Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101006**

ID профиля: **266654**

Вариант 21

Лист 1 Математика Чистовик

№1

Пусть разность d $\quad d>0$ и $d \in \mathbb{Z}$

$$S = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+6d) = 7a_1 + 21d$$

$a_{11} = a_1+10d \quad a_{14} = a_1+13d \quad a_8 = a_1+7d \quad a_{17} = a_1+16d$ Из условия:

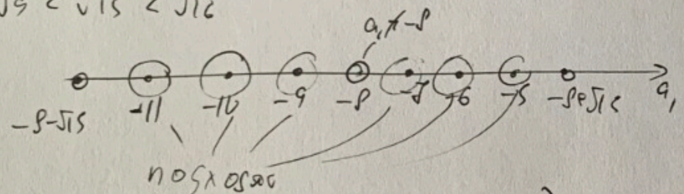
$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27\\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a_1^2-23da_1-130d^2+7a_1+21d+60>0\\ a_1^2+23da_1+112d^2-7a_1-21d-27>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow -18d^2+33>0 \Rightarrow d^2 < \frac{33}{18} \Rightarrow d=1$$

$$\begin{cases}(a_1+7)(a_1+16) > 7a_1+21+27\\ (a_1+10)(a_1+13) < 7a_1+21+60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a_1+8)^2>0\\ (a_1^2+16a_1+49)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in \left(\frac{-16-2\sqrt{15}}{2}; \frac{-16+2\sqrt{15}}{2}\right)\end{cases}$$

это $(-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15})$

$\sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}$



Ответ: $\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$ — возможные значения a_1

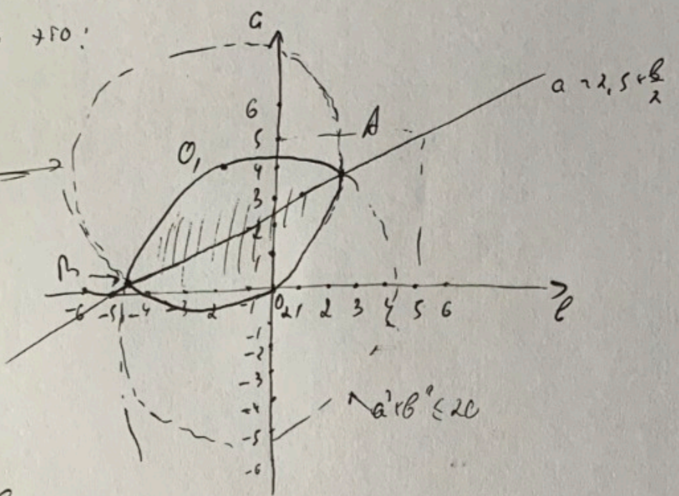
№3 Лист 2 Математика Чистовик

При $8a-4b>20$ то есть $a>2,5+\frac{b}{2}$ $a^2+b^2\le 20$, при $a<2,5+\frac{b}{2}$ $a^2+b^2\le 8a-4b$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

~~Построив в осях~~ коорд a, b

Построим это:

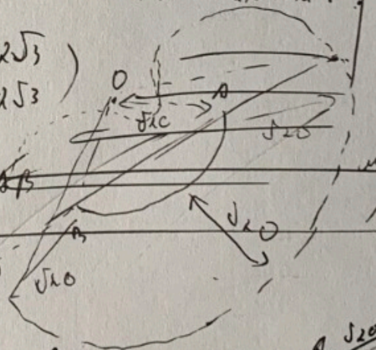


Тогда первое неравенство имеет вид $(a-x)^2+(b-y)^2\le 20$ => мы имеем окружности, с радиусом $\sqrt{20}$, которые будут иметь хотя бы одну точку с выделенной областью. и тогда координаты центров $(x;y)$ – задают множество M. => на $\sqrt{20}$ удалённые от крайних точек выделенной области будут крайние точки M

понятно, что все внутренние тогда будут удовлетворять неравенству

Заметим, что окружность и прямая пересекаются в одних точках A и B.

$\left(\begin{array}{l} a^2+b^2=20 \text{ и } a=2,5+\frac{b}{2} \Rightarrow b=-1\pm 2\sqrt{3} \\ (a-4)^2+(b+2)^2=20 \text{ и } a=2,5+\frac{b}{2} \Rightarrow b=-1\pm 2\sqrt{3} \end{array} \right)$

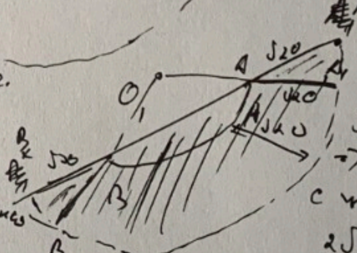


~~Понятно, что для дуги окружности AB, множество точек входящих в M, справа от прямой $a>2,5+\frac{b}{2}$~~

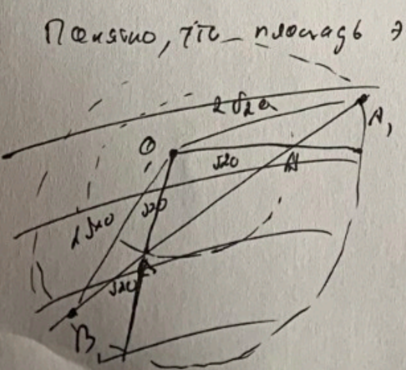
это ~~сектор~~ сектор круга с радиусом $2\sqrt{20}$

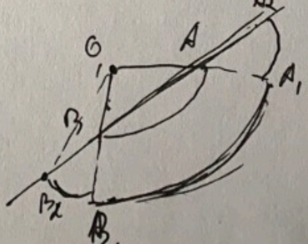
Рассмотрим дугу AB для окр O_1 и все точки снизу от прямой $a=2,5+\frac{b}{2}$

Понятно, что площадь этой части M – заштрихованная площадь



Заметим, что максимально удалённые точки от дуги AB на $\sqrt{20}$ => A_1B_1 – тоже дуга окр с центром O_1 и радиусом $2\sqrt{20}$





A_1A_2A и B_1B_2B – два сектора с радиусом $\sqrt{20}$

AA_1B_1B – часть сектора окр с центром O_1 и радиусом $2\sqrt{20}$

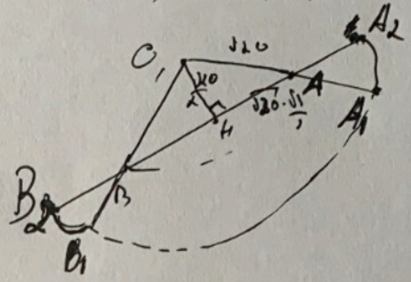
№3 продолжение   Лист 3   Математика   Чистовик

Посчитаем угол BO_1A, для этого найдём угол O_1AB

$O_1(-2;4)$; $A(-1+2\sqrt3; 2+\sqrt3)$ ~~$\Rightarrow \vec{OA} = (1+\sqrt3; -2+\sqrt3)$~~, вектор BA =

$B(-1-2\sqrt3; 2-\sqrt3) \Rightarrow BA = \sqrt{(-1+2\sqrt3-(-1-2\sqrt3))^2+(2+\sqrt3-(2-\sqrt3))^2} = \sqrt{20\cdot3}$

$\Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{60}}{2}$



$\Rightarrow \cos AO_1B$ из теор. косинусов
$\cos AO_1B = \cos\alpha$

$AB^2 = 2AO_1^2 - 2\cos\alpha AO_1^2$

$3\cdot20 = 2\cdot20(1-\cos\alpha)$

$\frac12 = -\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac12 \Rightarrow \alpha = 120° = \angle AO_1B$.

$\Rightarrow \angle AO_1H = 60° \Rightarrow O_1H = \frac{AO_1}{2}$

$\Rightarrow \angle O_1BH = 30° \Rightarrow$ ~~BB~~ $= \angle A_1A$

$\Rightarrow \angle A_2AA = \angle B_2BB_1 = 30° = \alpha_2$

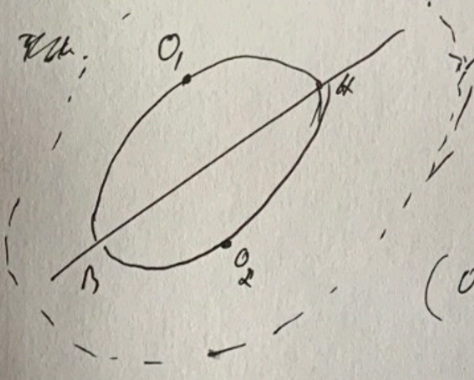
$S_{\triangle O_1AB} = \frac{O_1H\cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{60}}{2}\cdot\frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{20\cdot\sqrt3}{4} = 5\sqrt3$

$\Rightarrow S_{O_1A_1B_1} = \frac{\alpha(\sqrt{20})^2}{360} = \frac{120°\cdot20}{360°} = \frac{20}{3}$

$S_{AA_1BB_1} = \frac{20}{3} - 5\sqrt3$

$S_{BB_1B_2} = S_{A_1AA_2} = \frac{(\sqrt{20})^2\cdot\alpha_2}{360} = \frac{30\cdot20}{\frac{360}{12}} = \frac{5}{3}$

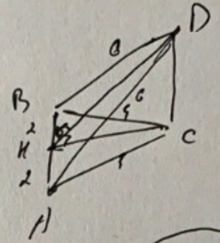
$\Rightarrow S_{A_2A_1B_1B_2} = \frac{5}{3} + \frac{20}{3} - 5\sqrt3 = \frac{25}{3} - 5\sqrt3 =$



Понятно, что все крайние точки над прямой $a = 2{,}5 + \frac{b}{2}$ из множества M будут удалены от дуги AB окружности с центром O_2 на $\sqrt{20}$ (аналогично ~~этому пункту~~ предыдущему)

А в силу симметрии ~~~~ рисунка относительно AB (O_1 переходит в O_2 и т.д.) общая площадь M равна $2\cdot S_{A_2A_1B_1B_2}$

Ответ: $\frac{170}{3} - 10\sqrt3$

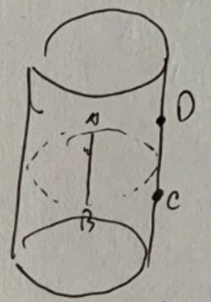


Заметим, что $CD \perp AB$

$(DH \perp AB, CH \perp AB)$

и

Расположим в цилиндре CD

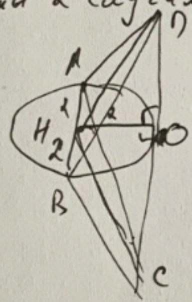


Понятно, что радиус цилиндра минимальный, если AD – диаметр основания

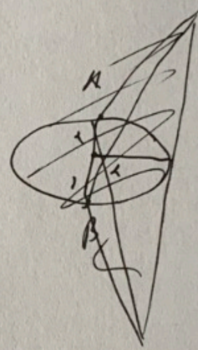
(иначе AB – хорда в каком-то сечении $\Rightarrow R > \frac{AB}{2}$)

Возможны 2 случая

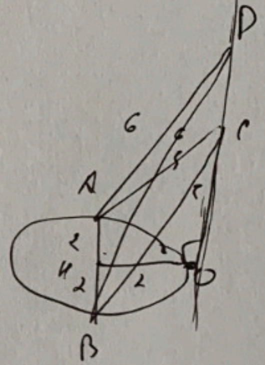
1.



и



2.



Понятно, что $HO = 2$, т.к. радиус

$HO \perp CD$, т.к. CD подсм. паралл. оси)

а $AB \perp CD$

$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle ODH \Rightarrow AD = OD = 6$

Аналогично $BC = OC = 5 \Rightarrow DC = 6 + 5 = 11$

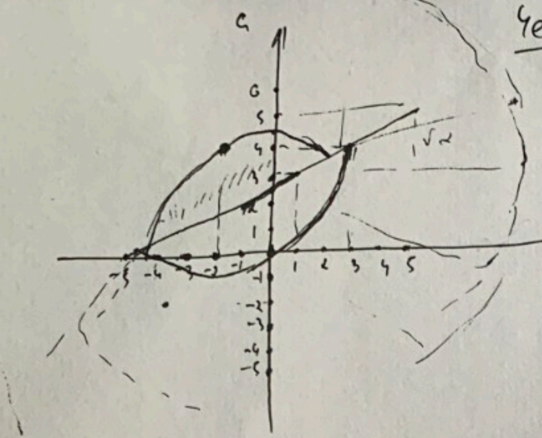
Аналогично

$OC = 5$ и $OD = 6$

но $DC = OD - OC = 1$

Ответ: 11 или 1

Черновик



При $a > 2,5 + \frac{b}{2}$ $(8a - 4b > 20)$

$a^2 + b^2 \le 20$

$16+4$

При $a < 2,5 + \frac{b}{2}$

$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \le 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$

$(a - x)^2 + (b - y)^2 \le 20$

$a^2 + b^2 = 20$ и $a = 2,5 + \frac{b}{2}$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 = 20$ и $a = 2,5 + \frac{b}{2}$ пересеч

$\left(\frac{5}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + b^2 = 20$

$\frac{b^2}{4} + \frac{5b}{2} + \frac{25}{4} + b^2 = \frac{80}{4}$

$\frac{5}{4}b^2 + \frac{5}{2}b + \frac{-55}{4} = 0$

$b^2 + 2b - 11 = 0$

$D = 4 + 44 = 48$

$16 \cdot 3$

$4\sqrt{3}$

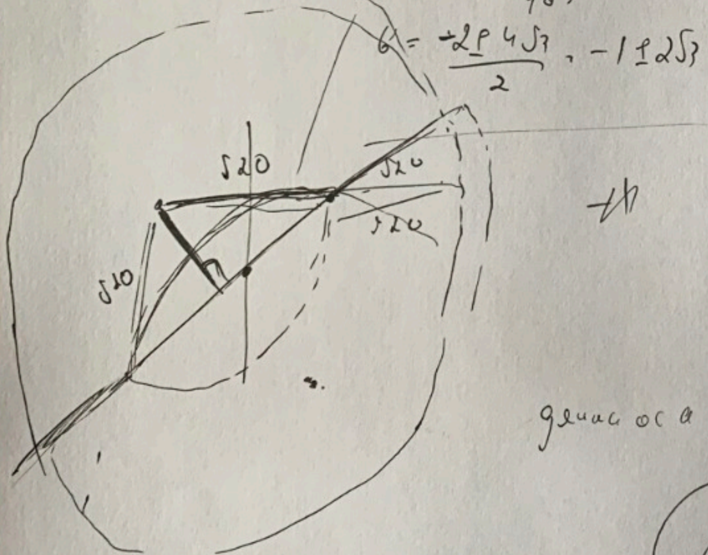
$b = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 = 20$

$\left(\frac{b}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (b+2)^2 = 20$

$\frac{b^2}{4} - \frac{3b}{2} + \frac{9}{4} + b^2 + 4b + 4 = \frac{16 \cdot 4}{4} = \frac{64}{4}$

$\frac{5b^2}{2} + \frac{5b}{2} - \frac{35}{4} = 0$



$\frac{-1+2\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3} \approx 1,7$

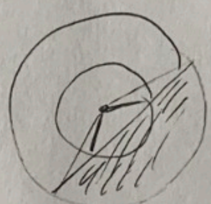
$2\sqrt{3} \approx 3,4$

$-1 + 2\sqrt{3} - (-1 - 2\sqrt{3})$

$(4\sqrt{3})^2$

$16 \cdot 3$

длина от a до b



$2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})$

$2\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}$

~~Площадь~~ $S_{кр}$

$\frac{2\pi \cdot R^2}{3}$

$\frac{R^2 \cdot \alpha}{360}$

Черновик

S сумма первых 7 членов возраст. арифмет. прогресси.

$a_1 a_2 \ldots \in \mathbb{Z}$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$S = \left(\frac{a_1 + d(n-1)}{2}\right) \cdot n$

$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d)$

$7a_1 + 21d$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 - 7a_1 - 21d - 27 > 0$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 - 7a_1 - 21d - 60 < 0$

$-a_1^2 - 23da_1 - 130d^2 + 7a_1 + 21d + 60 > 0$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 - 7a_1 - 21d - 27 > 0$

$a_1 \quad D = (23d - 7)^2 -$

$-18d^2 + 33 > 0$

$\frac{33}{18} > d^2$

$\frac{33}{18} > d^2$ возраст.

члены числа и d целое

$\boxed{d = 1}$

$(a_1 + 7)(a_1 + 16) > 7a_1 + 21 + 27$

$(a_1 + 10) \cdot (a_1 + 13) < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$\boxed{a_1 \neq -8}$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$D = 16^2 - 4 \cdot 49 = 4 \cdot (64 - 49) = 4 \cdot 15$

$16 \times 16 = 256$

$a_1 = \frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}$ почти 4, но чуть меньше

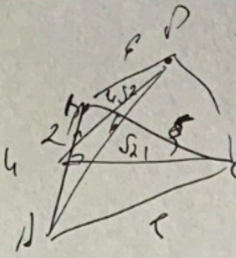
$-12 \quad -8-\sqrt{15} \quad -11 \quad -10 \quad -9 \quad \cancel{-8} \quad -7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -8+\sqrt{15}$

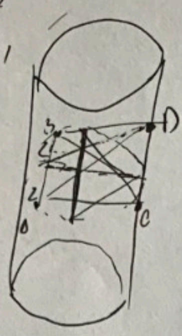
21101006 (U266654 M1303912)

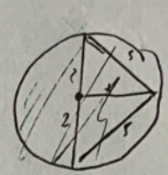
Черновик

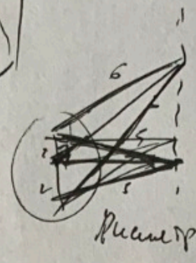
$\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ $\quad_{16\cdot 2}$

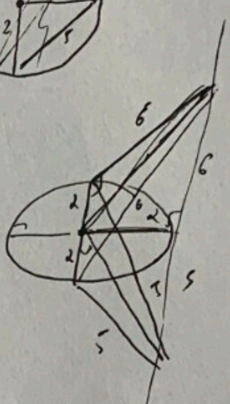
$\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$



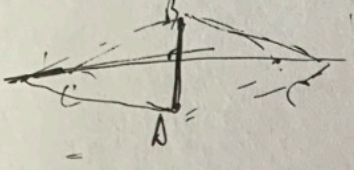


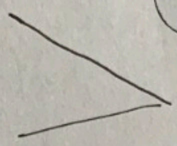






11

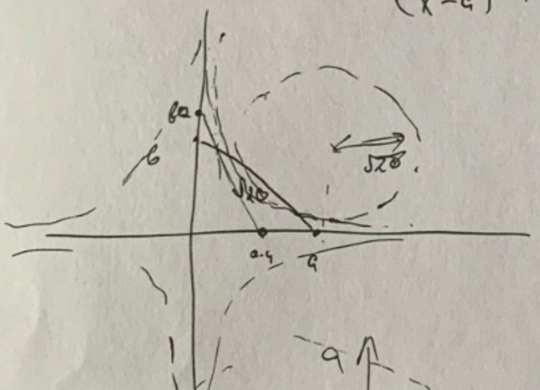




M - фиг. на дек. плоскост состоящ из $(x;y)$ таких, что сущ пара веществ. чисел a, b, при к выполн. система неравенств

Найти S_M

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$$

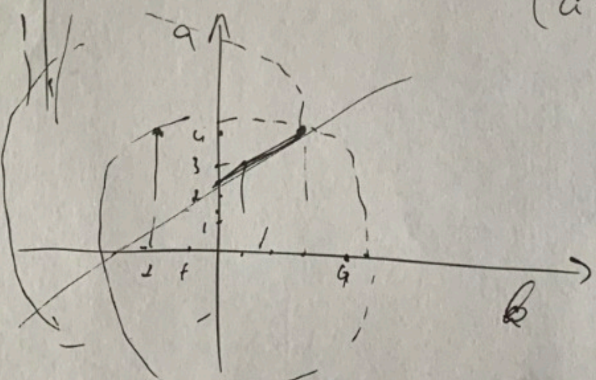


$a^2+b^2 \le \min/20$

$a^2+b^2-8a+4b \le 0$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 0$ $\quad 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$



$8c-4c \ge 20$

$2c > 5+6$

$c > 2,(+\frac{b}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101006**

ID профиля: **266654**

Вариант 21

Лист 1 Задача 4 Математика Чистовик

числа a, b, c состоят из 5^{α} и 7^{β} $a = 5^{a_1} \cdot 7^{b_1}$

$b = 5^{a_2} \cdot 7^{b_2}$

Причём $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in N$ $c = 5^{a_3} \cdot 7^{b_3}$

(если бы одно из них 0, то нод не $7 \cdot 5$), но хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, a_3 = 1$

и из b_1, b_2, b_3 одно тоже 1

3 способами выбираем какое из чисел a_1, a_2, a_3 равно 1, 2 способами выбираем „второе" число

16 способами выбираем какую степень имеет второе число (a_1, a_2, a_3) и 1 способом какую степень имеет последнее. ~~(выбираем ещё степень~~ (степень $\neq 1$)

и делим пополам, т.к. посчитали дважды все варианты

$\cdot 3$ – 3 способа выбрать одно из b и приравнять 1

$\cdot 2$ – выбираем второе b

$\cdot 14$ – выбираем ему степень (не 1); $\cdot 1$ – выбираем степень последнему

$: 2$ – т.к. дважды посчитали варианты

$3 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14$ + варианты, где два из $a = 1$ или 2 из b равны 1

$9 \cdot 16 \cdot 14 + 3 \cdot 3 \cdot 14 + 3 \cdot 3 \cdot 16 + 3 \cdot 3$ — выбрать $b \neq 1$

три способа выбрать $a \neq 1$, выбрать b, выбрать a, выбрать $a \neq 1$

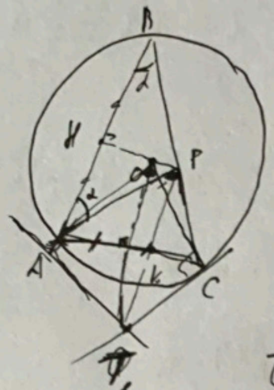
три способа выбрать $b \neq 1$

$9(16 \cdot 14 + \underbrace{14 + 16}_{30} + 1) = 9(16 \cdot 14 + 31) = 9 \cdot 6944 = 62496$

Ответ. 62496

21101006 (U266654 M1303913)

Лист 2 Задача 6 Математика Чистовик



Заметим, что $\angle AOC = 2\cdot\angle ABC = \angle APC$

т.к. центральный и вписанный; т.к. AOPC — вписанный

$\Rightarrow \angle BAP = \angle ABP$ (т.к. $\angle BAP = \angle APC - \angle ABP$)

$\Rightarrow$ треуг. $\triangle ABP$ — равнобед. $\Rightarrow$ P лежит на сер. перп. к AB (вместе с O)

T_1 лежит на сер. перп. к AC т.к. $\angle AOT_1 = \angle CT_1O \Rightarrow \angle AOT_1 = \angle OCT_1$ и $AT_1 = T_1C$

Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$,

$\angle AOT = \angle COT$ (т.к. AT и TC — кас. к окружн. с центром O)

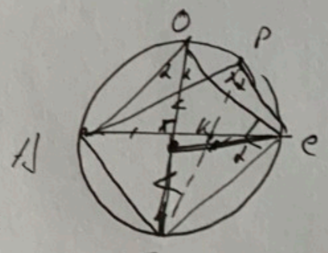
$\Rightarrow \angle AOT_1 = \alpha = \angle COT$

$S_{APC} = 21 = S_{APK} + S_{KPC} \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{S_{ABC}}{S_{APC}}$ $\frac{CP}{PB} = \frac{CP}{AP}$ т.к. $AP = BP$

Точка T лежит на опис. окр-ти AOC, вместе с P.

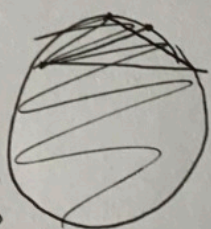
(т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$ OCTA вписанный)

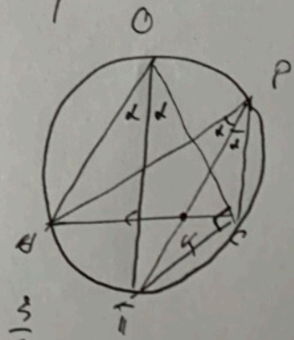
в этой окр-ти OT — диаметр ($\angle OCT = 90^\circ$)



Построив PK заметим, что $\angle TPC = \alpha = \angle TOC \Rightarrow$ PK — бисс

$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$





$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$

т.к. высота общая ~~KP~~ $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{PC}{CB} = \frac{3}{7}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{APC}\cdot 7}{3} = \frac{21\cdot 7}{3} = 49$

а) Ответ: $49 = S_{ABC}$

б) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$ $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$

Лист 3 Задача 6 продолжение

Математика

Чистовик

Пусть $AK = x$, тогда $KC = \frac{3}{4}x \Rightarrow AC = \frac{7}{4}x$

Пусть $BH = y$, тогда $\frac{HP}{BH} = tg\, 2 = \frac{3}{7} \Rightarrow HP = \frac{3}{7}y$

$S_{BPA} = \frac{4}{3} S_{APC} = 28 = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{3}{7} y \Rightarrow y^2 = \frac{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7}{3} \Rightarrow y = 14\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow BH = 14\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow AB = 28\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$ Построим CH_1 - высоту на AB

$CH_1 \cdot AB = 2 S_{ABC}$

$CK_1 = \frac{2 \cdot 49}{2 \cdot 14 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$

Черновик

$\log_{2x-3}(x+1)^2 \quad \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \quad \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

b a c b a c

$2\log_{2x-3}(x+1) \quad 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

=

$4\log_{(2x-3)}(x+1)\cdot\log_{(2x-3)}2x^2-3x+5$

= 5 · 7

$a = 5^{a_1}\cdot 7^{b_1} \quad b = 5^{a_2}\cdot 7^{b_2} \quad c = 5^{a_3}\cdot 7^{b_3}$

· 3 · где 1 в a_1, a_2 или a_3

· 3 где 1 в b.

· 17

· 15

$2\log_b a \quad 2\log_c b = \log_a c + 1$

$\log_a ac$

$\log_b a^2 b = \log_c b^2$

$\log_b a + 1 = \log_c b = \log_c c$

$\frac{\ln a^2 b}{\ln b} = \frac{\ln b^2}{\ln c}$

$(\ln a^2 + \ln b)\ln c = 2\ln b^2$

$\log_{2x-3} \quad \frac{2\ln a}{\ln b} \quad \frac{2\ln b}{\ln c} \quad \frac{\ln c}{\ln a}$

Пусть первый и третий равны, а второй на 1 меньше

$2\log_{2x-3}x+1 = \log_{x+1}2x^2-3x+5 = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$2 = \frac{\log_{x+1}2x^2-3x+5}{\log_{x+1}2x-3}$

$\log_{(2x+3)}(2x-3)^2 = 2 = \log_{2x-3}2x^2-3x+5$

$(2x-3)^2 = 2x^2-3x+3$

$4x^2-12x+9 = 2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4=0$

$(x=4; \frac{1}{2})$

2 равных

Пусть второй и 3 равны

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{x+1}2x^2-3x+5$

$\log_{(x+1)}(2x-3)^2 = 1$

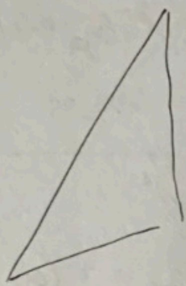
$x+1 = (2x-3)^2$

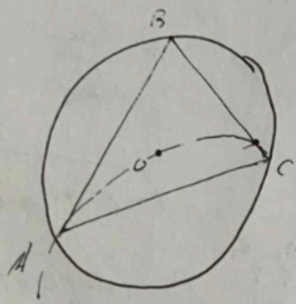
$x+1 = 4x^2-12x+9$

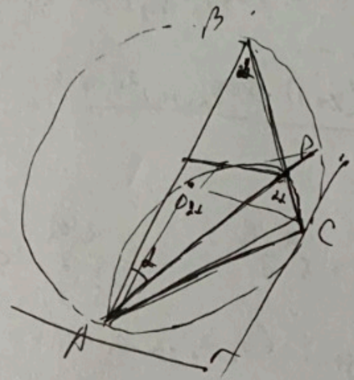
Черновик

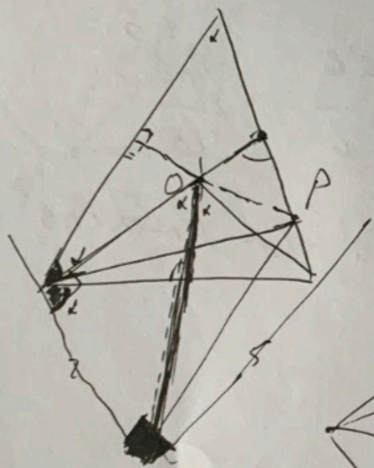
Сумма всех $2\log_{2x-3} x+1 + 2\log_{2x^2-3x+5} 2x-3 + \log_{x+1} 2x^2-3x+5$

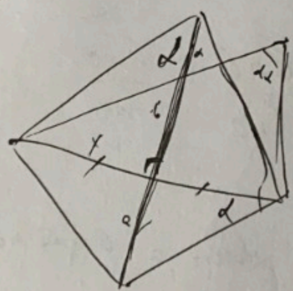
Черновик





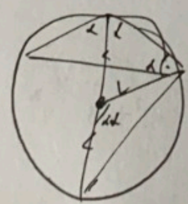






$tg\alpha = \frac{x}{c} = \frac{a}{x}$

$x^2 = ac$



$16 \times 14 = 64 + 16 = 224$

$224 + 31 = 224 + 672 = 6944 \,|\, 7 \cdot 3$

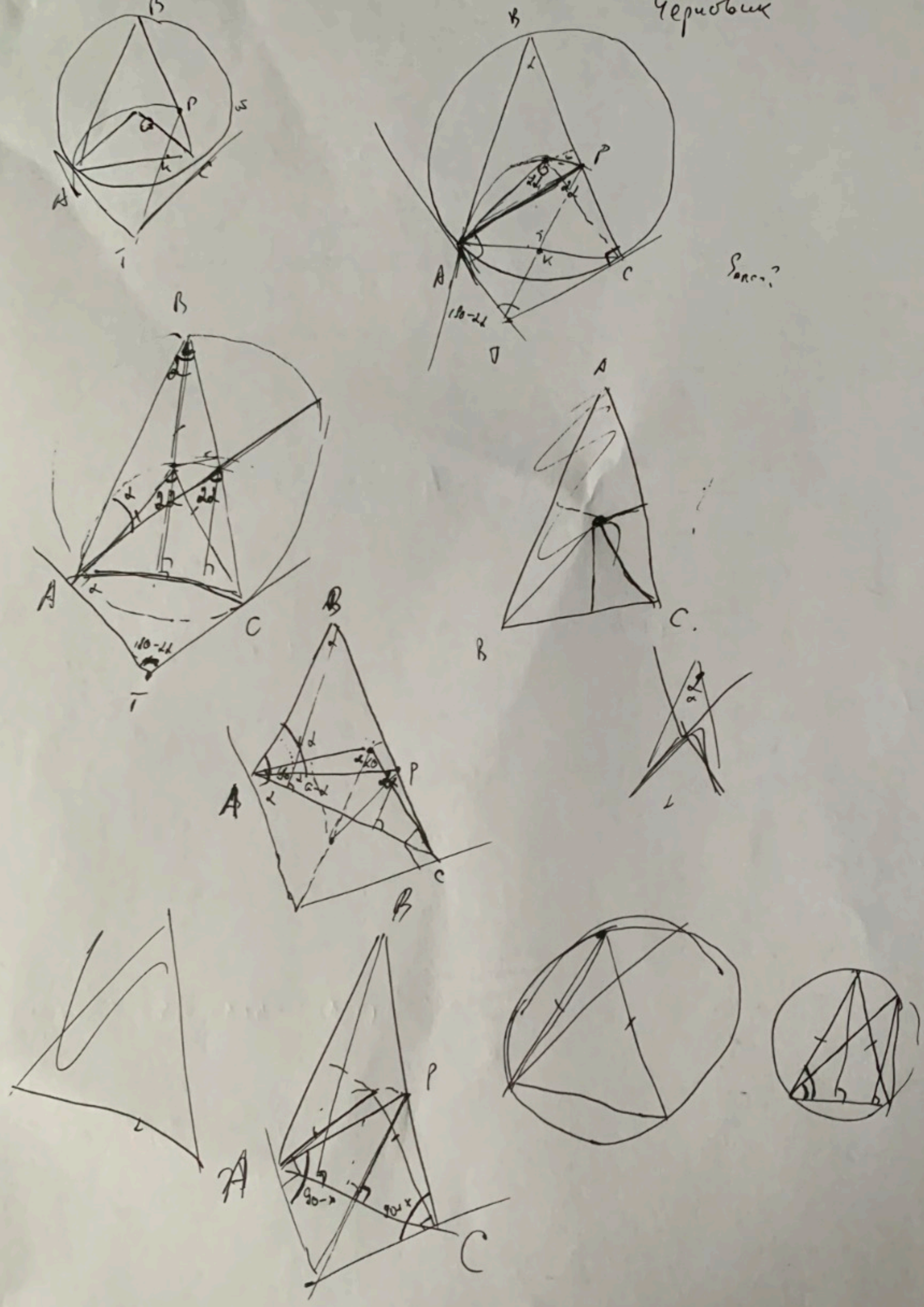
$96 : 3$

21

$6944 \times 9 = 62496$

$\sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

Черновик



$2x^2-3x+5>0$

$D = 9-40<0$

$2x^2-3x+4>0$

$D = 9-16\cdot 2$

$2\log_{2x-3}(x+1)$ $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ $\boxed{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}$

(a = $x+1$, b = $2x-3$, c = $2x^2-3x+5$)

$2x-3>0$ $\neq 1$ $x>\frac{3}{2}$

$x+1>0$ $\neq 1$ $2x-3\neq 1$

$x>-1$ $2x\neq 4$ $x\neq 2$

$2\log_b a$ $2\log_c b$ $\log_a c$

$x>\frac{3}{2}$

$\log_b a = \log_c b$

$x+1-2x+3 = \boxed{-x+2}$ $\cancel{x+1}$

$-(x+2)$

$\Rightarrow b>a$ всегда

$x+1-(2x-3) = -x+4 = -(x-4)$ При $x>4$ меньше ~~больше~~ 1, до этого ~~меньше~~ больше 1

$b-c = 2x-3-2x^2+3x-5 =$

$-2x^2+5x-8 =$

$= -(2x^2-5x+8) =$

$2x-3-2x^2+3x-5 = -2x^2+5x-8$

$-(2x^2-5x+8)$

$D = 25-64$

всегда $2x-3 < 2x^2-3x+5$

$c>b$ всегда

$\Rightarrow \log$ второй меньше 1

$c-a = 2x^2-3x+5-x-1$

$2x^2-3x+5-x-1 = 2x^2-4x+4 = 2(x^2-2x+1+1)>0$ всегда

$\log(2x^2-3x+5) = b$

$(2x-3)^2-2x^2+3x-5 = 4x^2-12x+9-2x^2+3x-5 = 2x^2-9x+4$

$D = 81-4\cdot 4\cdot 2 = 81-32 = 49$

$x = \frac{9\pm 7}{4} = 4;\ \frac{1}{2}$

$81-32$

$\log$ второй >1 при $x>4$

и <1 при $x<4$

$\log$ первого ~~меньше 1 при $x>4$~~ больше 1 ~~при $x<4$~~ при $x\in R$

$(x+1)^2-(2x-3)$

$x^2+2x+1-2x+3 = x^2+4$

Черновик