Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100646**

ID профиля: **68984**

Вариант 21

Чистовик стр. 1.

Задача 1 Вариант 21.

Пусть d — разность прогрессии ($a_{i+1}=a_i+d$), $d>0$

Прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow a_1\in Z;\ d\in Z$

$S=a_1+a_2+\ldots+a_7=7a_1+(d+\ldots+6d)=7a_1+21d$

$a_8a_{17}=(a_1+7d)(a_1+16d)=a_1^2+23a_1d+112d^2$ $\quad a_{11}a_{14}=(a_1+10d)(a_1+13d)=a_1^2+23a_1d+130d^2$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2>7a_1+21d+27 & (1)\\ 7a_1+21d+60>a_1^2+23a_1d+130d^2 & (2)\end{cases}$$

$(1)+(2):\ \cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+112d^2+\cancel{7a_1}+\cancel{21d}+60>$
$>\cancel{7a_1}+\cancel{21d}+27+\cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+130d^2$

$33>18d^2$ прогрессия возрастает $\Rightarrow d>0$, $d\in Z$.

$d^2<\frac{33}{18}\Rightarrow d^2<2$ $\quad d=1$, т.к. если $d=2$ $\ 2^2>2$, а если $d>2$, то $d^2>4>2\Rightarrow$ не подходит. Единственный вариант $d=1$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112>7a_1+48\\ 7a_1+81>a_1^2+23a_1+130\end{cases}\qquad \begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0\\ a_1^2+16a_1+49<0\end{cases}\qquad \begin{cases} (a_1+8)^2>0\\ a_1^2+16a_1+49<0\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\neq -8\\ a_1^2+16a_1+49<0 \quad (3)\end{cases}$$

$(3):\ D=256-196=60 \quad \sqrt{D}=2\sqrt{15}$

$a_1=-8-\sqrt{15}$ $\qquad 3^2=9\quad 4^2=16\quad 3<\sqrt{15}<4$

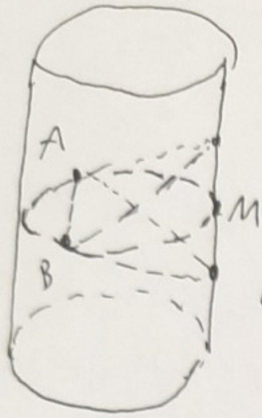
$a_2=-8+\sqrt{15}$ $\qquad a_1\in(-8-\sqrt{15};-8+\sqrt{15})\quad a_1\in Z\Rightarrow a_1\in(-12;-4)$

$$\begin{cases} a_1\in(-12;-4)\\ a_1\neq -8\end{cases}\qquad a_1=\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$$

Ответ: $a_1\in\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$

21100646 (U68984 M1304076)

Вариант 21 Задача 2

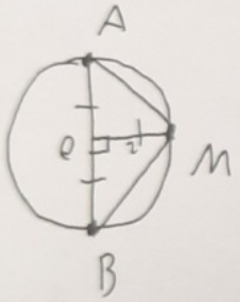


~~$AD = DD \Rightarrow$~~ $AD = DB = 6 \Rightarrow$ т. A и B находятся на сфере радиуса 6 с ц. в точке D

$CA = CB = 5 \Rightarrow$ т. A и B находятся на сфере радиуса 5 с ц. в т. C.

Пересечение сфер – окр., перп. линии центров (ω) $\perp CD$, CD перпендикулярно основанию цилиндра (т.к параллельно высоте) $\Rightarrow$ ω лежит в пл-ти, параллельной основанию. $A, B \in \omega$ $AB = 4 \le 2R_\omega \Rightarrow R_{\omega\,min} = 2$, когда AB – диаметр.

Пусть ~~DM = CM – перп.~~ DM, CM – перп. из т. D, C к пл-ти ω



$DA^2 = DB^2$. $\left.\begin{array}{l} DA^2 = DM^2 + AM^2 \\ DB^2 = DM^2 + MB^2 \end{array}\right\}$ по т. Пифагора

$DM \perp \omega \Rightarrow DM \perp MA, MB$ (св-во перп. к плоскости)

$AM^2 = MB^2 \Rightarrow AM = MB$

ΔAMB – р/б $\Rightarrow$ медиана = высота (по св-ву р/б Δ-а) MO

$AO = OB = 2 = OM$ По т. Пифагора: ΔAOM: $AM^2 = AO^2 + OM^2 = 4 + 4 = 8$

$AD^2 = 8 + MD^2$ $MD = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$ и $MC = \sqrt{CA^2 - AM^2} = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

т. C и D могут находиться по разные стороны пл-ти окр. $\Rightarrow$ либо $CD = MD + MC = \sqrt{28} + \sqrt{17}$, либо $CD = |MD - MC| = |\sqrt{28} - \sqrt{17}| = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

Ответ: $CD = \sqrt{28} - \sqrt{17}$; или $CD = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

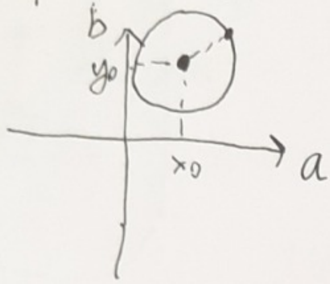
Чистовик стр. 3. (продолжение на стр. 4)

Вариант 21 Задача 3

~~Дано~~:

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2 \le 20.$

Графически: для каких-то x_0, y_0.



должны существовать a и b в круге с центром в т. $(x_0;y_0)$ и радиусом $\sqrt{20}$

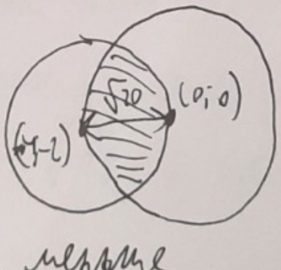
$a^2+b^2 \le \min(8a-4b;20) \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$, т.к. если a^2+b^2 больше какого-либо из чисел $(8a-4b;20)$, но меньше второго, то оно будет больше меньшего, что невозможно

$a^2+b^2 \le 20 \Rightarrow$ решения a и b лежат в круге с радиусом 20 с центром в т. $(0;0)$

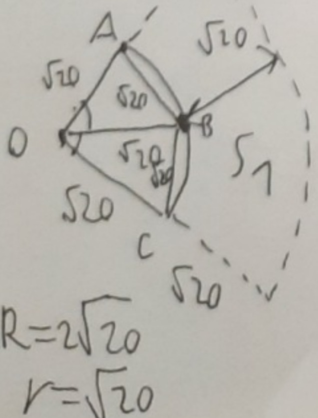
$a^2+b^2 \le 8a-4b$ $\quad a^2-8a+b^2+4b \le 0$ $\quad a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$ $\quad (a^2-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~a и b лежат~~ $(a;b)$ лежат в круге радиусом $\sqrt{20}$ с ц. в т. $(4;-2)$

$\rho((4;-2);(0;0)) = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$



площадь M – площадь фигуры из всех точек, расстояние от которых до заштри- ~~фигуры~~ хованной области – $\sqrt{20}$ или меньше.

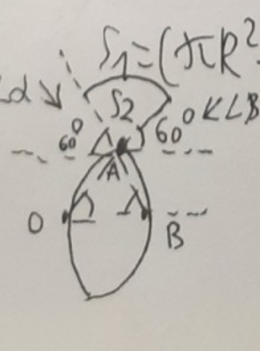


$R = 2\sqrt{20}$

$r = \sqrt{20}$

$\triangle OAB, \triangle OBC$ – р/б (по 3 сторонам) $\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = 60°$

$S_1 = (\pi R^2 - \pi r^2) \cdot \frac{120°}{360°} = \frac{\pi}{3} \cdot (20 \cdot 4 - 20) = 20\pi$



$S_2 = \pi r^2 \cdot \frac{(180°-60°-60°)}{360°} = \pi \cdot 20 \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{6}\pi$

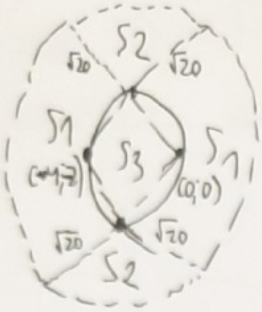
$\angle\alpha = \angle ABO = 60°$ (соответствующие

$\angle\beta = \angle AOB = 60°$ при прямой, $\parallel$ OB

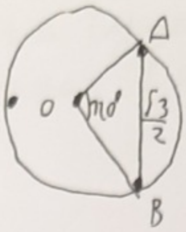
21100646 (U68984 M1304076)

Чистовик стр. 4.

Задача 3 сначала на стр. 3.



$S_M = 2S_1 + 2S_2 + S_3 = 40\pi + \frac{40}{6}\pi + S_3$



$\frac{S_3}{2} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - S_{OAB} =$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot 20 - S_{OAB} = \frac{20}{3}\pi - \frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}\cdot\sin 120}{2} = \frac{20}{3}\pi - \cancel{4}.5\sqrt{3}$

$S_3 = \frac{40}{3}\pi - 10\sqrt{3}$

$S_M = 40\pi + \frac{40}{6}\pi + \frac{40}{3}\pi - 10\sqrt{3} = 40\pi + \frac{60}{3}\pi - 10\sqrt{3} = 60\pi - 10\sqrt{3}$

Ответ: $S_M = 60\pi - 10\sqrt{3}$

Черновик

$S = 7a_1 + \dots + 6d = 7a_1 + 21d$

$r \quad \frac{\pi R^2}{6} \quad \frac{r^2}{4}$

$(a_1+7d)(a_1+16d) \qquad a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

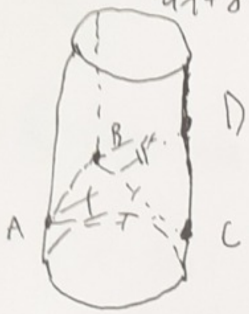
$(a_1+10d)(a_1+13d) \qquad 7a_1 + 21d + 60 > a_1^2 + 23a_1d + 130d^2$

$112d^2 + 33 > 130d^2 \qquad 33 > 18d^2 \qquad d = 1 \qquad \frac{\sin 60 \cdot r^2}{2}$

$(a_1+7)(a_1+16) > 7a_1 + 21 + 27 = 7a_1 + 48$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48 \qquad a^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$7a_1 + 81 > a_1^2 + 23a + 130 \qquad (a+8)^2 > 0$



15 15
30

$a_1^2 + 16a + 49 < 0$

$6{,}67\pi$

$D = 256 - 196 = 60$

$3 \quad 70\pi \quad -11$

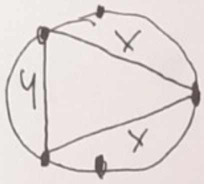
$21r \quad 8{,}85$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{15}$

$7 < 48$

$\frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2}$

3,4

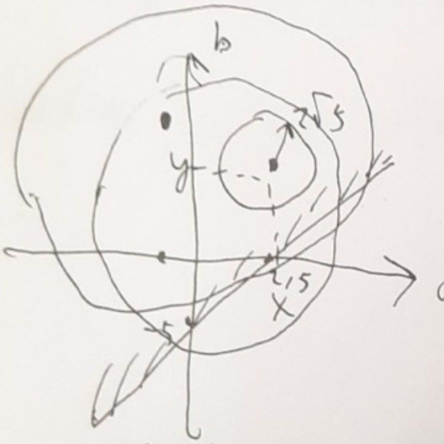


h_1

$-8 \pm \sqrt{15}$

$-12 < -4$

$R = 2$



$x, y \qquad b \geq -2 \qquad \sqrt{8+x^2} = 5$

$16+4 \qquad \sqrt{8+y^2} = 6 \quad 36$

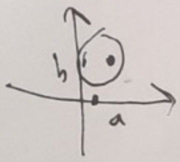
$\sqrt{17} + \sqrt{28} \qquad x^2 = 17$

$\sqrt{28} - \sqrt{7} \qquad y^2 = 28$

$\sqrt{17} \quad \sqrt{28}$

$b^2 + 4b + 4 + a^2 - 8a + 16 \leq 20$

$(b+2)^2 + (a-4)^2 \leq -20$



$D = 64 - 16b - 4b^2$

$b^2 + 4b - 8a + a^2 \leq 0 \qquad 8a - 4b$

$a^2 + b^2 \leq 8a - 4b \leq 20$

$D = 16 + 32a - 4a^2 \qquad b = -2 \pm \sqrt{4 + 8a - a^2}$

$8a - 4b \leq 20$

$a = 8 + 2\sqrt{16 - 4b - b^2} \qquad a^2 + b^2 + 4b - 8a \leq 0 \qquad a^2 - 8a + b^2$

$2a - b \leq 5$

$b \geq 2a - 5$

$a = 4 + 2 \qquad a^2 - 8a + b^2 + 4b \leq 0 \qquad 8a - a^2 - 4b - b^2 \geq 0$

21100646 (U68984 M1304076)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100646**

ID профиля: **68984**

Вариант 21

Чистовик стр. 1

Задача 4. Вариант 21.

~~а=~~ ~~87~~ У чисел a, b, c нет простых делителей, кроме 5 и 7, т.к. НОК(a;b;c) ⋮ a;b;c, НОК не делится на простые числа, кроме 5; 7

$a = 5^{a_i}\cdot 7^{a_j}$ $b = 5^{b_i}\cdot 7^{b_j}$ $c = 5^{c_i}\cdot 7^{c_j}$

$\max(a_i;b_i;c_i) = 18$, т.к. НОК$(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16}$

если бы $\max(a_i;b_i;c_i) = x < 18$, то НОК$(a;b;c) = 5^{x}\cdot 7^{16}$

аналогично $\max(a_j;b_j;c_j) = 16$.

НОД$(a_i;b_i;c_i) = 5\cdot 7 \Rightarrow \min(a_i;b_i;c_i) = 1$, $\min(a_j;b_j;c_j) = 1$,

меньше быть не может, если все степени были бы больше 1, то НОД был бы больше 35

~~а=~~ 4

a		b		c	
5	7	5	7	5	7
⊔	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔

множители:

$5^{18}; 5; 5^{m}$ $\quad 7^{16}; 7; 7^{n}$

$1 \le m \le 18$ $\quad 1 \le n \le 16$

$m \in \mathbb{Z}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

Если $1<m<18$ $1<n<16$, вариантов:

$$\underbrace{3!\cdot 16}_{\text{расставить 5 и выбрать}}\cdot \underbrace{3!\cdot 14}_{\text{расставить 7 и выбрать}}$$

Если $m=\{1;18\}$ $1<n<16$:

$$\underbrace{3\cdot 2}_{\text{выбрать и расставить 5}}\cdot \underbrace{3!\cdot 14}_{\text{выбрать и расставить 7}}$$

Если $1<m<18$ $n=\{1;16\}$

$3!\cdot 16 + 3\cdot 2$

Если $m=\{1;18\}$; $n=\{1;16\}$: $3!\cdot 3!$

Всего: $3!\cdot 3!(14\cdot 16+16+14+1) = 36(255) = 510\cdot 18 = 9180$

Ответ: 9180.

21100646 (U68984 M1304077)

Чистовик стр.2

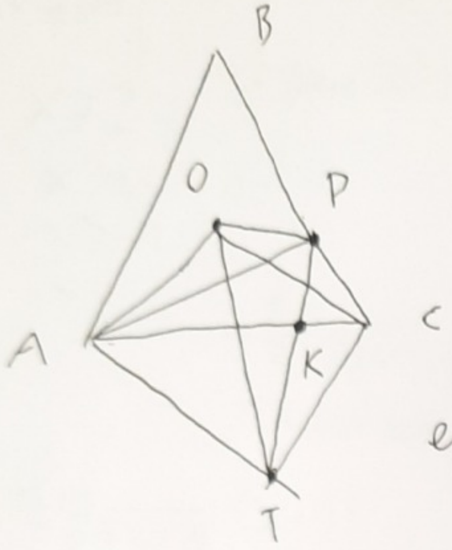
Задача 5 Вариант 21

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3\neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1,5 \\ x\neq 2 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1,5 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$$2\log_{2x-3} x+1;\quad 2\log_{2x^2-3x+5} 2x-3;\quad \log_{x+1} 2x^2-3x+5$$

Чистовик стр.3

Задача 6 Вариант 21.



1) $AT \perp \omega \Rightarrow \angle OAT = 90^\circ$ (по св-ву касатель-ной)

$CT \perp \omega \Rightarrow \angle OCT = 90^\circ$

2) $\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow OACT$ – вписанный четырехугольник (по теореме об опис. окр.)

3) Через т. $A; O; C$ можно провести единственную окружность $\Rightarrow$ точки $A; O; C; P; T$ лежат на одной окружности. (ω_1)

~~Т.к. ∠ОТК~~ $\angle OCT = 90^\circ \Rightarrow OT$ – диаметр $\omega_1 \Rightarrow \angle OPT = 90^\circ$

$$\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$$

$OA = OC \Rightarrow \triangle AOC$ – р/б $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$

$\angle CAT = 90^\circ - \angle OAC = 90^\circ - \angle OCA = \angle ACT \Rightarrow \triangle ATC$ – р/б

Черновик.

$2x^2$

$4x^2-6x+9$

$2x^2 \cancel{\log} x+4$ $\quad 5\cdot 7\cdot x \quad 5^{\cdot 18} \quad 5^{18} \quad 5 \quad 5$

$x=2\log_a b \quad x=2\log_c a$

$2x^2-4x+4 \quad x-1=\log_{bc}$

$16-$

$x\neq 2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)+\frac{7^{18}}{8}=\frac{1}{7^{16}\log_{x+1}\sqrt{2x-3}} \quad \frac{1}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}=\log_{2x-3}x+1$

$x>1{,}5$

$x>-1$

$x\neq 0$

$1=$

$1=\log_{2x-3}\cdot\log_{2x-3}x$

$5^{18} \quad 7^{16} \quad 7 \quad 7^2 \quad 7^3$

$5^{18}7^{16} \quad 5\,7 \quad 5^{7-18} \quad 7^{1-16}$

$2\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$7 \quad 5 \quad 5^{18}$

$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

2

16

$5^{18} \quad 5^{16} \quad 5^{18}7^{16} \quad 5\cdot 7.$

$2\cdot 14$

$9\cdot 4$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \quad x+\frac{1}{x}=2\log_a(bc)14$

$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$

$160 \quad 6$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+3)$

$x-1+\frac{1}{x}=\log_b(ac)$

$\begin{cases} 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 14\cdot 16 \\ 3\cdot 3\cdot 2\cdot 14\cdot 2 \\ 3\cdot 3\cdot 2\cdot 16\cdot 2 \\ 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2 \end{cases}$

140

$36($

$a \quad a \quad a-1$

$16\cdot 14+224$

$x\neq 1{,}5$

$a+\frac{1}{a}=$

$36(255)$

$5\,100$

$x>1{,}5$

$a+\frac{1}{a-1}=$ $a-1+\frac{1}{a}=\log_{x+1}(\sqrt{2x-3})(2x^2-3x+5)$

$510\cdot 18 \quad 9180$

$2x^2-3x+5>0:$

$D=9-$

$2x^2-3x+4\neq 0$

$x_B=\frac{3}{4}$

$9-$

$\frac{9}{16} \quad \frac{9}{8}-\frac{9}{4}+5$

$x>1{,}5$

$x\neq 2$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\frac{1}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}}$

$a^{\log}$ $\sqrt{2x-3}^{\log}=x+1$

$\log_2 4=2=\frac{1}{\log_4 2}$

$a^x=b \quad x+1^{\frac{1}{\log}}$

$1=\log_{x+1}($

$1=\log_{x+1}(\sqrt{2x-3}(2x^2-3x+5)$

$x+1=\sqrt{2x-3}(2x^2-3x+5)$

21100646 (U68984 M1304077)

Черновик.

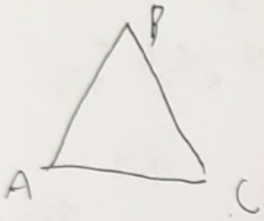
$2\log_a b$ $\quad 2\log_c a$ $\quad \log_b c$

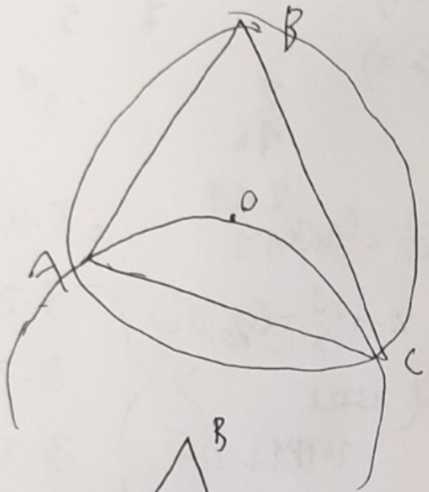
$2\log_a b$ $\quad \log_a b = \log_c a$ $\quad \log_a b = \frac{1}{\log_a c}$

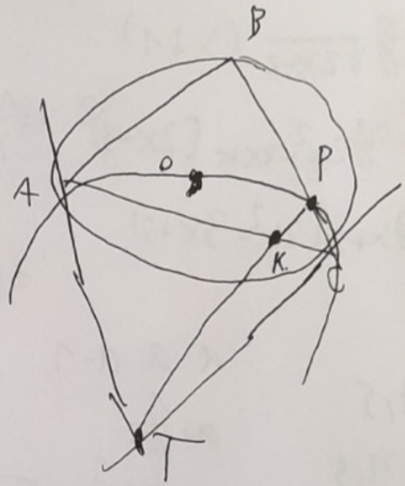
$\log_3 9 = \frac{1}{\log_9 3}$ $\quad 2\log_c a = \log_b c + 1$

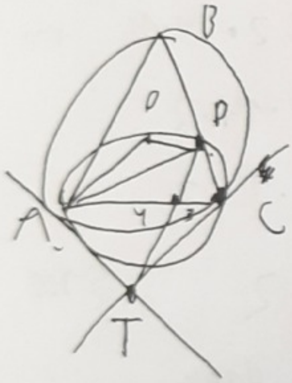
$2\log_a b = \log_b c + 1$

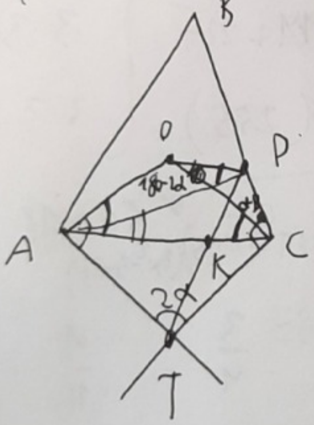
$\log_b c + 1$







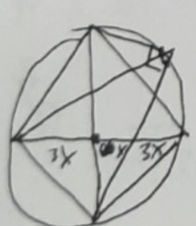


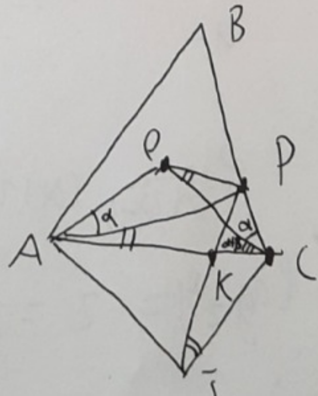


$\alpha - \beta$

$2\alpha - \beta$

$AC \cdot h$





$2S = \sin_{\alpha+\beta} CP \cdot CK$

$\sin_\beta \cdot AP \cdot AK = 24.$

$7x \cdot h$

21100646 (U68984 M1304077)