ABC = \angle KPC$ –

а это соответственные углы при $KP \parallel AB$.

Значит $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам.

$\angle C$ – общий; $\angle ABC = \angle KPC$ – по ранее доказанному

$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} h \cdot AK = 12$, где h – общая высота.

$S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} h \cdot KC = 9$.

Чистовик. Математика 11 класс.

Часть 2 Вариант 21

№ 6 продолжение.

Значит $\frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$; пусть $AK = 4K$, $KC = 3K$ $\Rightarrow AC = 7K$

Коэффициент подобия $\triangle ABC$ и $\triangle KPC = \frac{KC}{AC} = \frac{3}{7}$ $\Rightarrow \frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$, а т.к. $S_{\triangle CPK} = 9$ — по условию $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 49$.

2). $tg\alpha = \frac{3}{7}$ — по условию $\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{7} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}} \Rightarrow$ т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$S_{\triangle APC} = S_{\triangle CPK} + S_{\triangle APK} = 9 + 12 = 21.$

$S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} PC \cdot PK \cdot \sin\alpha$
$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha$ $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow AP = \frac{4}{3}PC$

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot AP \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot \frac{4}{3} PC \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$
$= \frac{4}{3} PC^2 \cdot \frac{3 \cdot 7}{58} = PC^2 \cdot \frac{14}{29} = 21. \Rightarrow PC^2 = \frac{21 \cdot 29}{14} = \frac{3 \cdot 29}{2}.$

по теореме косинусов $\triangle APC$:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha = \frac{16}{9} PC^2 + PC^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} PC^2 \cdot (2\cos^2\alpha - 1) = \frac{16}{9} \cdot \frac{3 \cdot 29}{2} + \frac{3 \cdot 29}{2} - \frac{8}{3} \cdot \frac{3 \cdot 29}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{49}{58} - 1\right) =$

$= \frac{8 \cdot 29}{3} + \frac{3 \cdot 29}{2} - 4 \cdot 29 \cdot \frac{20}{29} = \frac{25 \cdot 29}{6} - 80 = \frac{725 - 480}{6}$
$= \frac{245}{6} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$

Ответ: $S_{ABC} = 49$; $AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$

2

Чистовик Математика 11 класс.

Часть 2 Вариант 21.

№ 4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35=5\cdot 7 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

Пусть $a=5^{k_1}\cdot 7^{n_1}$

$b=5^{k_2}\cdot 7^{n_2}$

$c=5^{k_3}\cdot 7^{n_3}$

Значит $\min(k_1;k_2;k_3)=1$

$\max(k_1;k_2;k_3)=18.$

$\min(n_1;n_2;n_3)=1$

$\max(n_1;n_2;n_3)=16.$

Значит хотябы один из $k_1;k_2;k_3$ равен 1 и хотябы один равен 18.

И хотябы один из $n_1;n_2;n_3$ равен 1 и хотябы один равен 16.

k_1	k_2	k_3
1	18	1–18
1	1–17	18
18	1	2–17
18	1–17	1
2–18	1	18
2–18	18	1

Всего $18+17+16+17+17+17=17\cdot 6=102$ выбора к

3

Чистовик Математика 11 класс

Часть 2 Вариант 21

№4 (продолжение).

Выбрать n можно $15 \cdot 6 = 90$ способами и аналогично k.

И тогда всего способов $102 \cdot 90 = 9180$ троек $(a; b; c)$ удовлетворяет данной системе.

Ответ: 9180 троек.

Чистовик Математика 11 класс.

Часть 2 Вариант 21.

№5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$; $\log_{2k^2-3k+5}(2k-3)^2$; $\log_{(k+1)}(2k^2-3k+5)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 0 \\ \sqrt{2x-3} \neq 1 \\ x+1 > 0 \\ 2x^2-3k+5 > 0 \\ 2k^2-3k+5 \neq 1 \\ (2k-3)^2 > 0 \\ (k+1) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (1{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$$

Пусть $2k-3=a$; $2k^2-3k+5=b$; $k+1=c$.

$2\log_a c$; $2\log_b a$; $\log_c b$

Заметим, что $2\log_a c \cdot 2\log_b a \cdot \log_c b = 4$

Черновик.

№6.

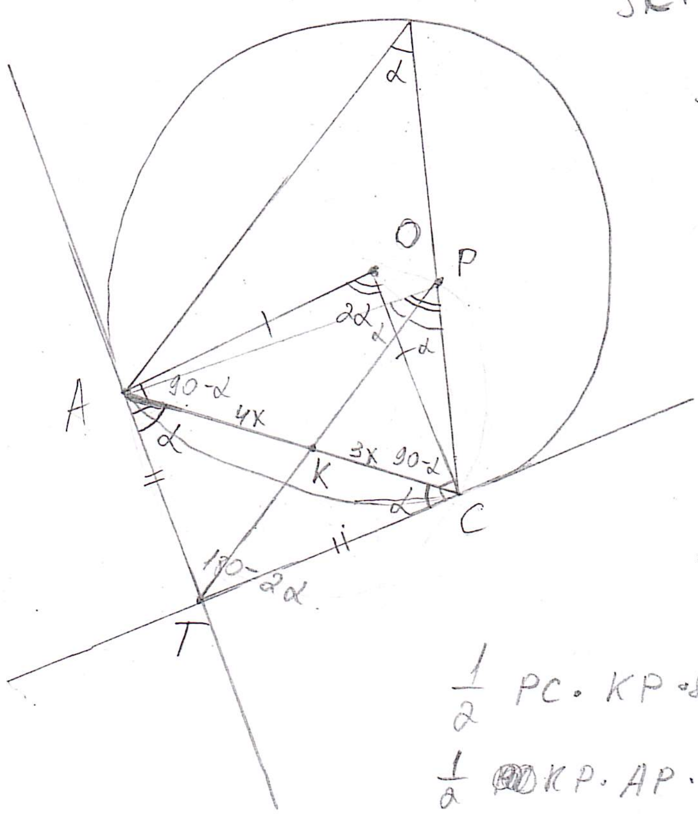
$S_{APK}=12$

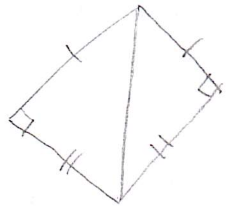
$S_{CPK}=9$

$S_{ABC}-?$

A; O; C; P – на одной окр-ти.

T на этой же окр-ти





$\frac{1}{2}PC\cdot KP\cdot\sin\alpha=9$

$\frac{1}{2}KP\cdot AP\cdot\sin\alpha=12.$

$\frac{AP}{PC}=\frac{4}{3}$ $\quad\frac{AK}{KC}=\frac{4}{3}.$

$\frac{S_{CPK}}{S_{ABC}}=\frac{9}{49}\Rightarrow S_{ABC}=49.$

$tg\,\alpha=\frac{3}{7}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ $\quad\frac{9}{49}=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$

$9-9\sin^2\alpha=49\sin$

$9=58\sin^2\alpha.$

$\sin\alpha=\sqrt{\frac{9}{58}}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{58}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{3}{\sqrt{58}}\cdot\frac{7}{\sqrt{58}}=\frac{21}{58}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\alpha.$

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha.$

$S_{APC}=21=\frac{1}{2}PC\cdot AP\cdot\sin 2\alpha.$

$\frac{AP}{PC}=\frac{4}{3}\Rightarrow AP=\frac{4}{3}PC.$

$42=PC\cdot\frac{4}{3}PC\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=$

$=PC^2\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{21}{58}=\frac{7\cdot 4}{29}PC^2$

Теор косинусов для $\triangle APC$.

$\frac{2\cdot 49}{58}-1=$

$=\frac{49}{29}-1=\frac{20}{29}.$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\quad 2$

$\frac{8\cdot 29\cdot 2+9\cdot 29}{}$

$=29(16+9)$ $6.$

$\frac{25\cdot 29}{6}$ $\quad\frac{25}{9}\cdot\frac{3\cdot 2}{2}$

$\times\frac{25}{29}$

$25\cdot 4=100.$

$725.\quad 480.$

$\frac{725-680}{6}$

$\begin{array}{r}725\\-480\\\hline 245\end{array}$ $\quad\frac{245}{6}.$

Черновик.

№4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b, c) = 35 = 5 \cdot 7. \\ \text{НОК}(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

наименьш. общее кратное.

НОД $(12, 36)$

$12 = 2^2 \cdot 3.$ НОД$(12, 36) = 2^2 \cdot 3. =$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ НОК$(12, 36) = 2^2 \cdot 3^2.$

$a = 35$

$b = 7^{16} \cdot 5$

$c = 5^{18} \cdot 7$

№5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$; $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$; $\log_{x+1}(2x^2-3x+$

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 0 \\ x+1>0 \\ \sqrt{2x-3} \neq 1. \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \\ (2x-3)^2>0. \\ x+1 \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1{,}5 \\ x > -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

или

$x \in (1{,}5; 2) \cup (2; +\infty).$

$2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} + 5 =$

$= \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 5 =$

$2\log_{2x-3}(x+1)$; $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$; $\log_{x+1}(2x^2-3$

$2x-3=a$; $x+1=b$

$(2x-3)(x+1) = 2x^2-x-3.$ $+8-2x.$

$x+1-2x+3 = 4-x.$

$2x^2-3x+5 = (2x-1)($

$8-2x = 2(x+1)-2(2x-3) = 2x+2-4x+$

$= 8-2x$

$2\log_a b$; $2\log_{ab+2b-2a} a$; $\log_b ab+2b-2a.$

$2\log_a b^2 = \log_{ab+2b-2a} a^2.$

Черновик.

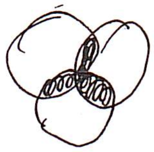
$НОД(a,b,c) = 35 = 5 \cdot 7$

$НОК(a,b,c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$.

$a = 35 \cdot 7 = 5 \cdot 7^2$

$b = 35 \cdot 5 = 5^2 \cdot 7$

$c = 35$.



$a \cdot b \cdot c =$

$НОК + НОД = a + b + c$.

$a = 5^{k_1} \cdot 7^{n_1}$

$b = 5^{k_2} \cdot 7^{n_2}$

$c = 5^{k_3} \cdot 7^{n_3}$

$НОД(5^{k_1} \cdot 7^{n_1}; 5^{k_2} \cdot 7^{n_2}; 5^{k_3} \cdot 7^{n_3}) = 35 =$

$\min(k_1; k_2; k_3) = 1$

$\min(n_1; n_2; n_3) = 1$.

$НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$\max(k_1; k_2; k_3) = 18$

$\max(n_1; n_2; n_3) = 16$.

$1 \leq k_1; k_2; k_3 \leq 18$ 1 18

$1 \leq n_1; n_2; n_3 \leq 16$.

$k_1 = 1$. ; $k_2 = 18$ — 18.

$k_2 = 1$; $k_1 = 18$ — 18.

$k_3 = 1$; $k_1 = 18$ — 18.

$k_1 = 1$; $k_3 = 18$ — 18

$k_2 = 1$; $k_3 = 18$ — 18

$k_3 = 1$; $k_2 = 18$ — 18

18 · 6.

1 ; 18 ; 1–18

1 ; 1–17 ; 18

18 ; 1 ; 2–17 18

18 ; 1–17 ; 1. 18

2–18 ; 1 ; 18 17

2–18 ; 18 ; 1. 17

1 18 18.

1

1 18 1–18

1 ; 18

$$\begin{array}{r} 102 \\ +\ 90 \\ \hline 0180 \end{array}$$