Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100639**

ID профиля: **342845**

Вариант 21

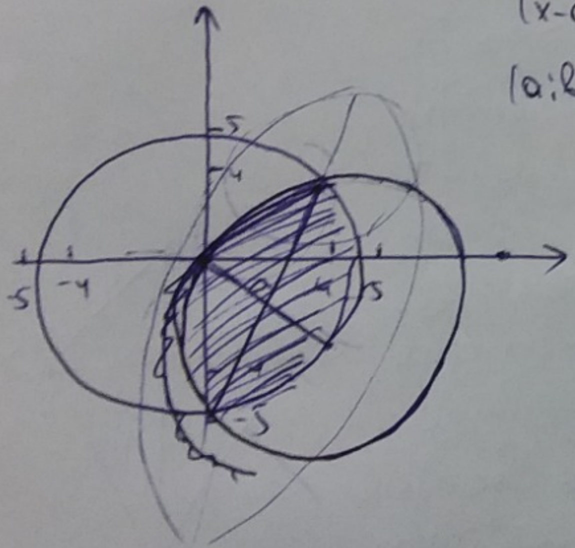
Чистовик, №3, 3-й лист.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

рассмотрим $a^2+b^2\le 8a-4b \Rightarrow a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20 \Rightarrow (a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

$$\begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

$a^2+b^2\le 20$ означает, что точка с координатами $(a;b)$ находится внутри окружности с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{20}$, а $(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$ означает, что точка с координатами $(a;b)$ находится внутри окружности с центром в $(4;-2)$ и радиусом $\sqrt{20}$, а



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$ означает, что расстояние между точками $(a;b)$ и $(x;y)$ меньше либо равно $\sqrt{20}$. Значит ответом на задачу будет площадь закрашенной части, умноженная на $(\sqrt{20}/(\text{расстояние между точками пересечения окружностей}))^2$

Площадь закрашенной части можно найти, используя формулы для нахождения площади сектора и треугольника.

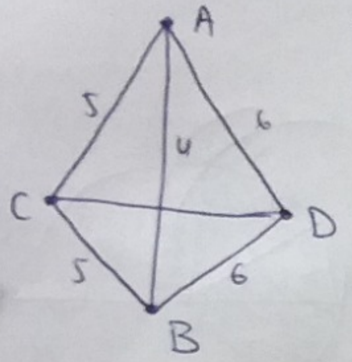
Эта площадь будет равна $\frac{40\pi}{3}-10\sqrt{3}$, умножив на это получим $\frac{80\pi}{9}-\frac{20}{\sqrt{3}}$ Ответ: $\frac{80\pi}{9}-\frac{20}{\sqrt{3}}$

числа целые, то ...

$S = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7(a_1 + 3d) = 7a_1 + 21d$

$\ldots 12 \; a^2 + 72a_1d + 112d^2$

Чистовик, №2, 2-й лист.



Дано, что $AB = 4$, $AC = BC = 5$, $AD = BD = 6$ и $CD \parallel$ оси цилиндра, в который вписан тетраэдр $ABCD$. Можно заметить, что $\triangle ACD = \triangle BCD$, следовательно основание перпендикуляров из A и B на CD совпадают. Пусть это точка H, то плоскость AHB перпендикулярна CD, а CD параллельна оси цилиндра, значит CD перпендикулярна основанию цилиндра, а плоскость APB паралельна основанию цилиндра. Следовательно радиус описанной окружности $\triangle HAB$ равен радиусу окружности в основании цилиндра. Пусть этот радиус равен r, то $2r \geq AB \Rightarrow 2r \geq 4 \Rightarrow r \geq 2$. Т.к. r – наименьший, то $r = 2$, значит AB – диаметр описанной окружности $\triangle ABH$, т.е. $\angle AHB = 90°$, и $\triangle ABH$ – равнобедренный прямоугольный треугольник, следовательно $AH = BH = 2\sqrt{2}$, а $CH = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

$HD = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$

$CD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{17} + 2\sqrt{7}}$

21100639 (U342845 M1297549)

Чистовик, N1, 1-й лист

Пусть d - разность ариф. прогрессии, a_1 – её первый член, тогда; т.к. она возрастающая, то $d>0$, и т.к. числа целые, то $a_i \in \mathbb{Z}$. Тогда: $a_7=a_1+6d$, $a_8=a_1+7d$, $a_{17}=a_1+16d$, $a_{11}=a_1+10d$, $a_{14}=a_1+13d$, т.е.

$$S=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=7(a_1+3d)=7a_1+21d$$

$$a_8a_{17}=(a_1+7d)(a_1+16d)=a_1^2+16a_1d+7a_1d+112d^2=a_1^2+23a_1d+112d^2$$

$$a_{11}a_{14}=(a_1+10d)(a_1+13d)=a_1^2+13a_1d+10a_1d+130d^2=a_1^2+23a_1d+130d^2$$

$$a_8a_{17}>S+27 \Rightarrow a_1^2+23a_1d+112d^2>7a_1+21d+27$$

$$a_{11}a_{14}<S+60 \Rightarrow a_1^2+23a_1d+130d^2<7a_1+21d+60$$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2>7a_1+21d+27 \\ 7a_1+21d+60>a_1^2+23a_1d+130d^2 \end{cases} \Rightarrow \cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+112d^2+\cancel{7a_1}+\cancel{21d}+60>\cancel{7a_1}+\cancel{21d}+27+\cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+130d^2$$

$$112d^2+60>130d^2+27$$

$$18d^2<33$$

$$d^2<\frac{33}{18}=\frac{11}{6}$$

$-\sqrt{\frac{11}{6}}<d<\sqrt{\frac{11}{6}}$, но т.к. $d>0 \Rightarrow 0<d<\sqrt{\frac{11}{6}}$. т.к. все числа $\in \mathbb{Z}$, то и $d\in\mathbb{Z}$, значит $d=1$

$\boxed{\text{Ответ: } \{-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5\}}$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112>7a_1+21+27 \\ 7a_1+21+60>a_1^2+23a_1+130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+8)^2>0 \rightarrow a_1\in\mathbb{Z} \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$$

$D=256-196=60$

$a_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{60}}{2}=\frac{-16\pm2\sqrt{15}}{2}=-8\pm\sqrt{15}$

$(a_1+8+\sqrt{15})(a_1+8-\sqrt{15})<0$

$(a_1+8+\sqrt{15})(a_1+8-\sqrt{15})<0$

$a_1\in(-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15})$, но т.к. $a_1\in\mathbb{Z}$ то $a_1=\{-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100639**

ID профиля: **342845**

Вариант 21

Чистовик, №4, 1-й лист.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=35 \\ НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$, т.е. $5^{18}\cdot 7^{16} \vdots a,b,c \Rightarrow a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}, b=5^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}, c=5^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$, где $1\le \alpha_1,\beta_1,\gamma_1\le 18$, $1\le\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\le 16$

т.к. $НОД(a,b,c)=35=5\cdot 7 \Rightarrow \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$, $\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1$

т.к $НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=18$, $\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=16$

и т.е. кол-во способов для

$$\begin{cases} 1\le\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\le 18 \\ \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1 \\ \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=18 \end{cases}$$, т.е. выбираем 2 из них для max и min, а 3-е будет ≥ 1 из $\le 18 \Rightarrow 2\cdot C_3^2\cdot 18$ и отнимаем 6, т.к. случаи 1,1,18 и 1,18,18 считаем дважды. Итого $6\cdot 18-6=102$ случая

аналогично для

$$\begin{cases} 1\le\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\le 16 \\ \min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1 \\ \max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=16 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ всего $2\cdot C_3^2\cdot 16-6=90$ случаев

Всего кол-во троек будет равно $90\cdot 102=9180$

$\boxed{\text{Ответ: } 9180}$

$S_{\triangle CPK} = 9$

AK AP BP

B

Чистовик, №5, 1-й лист

Даны числа $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \frac{1}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\log_{x+1}(2x-3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{x+1}(2x-3)} = \frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)}$$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = \frac{2\log_{(x+1)}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}$$

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$$\frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)} = \frac{2\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}$$

$$\log^2_{x+1}(2x-3) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) + 1 = \frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)}$$

$$\log^2_{x+1}(2x-3) + 1 = \frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)}$$

$$\log_{x+1}(2x-3) = a$$

$$a^2 + 1 = \frac{2}{a}$$

$$a^3 + a = 2$$

$$a^3 + a - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} a^3 + a - 2 & a - 1 \\ \hline -(a^3 - a^2) & a^2 + a + 2 \\ a^2 + a - 2 & \\ -(a^2 - a) & \\ 2a - 2 & \\ -(2a - 2) & \\ 0 & \end{array}$$

$$(a-1)(a^2+a+2) = 0$$

$\cancel{a=1}$

1) $a^2 + a + 2 = 0$

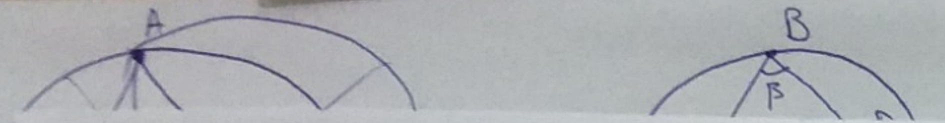
$D = 1 - 8 = -7 \Rightarrow$ нет корней

2) $a = 1$

$$\log_{(x+1)}(2x-3) = 1$$

$$2x - 3 = x + 1$$

$$\boxed{x = 4}$$



F

Чистовик, №5, 2-й лист

2) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\frac{2}{\log_{(x+1)}(2x-3)}=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{(x+1)}(2x-3)\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1=\frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)}$

$\frac{2\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}+1=\frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)}$

$\frac{2\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}=\frac{2-\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x-3)}$

$2\log^2_{x+1}(2x-3)=2\log_{x+1}(2x^2-3x+5)-\log_{x+1}(2x-3)\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log^2_{x+1}(2x-3)=2\log_{x+1}(2x^2-3x+5)-2$

$\log^2_{x+1}(2x-3)-\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=-1$

$\frac{4}{\log^2_{x+1}(2x^2-3x+5)}-\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=-1$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=a$

$\frac{4}{a^2}-a=-1$

$4-a^3=-a^2$

$a^3-a^2-4=0$ $\quad (a-2)(a^2+a+2)=0$

$a^3-a^2-4 \mid a-2$

$-\ a^3-2a^2 \mid a^2+a+2$

a^2-4

$-\ a^2-2a$

$2a-4$

$-\ 2a-4$

0

1) $a^2+a+2=0$

$D=1-8=-7 \Leftrightarrow$ Нет корней

2) $a-2=0$

$a=2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$2x^2-3x+5=x^2+2x+1$ $\quad x_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}$

$x^2-5x+4=0$ $\quad x_1=1$ н.к. $\quad \boxed{x_2=4}$

$D=25-16=9$

21100639 (U342845 M1297550)

Чистовик, №5, 3-й лист

3) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$$\frac{2\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)} = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$$\log^2_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2\log_{x+1}(2x-3)$$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) + 1 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$$\frac{2}{\log_{x+1}(2x-3)} + 1 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

Как мы могли заметить, во всех 3-х возможных случаях мы всегда находим один и тот же x, равный 4. Следовательно при $x=4$ условие, данное в задаче выполняется.

$\boxed{\text{Ответ: } x=4}$

О.Д.З.
$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3 \neq 1 \\ x+1>0 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (1{,}5;2) \cup (2;+\infty)$$

$$2 + \log_{x+1}(2x-3) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)\log_{x+1}(2x-3)$$

$$2 + \frac{\log^2_{x+1}(2x^2-3x+5)}{2} = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) \cdot \frac{\log^2_{x+1}(2x^2-3x+5)}{2}$$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = a$

$2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2}$

$a^3 - a - 4 = 0$

$(a-2)(a^2+a+2) = 0$

1) $a^2+a+2=0$

$D = 1-8 = -7 < 0$ нет корней

2) $a-2=0$

$a=2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2$

$(x+1)^2 = 2x^2-3x+5$

$x^2+2x+1 = 2x^2-3x+5$

$x^2-5x+4=0$

$D=9$ $\quad x_{1,2} = \frac{5\pm 3}{2}$

$\boxed{x_1 = 4}$

$x_2 = 1$ н.к.