Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100983**

ID профиля: **858988**

Вариант 21

Чистовик

1. Пусть разность прогрессии $-d$, тогда

$$S=\frac{(a_1+a_1+6d)\cdot 7}{2}=(a_1+3d)7$$

$a_8\cdot a_{17}=(a_1+7d)(a_1+16d)$; $a_{11}\cdot a_{14}=(a_1+10d)(a_1+13d)$

Имеем систему:

$$\begin{cases} a_8\cdot a_{17}>S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14}<S+60 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d)>(a_1+3d)7+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d)<(a_1+3d)+7+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+112d^2+23a_1d>7a_1+21d+27 \quad (1) \\ a_1^2+130d^2+23a_1d<7a_1+21d+60 \quad (2) \end{cases}$$

Вычтем из (2) нерав. (1): $18d^2<33 \iff d^2<\frac{33}{18}$ $\quad d<\sqrt{\frac{33}{18}}$

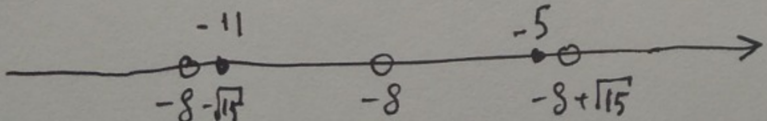
т.к. прогрессия возрас. $d>0$, т.к. все члены целые $d\in\mathbb{Z}$.

$\sqrt{\frac{33}{18}}<\sqrt{2}<2$, т.к. $0<d<2$, $d\in\mathbb{Z}$, то $d=1$

Имеем: $\begin{cases} a_1^2+112+23a_1>7a_1+21+27 \\ a_1^2+130+23a_1<7a_1+21+60 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (a_1+8)^2>0 \iff a_1\neq -8 \\ (a_1+8)^2-15<0 \iff (a_1-(-8+\sqrt{15}))(a_1-(-8-\sqrt{15}))<0 \quad (3) \end{cases}$$

$(3) \iff a_1 \cancel{\in(-8-\sqrt{15})\cup(} \; a_1\in(-8-\sqrt{15};-8+\sqrt{15})$ $\quad 3<\sqrt{15}<4$



по усл. $a_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1\in\{-11,-10,-9,-7,-6,-5\}$

Ответ. $a_1\in\{-11,-10,-9,-7,-6,-5\}$

Чистовик.

Дано:

ABCD - тетраэдр

$AB = 4$

$AC = CB = 5$

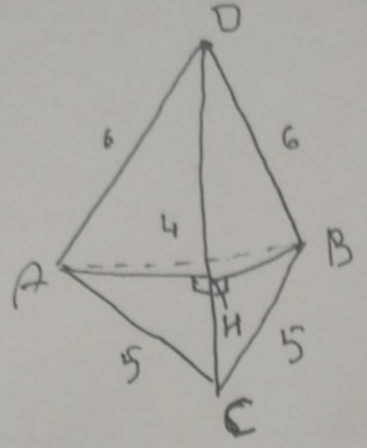
$AD = DB = 6$

$CD \parallel$ оси цил.

Найти

R_{min} - ?

Решение:



Проведем высоты BH и AH

ω - описанный цилиндр. $\Rightarrow CD \in \omega \Rightarrow H \in \omega$

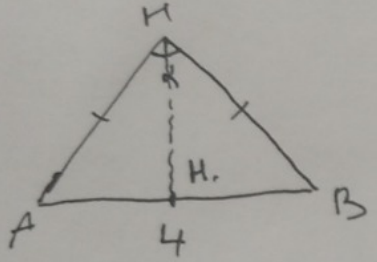
т.к. $C \in \omega$, $D \in \omega$, $CD \parallel$ оси ω, $CD \perp AH$ и $CD \perp HB \Rightarrow CD \perp$ плоскости AHB

Значит радиус окружности, описанной около треуг. ABH это радиус цилиндра R

Т.к. $AD = DB$, $AC = CB$, DC - общая, то по 3 сторонам

$\triangle ADC = \triangle BDC \Rightarrow AH = BH \Rightarrow ABH$ - равнобедренный.

Рассмотрим $\triangle ABH$:



по т. синусов. $2R = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow R$ минимальный при $\sin\alpha$ макс.

$\sin\alpha_{max} = 1$ при $\alpha = 90°$, то

~~проведем высоту HH~~, по т. Пифагора $AH^2 + HB^2 = AB^2$

Пусть $AH = HB = a$, тогда $2a^2 = 4^2$ $a^2 = 8$, $a = \sqrt{8}$

$\sqrt{8} < 5 < 6$ - значит подходит.

По т. Пифагора. $HC = \sqrt{\underset{AC}{5^2} - (\underset{AH}{\sqrt{8}})^2} = \sqrt{17}$, $HD = \sqrt{\underset{AD}{6^2} - (\underset{AH}{\sqrt{8}})^2} = \sqrt{28}$

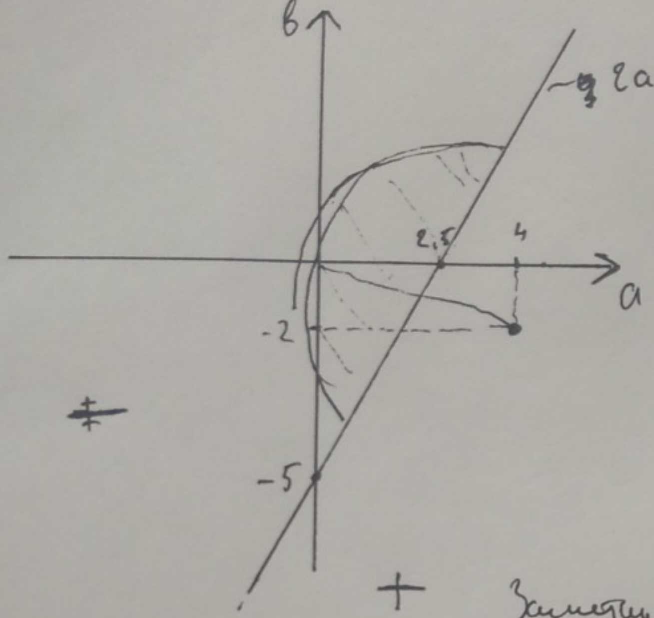
$CD = HC + HD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

Ответ. $CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

Чистовик.

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 & \text{— круг, с центром в } (a,b) \text{, радиусом } \sqrt{20} \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) & (2) \end{cases}$

Рассмотрим неравенство $8a-4b \le 20 \iff 2a-b \le 5 \iff 2a-b-5 \le 0$



неравенство (2) равносильно:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a-b-5 \le 0 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b \end{cases} (3) \\ \begin{cases} 2a-b-5 \ge 0 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases} \end{array}\right.$ — круг ~~окружность~~ с центром в (0,0) радиусом $\sqrt{20}$

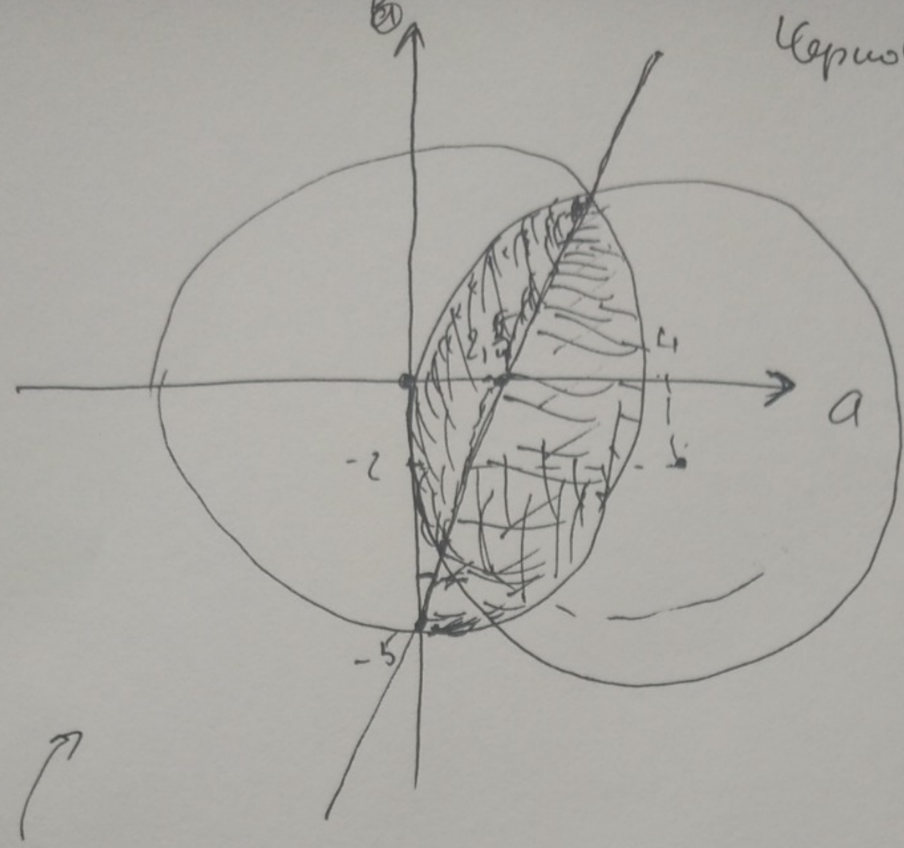
(3): $\begin{cases} 2a-b-5 \le 0 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \end{cases}$ - круг с центром в (4,-2) радиусом $\sqrt{20}$

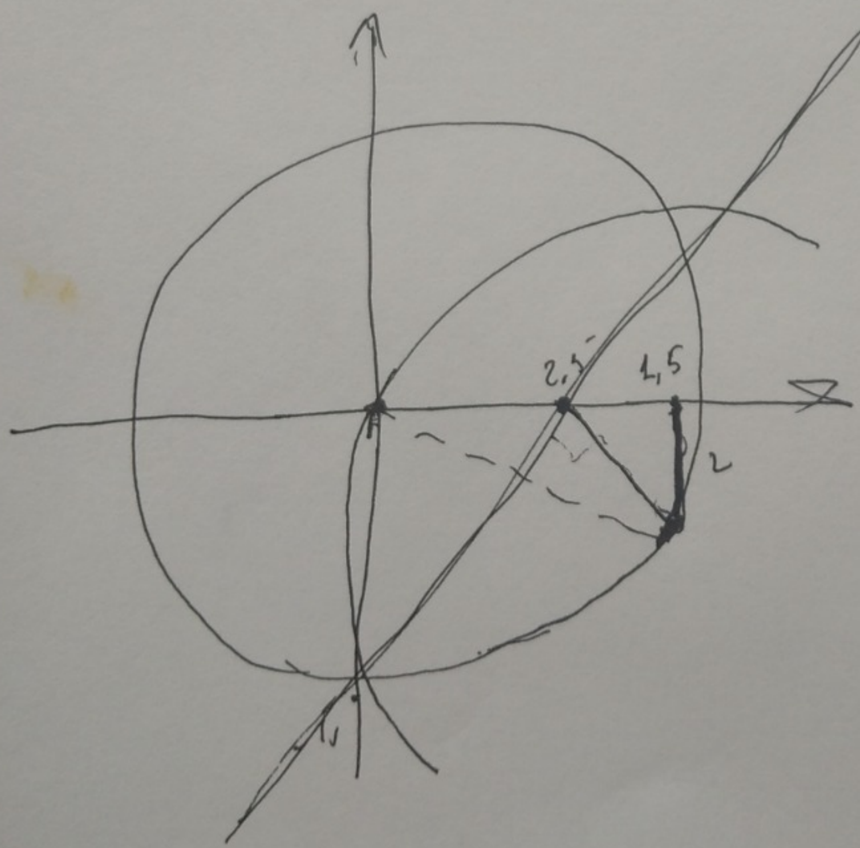
Заметим, что, $\sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow$ ~~центр~~

центры ~~окруж~~ ~~кру~~ окружностей, ограничивающих круги, проходят через центр друг-друга.

21100983 (U858988 M1304584)

Черновик.



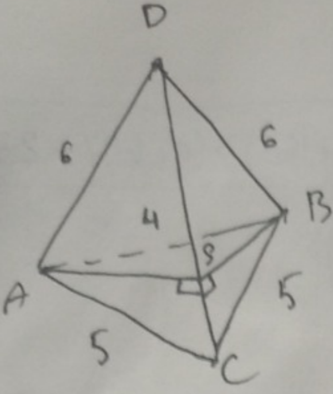


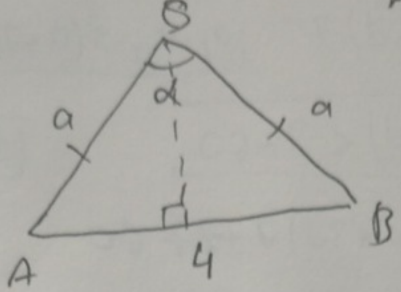
2

4^2

В

Черновик





~~AB =~~

$AS = SB < 5$

$\frac{AB}{\sin S} = 2R_{min} \Leftrightarrow$

$\sin S \to max$ - $\sin S_{max} = 1$ при $\angle S = 90°$

$2 \cdot a^2 = 16$

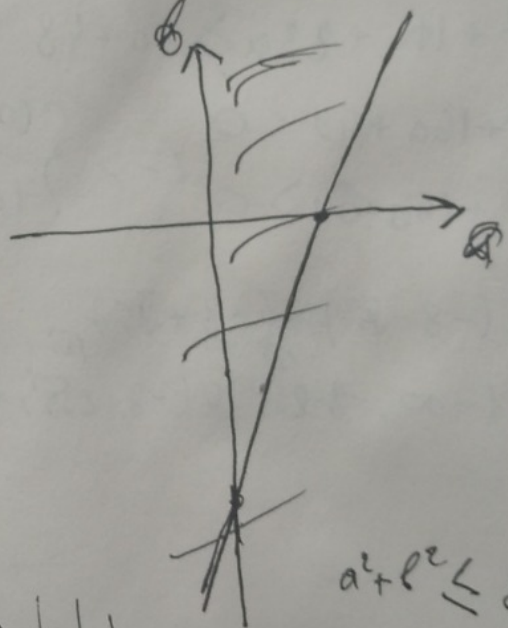
$a^2 = 8$

$a = \sqrt{8} < 5$

$\wedge$

6

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b, 20) \end{cases}$$



$8a - 4b \le 20$ - $8a - 4b - 20 \le 0$

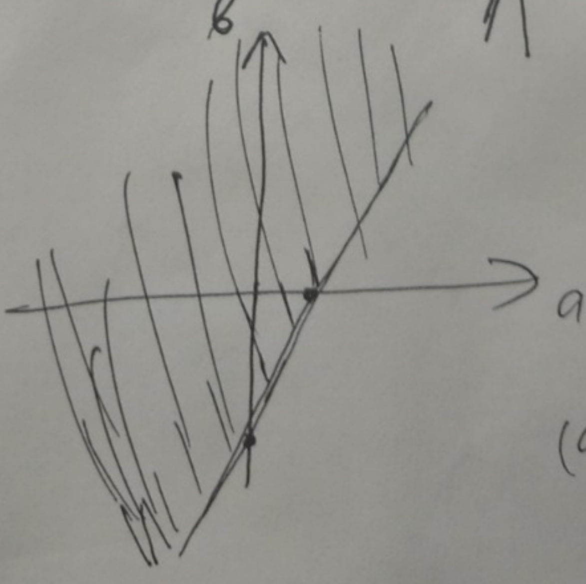
$4a - b \le 20$ 40

$b \ge 4a - 20$

$4a - b - 5 \le 0$

$b = 0$ $a = \frac{5}{4}$

$a = 0, b = -5$



$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$

$a^2 + b^2 \le 20$

$a^2 - 8a + b^2 + 4b \le 0$

$(a - 4)^2 + (b + 2)^2 \le 20$ $2\sqrt{5}$

$4 < \sqrt{20} < 5$

8

21100983 (U858988 M1304584)

Черновик.

$a_i \in \mathbb{Z}$ $a_1 = a$ $a_i = a + d(i-1)$

$S_7 = \frac{(2a+6d)\cdot 7}{2} = (a+3d)7$ $\boxed{a_8 \cdot a_{17} = (a+7d)(a+16d) > (a+3d)7+27}$

$a_{11} \cdot a_{14} = \boxed{(a+10d)(a+13d) < S+60}$ $\boxed{d>0}$

$$\begin{cases} (a+10d)(a+13d) < (a+3d)7 + \cancel{27}\ 60 \\ (a+7d)(a+16d) > (a+3d)7+27. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+130d^2+23ad < 7a+21d+60 \\ a^2+112d^2+23ad > 7a+21d+27 \end{cases} - \Rightarrow 18d^2 < 33 \quad d^2 < \frac{33}{18}$$

$d < \sqrt{\frac{33}{18}}$

$\Downarrow$

$\boxed{d=1}$

$$\begin{cases} a^2+130+23a < 7a+81 \\ a^2+112+23a > 7a+48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+16a+49<0 \\ a^2+16a+64>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+8)^2-15<0 \\ (a+8)^2-20>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-(-8+\sqrt{15}))(a-(-8-\sqrt{15}))<0 \\ (a-(-8+2\sqrt{5}))(a-(-8-2\sqrt{5}))>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \\ a \in (-\infty; -8-2\sqrt{5}) \cup (-8+2\sqrt{5}; +\infty) \end{cases}$$

(1)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100983**

ID профиля: **858988**

Вариант 21

Чистовик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 & (1) \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} & (2) \end{cases}$

Из (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=5^m\cdot 7^n \\ b=5^l\cdot 7^k \\ c=5^t\cdot 7^z \end{cases}$ где. $m,n,l,k,t,z\in N$ $\quad 35=7,5 \Rightarrow m,n,l,k,t,z\neq 0$

Т.к. НОК содержит 7^{16}, то одно из n,k,z должно равняться 16

$35=7\cdot 5 \Rightarrow$ одно из $n,k,z=1$. Оставшееся $\in\{1,2,3....15,16\}$

~~Число вы~~ Выбрать „1" и „16" из n,k,z вариантов $C_3^2=\frac{3!}{2!1!}=3$

для каждого из них можно подобрать 16 вариантов оставшегося числа.

Получаем. $3\cdot 16$ вариантов, необходимо вычесть $\frac{2\cdot 3}{2}=3$, т.к. варианты, которых ~~когда~~ оставшееся число $\in\{1,16\}$ посчитано 2 раза.

Итого имеем $3\cdot 16-3=45$ вариантов выбрать числа n,k,z.

Т.к. НОК. содержит 5^{18}, то одно из m,l,t должно равняться 18.

$35=7\cdot 5 \Rightarrow$ одно из $m,l,t=1$, оставшееся число $\in\{1,2,...,17,18\}$.

Выбрать „1" и „18" из m,l,t вариантов, $C_3^2=\frac{3!}{2!1!}=3$

для каждого из них можно подо ~~брать~~ 18 вариантов оставшегося числа.

Аналогично ~~для~~ степеням n,k,z, получаем. $18\cdot 3-3=51$ вариант.

Итого вариантов: $51\cdot 45=2295$

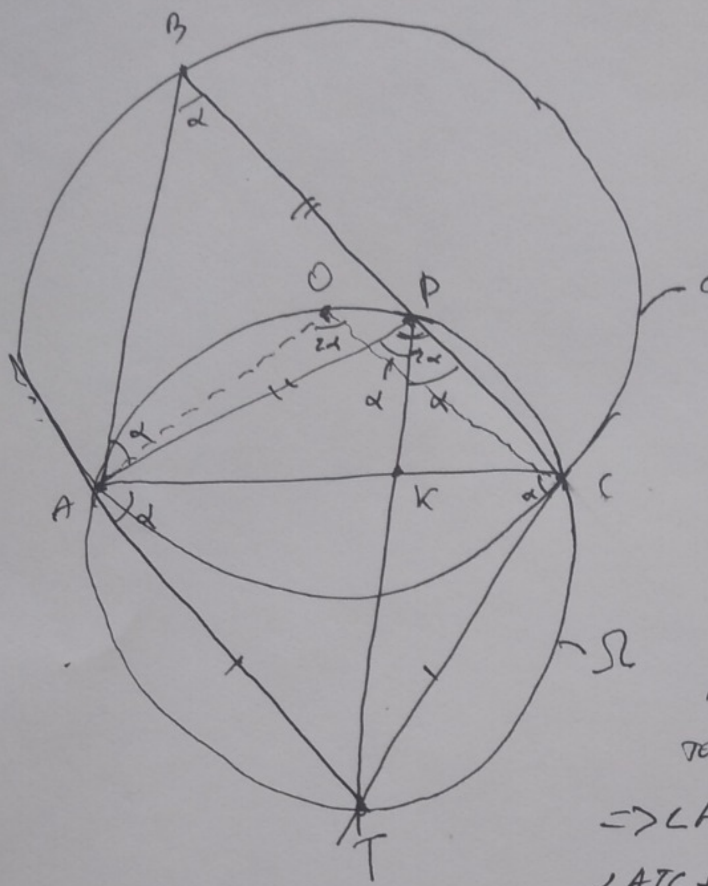
Ответ. всего 2295 троек чисел a,b,c.

2

21100983 (U858988 M1304585)

Чистовик.

6.



Пусть $\angle TAC = \alpha$

$\angle AOC = 2\alpha$ (свойство угла между касательной и хордой)

~~$\angle AOC =$~~ $\angle APC = \angle AOC$ т.к. опираются на дугу AC окр. Ω

$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

$\angle APC$ – внешний для $\triangle ABP$, поэтому

$\angle PAC + \angle ABP = \angle APC$ т.е

$\angle PAC + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \angle PAC = \alpha$

$AT = TC$ – т.к. касательные, пров. из одной точки $\Rightarrow \angle TCA = \angle TAC = \alpha$ ($\triangle ATC$) – равнобед.

$\Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\alpha$.

$\angle ATC + \angle APC = 180 - 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in \Omega$ $\angle APT = \angle ACT = \alpha$ (опираются на дугу AT) $\Rightarrow \angle TPC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow PK$ – биссектриса $\triangle APC$, тогда $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC}$

$S_{APK} = 12$, $S_{CPK} = 9$, эти $\triangle$ имеют общую высоту из вершины $P \Rightarrow$

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; $\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$ пусть $AP = 4x$, $PC = 3x$

Тогда $S_{APC} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, 4x \cdot 3x$, $S_{ABP} = \frac{1}{2} \sin(180 - 2\alpha)(4x)^2$

$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{16x^2}{12x^2} = \frac{4}{3}$ $S_{ABP} = \frac{4}{3} S_{APC} = \frac{4}{3}(S_{APK} + S_{CPK}) = \frac{4}{3}(12+9) = 28$

~~$S_{ABC} + S$~~ $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC}$; $S_{ABC} = 28 + 12 + 9 = 49$

Ответ. а) $S_{ABC} = 49$

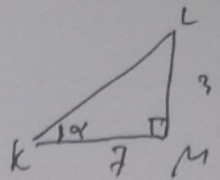
2

21100983 (U858988 M1304585)

Чистовик

6. (продолжение)

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$ | $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$



Рассмотр ~~Предп.~~ с. прямоуг. треуг. с катетами 3 и 7

Тогда, по т. Пифагора $KL = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}$

$\angle KLM = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}, \ \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{21}{58}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{14}{58} - \frac{58}{58} = \frac{44}{58} = -\frac{22}{29}$

$S_{APC} = 12+9 = 21 \qquad S_{APC} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \, 4x \cdot 3x =$

$21 = \frac{1}{2}\cdot\frac{21}{58}\cdot 12x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{21\cdot 2\cdot 58}{12\cdot 21} = \frac{58}{6} = \frac{29}{3} \quad x = \sqrt{\frac{29}{3}}$

По т. косинусов

$AC = \sqrt{AD^2+DC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos 2\alpha} = \sqrt{(4x)^2+(3x)^2+2\cdot 12x^2\cdot\frac{22}{29}} =$

$= \cancel{x\sqrt{4^2+3^2-2\cdot 12\cdot\frac{22}{29}}} \ \sqrt{\frac{16\cdot 29}{3}+\frac{9\cdot 29}{3}+2\cdot 12\cdot\frac{29}{3}\cdot\frac{22}{29}} =$

$= \sqrt{\frac{29(16+9)+2\cdot 12\cdot 22}{3}} = \sqrt{\frac{29\cdot 25+24\cdot 22}{3}} = \sqrt{\frac{724+528}{3}} = \sqrt{\frac{1252}{3}} =$

$= 2\sqrt{\frac{313}{3}}$

Ответ: $AC = 2\sqrt{\frac{313}{3}}$

3

Черновик.

4. $\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 35 = 7\cdot 5 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$ $a, b, c \in \mathbb{N}$

$a = 5^m \cdot 7^n$

$b = 5^l \cdot 7^k$

$c = 5^t \cdot 7^z$

одно из $n, k, z = 16$.

одно из $n, k, z = 1$.

оставшееся любое число из $\{1, \dots, 16\}$

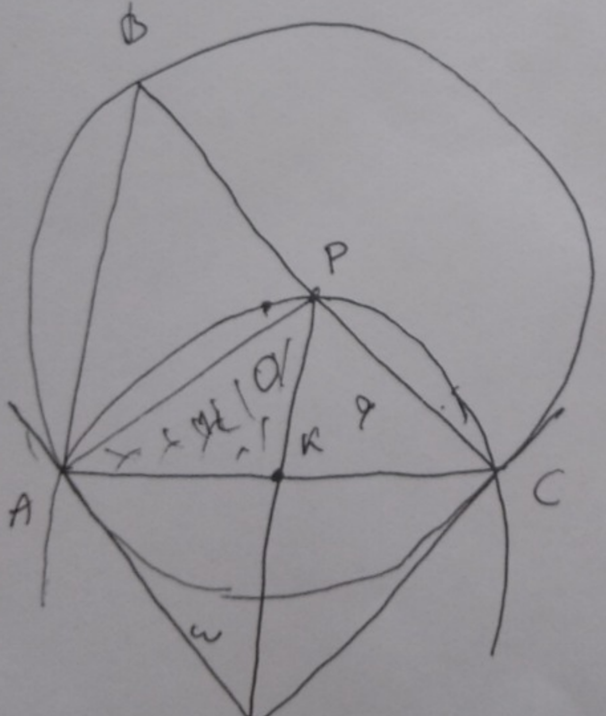
одно из $m, l, t = 18$

одно из $m, l, t = 1$

оставшееся любое число из $\{1, \dots, 18)$

$(C_3^2 \cdot 18)(C_3^2 \cdot 16)$

51×45: 255, 204, 2295



29×25: 145, 58, 725

24×22: 48, 48, 528

2

21100983 (U858988 M1304585)

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1) = (a-1)$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = (a-1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \cancel{(a+1)} = a$

$(a+1)^2 \quad a$

$(a-1)^2 =$

$\frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)} \vee \frac{2\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)} \quad \log_{x+1}\left(\frac{\cancel{2x-3}}{2x^2-3x+5}\right)$

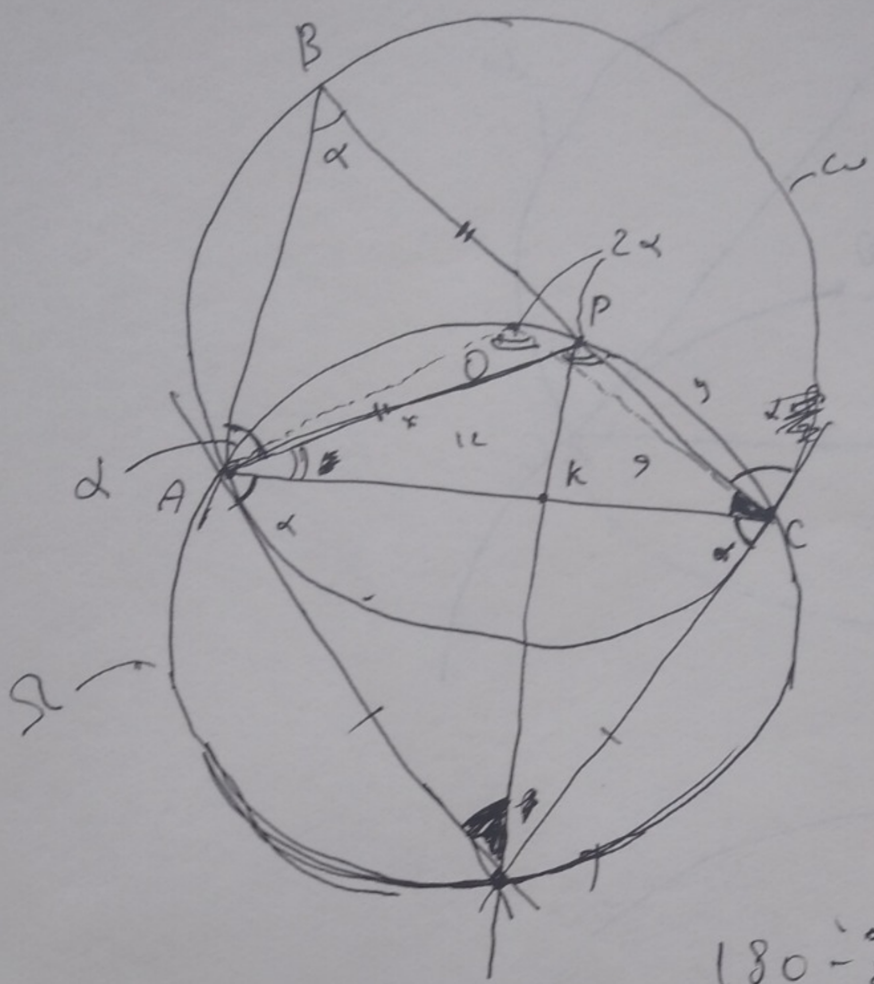
a

$(a+1) \quad a^2+2a+1 \quad (a+1)$

$\frac{4}{\log(x+1)(2x^2-3x+5)} = \log$

2

Черновик.

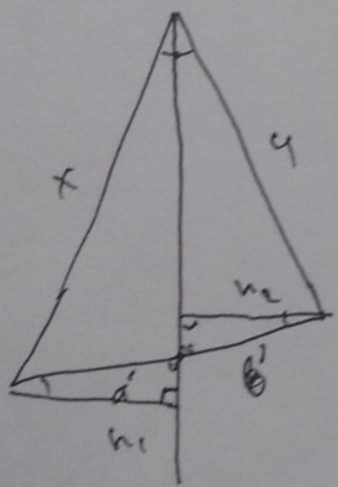


S ABC

$$\frac{AK}{KC} = \frac{12}{9}$$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$

$180 - 2\alpha + \beta$



$$\sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \qquad \frac{x}{y} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}}$$

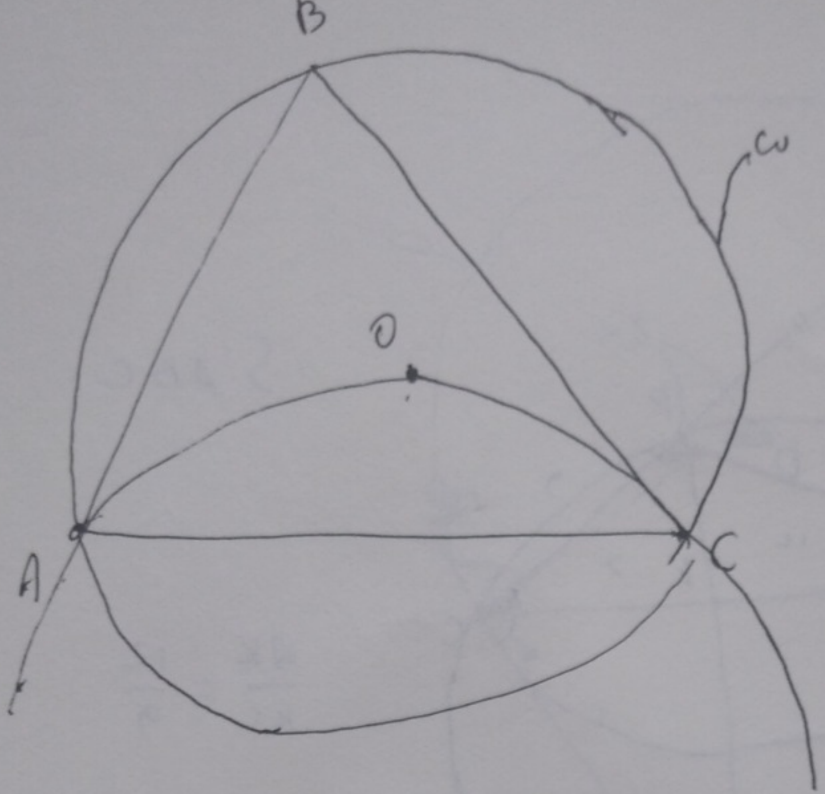
$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$$

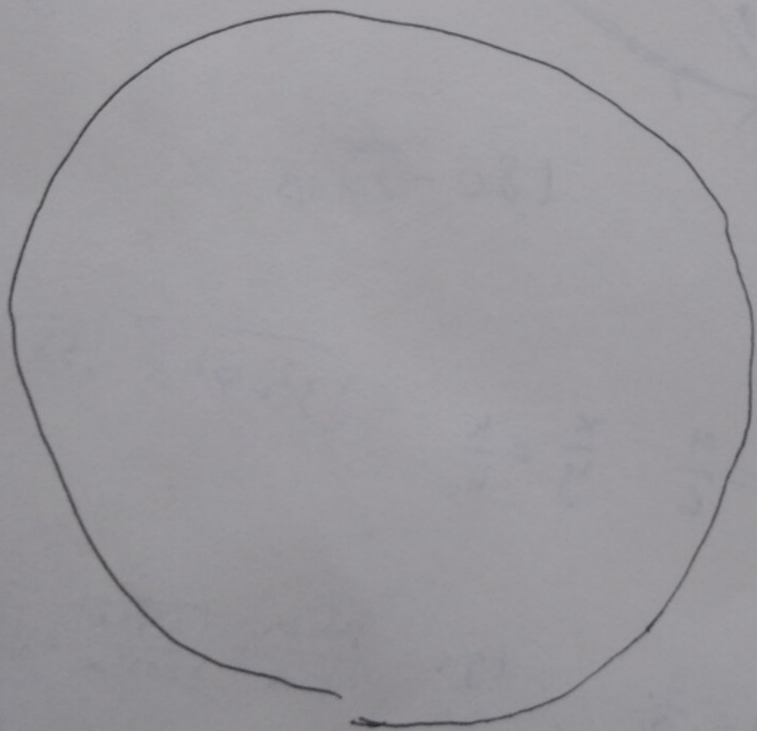
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$$

3

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+1} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$$

Черновик.





4

21100983 (U858988 M1304585)