# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100982**

ID профиля: **848228**

Вариант 21

№1. Пусть $d$ – разность арифм. прогрессии; $d>0$.

Тогда $S = 7a_1 + 21d$

$a_8 a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2 + 23da_1 + \cancel{114d^2}\, 112d^2 > S + 27 =$

$= 7a_1 + 21d + 27 \Leftrightarrow$

$-a_1^2 - 23a_1d - 112d^2 < -7a_1 - 21d - 27.$ (I)

$a_{11} \cdot a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 < S + 60 = 7a_1 + 21d + 60$; (II).

(I) + (II): $18d^2 < 33$ $\quad \begin{cases} d^2 < \frac{33}{18} < 2 \\ d > 0 \\ d \in Z \end{cases}$ (ведь разность двух соседних членов прогрессии - целых чисел – целое число) $\Leftrightarrow d = 1.$

Подставим $d$ в исходные неравенства и получим

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 64 - 64 + 49 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+8)^2 > 0 \\ (a_1+8)^2 < 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -8 \\ -3 \leq a_1 + 8 \leq 3 \\ a_1 \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in [-11; -5] \\ a_1 \in Z \end{cases}$$

Ответ: Возможные значения $a_1$ $\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$.

Чистовик

математика 11 кл

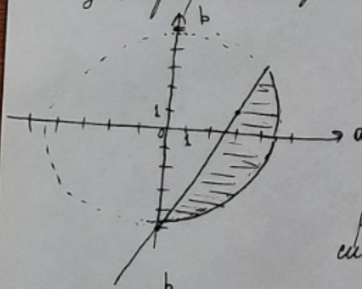
№ 3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases}$

Сначала разберемся с нижним неравенством.

$a^2+b^2\le\min(8a-4b;20) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8a-4b\ge 20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}\\ \begin{cases}8a-4b<20\\ a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\le 2a-5\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}\\ \begin{cases}b>2a-5\\ a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\le 2a-5\\ a^2+b^2\le 20\end{cases} \quad (I)\\ \begin{cases}b>2a-5\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20.\end{cases} \quad (II).\end{array}\right.$

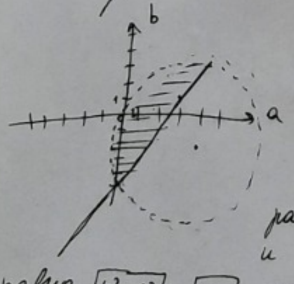
Найдем графически решение ~~первого~~ первой системы:



Точки пересечения найдем с помощью системы:

$\begin{cases}b=2a-5\\ a^2+b^2=20\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2+\sqrt{3}\\ b=2\sqrt{3}-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=2-\sqrt{3}\\ b=-2\sqrt{3}-1\end{cases}\end{array}\right.$

решим таким же образом 2-ую систему:

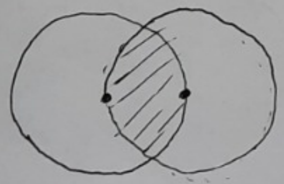


Точки пересечения:

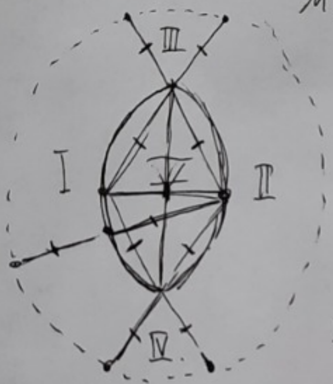
$\begin{cases}b=2a-5.\\ a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2+\sqrt{3}\\ b=2\sqrt{3}-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=2-\sqrt{3}\\ b=2\sqrt{3}-1\end{cases}\end{array}\right.$ ; т.е.

Точки пересечения этих окружностей равных радиусов с прямой совпадают, да еще и расстояние между центрами окружностей равно $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ - радиусу этих окружностей; подходящее нам множество ~~точ~~ точек образует область пересечение этих окружностей

Чистовик математика 11 кл.



Из первого неравенства изначальной системы следует, что вокруг каждой точки закрашенной области провели окружность радиусом 20. Огибающая этих окружностей и задаст нам фигуру М.




Разобьем получившуюся область на 5, как показано на картинке.

Области „I+V" и „II+V" - части кругов, ограниченных углом в 120° радиусом $2\sqrt{20}$

$$S_{„I+V"} = \pi R_1^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 80}{3} = S_{II+V}.$$

$$S_{V}^{ромб} = \sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{20} = 10\sqrt{3}$$

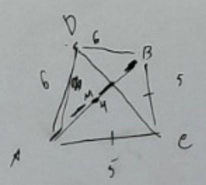
$$S_{III} = \pi R_3^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{20\pi}{6}.$$

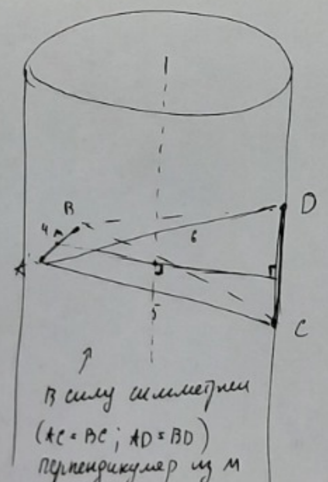
$$S_M = \cancel{2S_{„I+II"}} \cdot 2S_{„I+V"} - S_{V} + 2S_{III} = \frac{160\pi}{3} + \frac{20\pi}{3} - 10\sqrt{3} =$$

$$= \frac{180\pi}{3} - 10\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{180\pi}{3} - 10\sqrt{3}$.

2. Чистовик математика 11 кл.



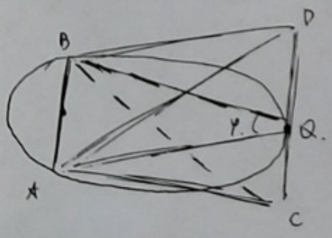




M - середина AB

$\left.\begin{matrix} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CMD \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp CD.$

В силу симметрии ($AC = BC$; $AD = BD$) перпендикуляр из M к CD проходит через ось перпендикулярно ей, как ещё и AB.




$AD^2 - DQ^2 = AQ^2 = AC^2 - CQ^2.$

$36 - DQ^2 = 25 - CQ^2.$

$11 = (DQ - CQ)(DQ + CQ) = CD(DQ - CQ).$

$\frac{AB}{2\sin\varphi_{min}} = R_{min} \Rightarrow \sin\varphi_{min} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда $AB = 2R = 4$. $R = 2$.

$BQ = AQ = R\sqrt{2} = \cancel{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$BQ^2 = 36 - DQ^2 = 25 - CQ^2 = 8$ $\quad DQ = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$

$CQ = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

$CD = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$.

4

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100982**

ID профиля: **848228**

Вариант 21

Чистовик. Вариант 21 часть 2. математика 11 кл.

№4 $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 35 = 5^1 \cdot 7^1 \\ НОК(a,b,c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$. Т.к. НОК из простых множителей содержит только 5 и 7, то и каждое из чисел a, b, c можно разложить только на них:

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$ $c = 5^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$.

$b = 5^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$

Хотя бы одно из чисел $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ равно единице, и хотя бы одно из них равно 18, как следует из условий. Аналогично хотя бы одно из чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = 1$, и хотя бы одно равно 16.

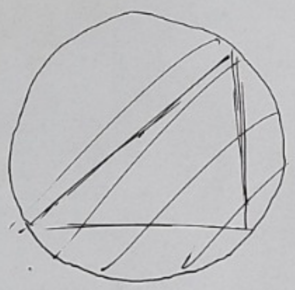
единицу можно выбрать 3-мя способами, после чего 18 - двумя, а последнее число может принимать значения от 1 до 18, всего способов $3 \cdot 2 \cdot 18 = 108$ способов.

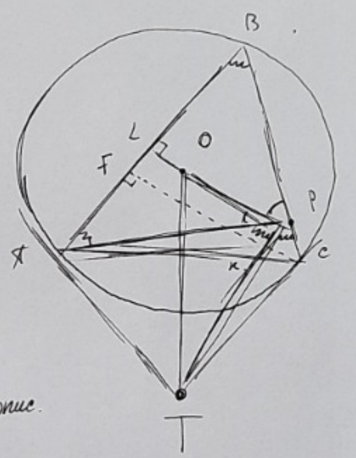
Аналогично для второй тройки чисел: способов $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$

Перемножив, получим 10368 способов. Среди чисел a, b, c обязательно есть 2 разных, но случаи, когда одно из чисел равно другому мы посчитали 2 раза. Всего таких случаев: Выбрать тройку $\alpha_1$, $\beta_1$ и $\gamma_1$ можно $3 \cdot 2 \cdot 2$ способами и для каждого такого способа есть 2 способа подобрать 2ую тройку чисел. Всего способов $3 \cdot 8$, половина от них - 12 шт. Эти 12 штук мы и вычтем из 10368. Тогда ответ: ~~10356~~ 10356. Ответ: 10356 способов.

Чистовик

№6.






В ~~Δ~~ $AOCT$: $\angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow$
~~Δ~~ $AOCT$ – вписан в окр; т. $T \in$ окр, опис. около $AOPC$.

$\angle APT \overset{\text{опир. на одну дугу}}{=} \angle ACT \overset{\text{р/б. } \Delta ACT}{=} \angle TAC \overset{\text{опир. на одну дугу}}{=} \angle TPC \overset{\text{опир. на одну дугу}}{=} \angle COT = \angle AOT = \frac{1}{2} \angle AOC \overset{\text{св-во центра опис. окр.}}{=} \angle ABC = \alpha$.

~~$\angle OPT = 90°$ (опир. на диаметр OT)~~ $\angle OPT \overset{\text{опир. на одну дугу}}{=} \angle OCT = 90°$

$\angle OPA = 90° - \alpha = \angle OPB$. Тогда $\angle BLP = 90° (180 - \angle LBP - \angle LPB)$, т.е. $PL$ – высота, еще и биссектриса, $\Rightarrow \Delta ABP$ – р/б.

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{12}{9} = \frac{AP}{PC}$ (св-во биссектрисы) $= \frac{BP}{PC} \Rightarrow$

$\frac{BC}{PC} = 1 + \frac{12}{9} = \frac{21}{9} = \frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{S_{ABC}}{21}$; $\underline{S_{ABC} = \frac{21^2}{9} = \frac{3^2 \cdot 7^2}{9} = 49.}$

$AF^2 + FC^2 = AC^2$.

$AF = AB - BF$

$AB \cdot CF$

②