Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100531**

ID профиля: **372834**

Вариант 21

Чистовик Вариант 21

Зад 1 (стр 1)

Дано

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$

$a_i \in Z$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

возраст. прогрессия

---

a_1?

Пусть d – разность прогрессии

1) $a_8 = a_1 + 7d$; $a_{17} = a_1 + 16d$;

$a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{14} = a_1 + 13d$

2) $S = \frac{(a_1 + a_7)}{2} \cdot 7 = \frac{(a_1 + a_1 + 6d)}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7 =$

$= 7a_1 + 21d$

3) $\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > S + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < S + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ 7a_1 + 21d + 60 > a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 \end{cases}$ +

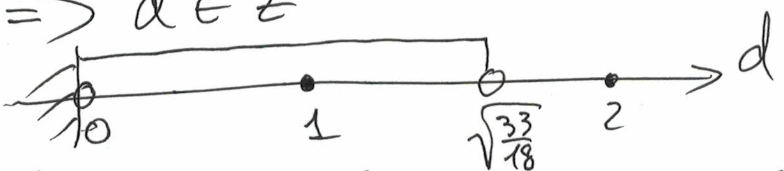
$\cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 60 > \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 27 + \cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 130d^2$

$60 - 27 > (130 - 112)d^2$

$33 > 18d^2$ $d^2 < \frac{33}{18}$

$|d| < \sqrt{\frac{33}{18}}$; прогрессия – возраст. $\Rightarrow d > 0$

$a_i \in Z \Rightarrow d \in Z$



$\Rightarrow d = 1$

4) Подставим $d = 1$ в исходные неравенства

$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 \leq 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 8)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -8 \\ a_1 + 16a_1 + 49 \leq 0 \ (*) \end{cases}$

(*) $\frac{D}{4} = 64 - 49 = 15$

$a_1 \in (-8 - \sqrt{15}; -8 + \sqrt{15})$

Зад 1 (стр 2) Чистовик Вариант 21

$-8-\sqrt{15} \overset{>}{\vee} -12$

$-\sqrt{15} \overset{>}{\vee} -4$

$\sqrt{15} \overset{<}{\wedge} 4$

$-8+\sqrt{15} \overset{>}{\vee} -5$

$\sqrt{15} \overset{>}{\vee} 3$

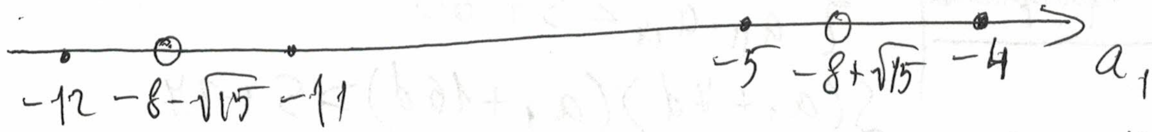
$-8-\sqrt{15} \overset{<}{\vee} -11$

$-\sqrt{15} \overset{<}{\vee} -3$

$\sqrt{15} \overset{>}{\wedge} 3$

$-8+\sqrt{15} \overset{<}{\vee} -4$

$\sqrt{15} \overset{<}{\vee} 4$



$a_1 \in Z \Rightarrow a_1 = -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5$

из второго неравенства $a_1 \neq -8$

$a_1 = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$

Чистовик   Вариант 21

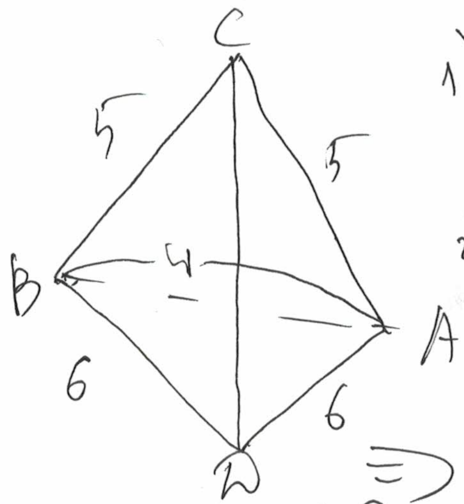
Зад 2 (стр 1)

$AB=4$

$AC=CB=5$

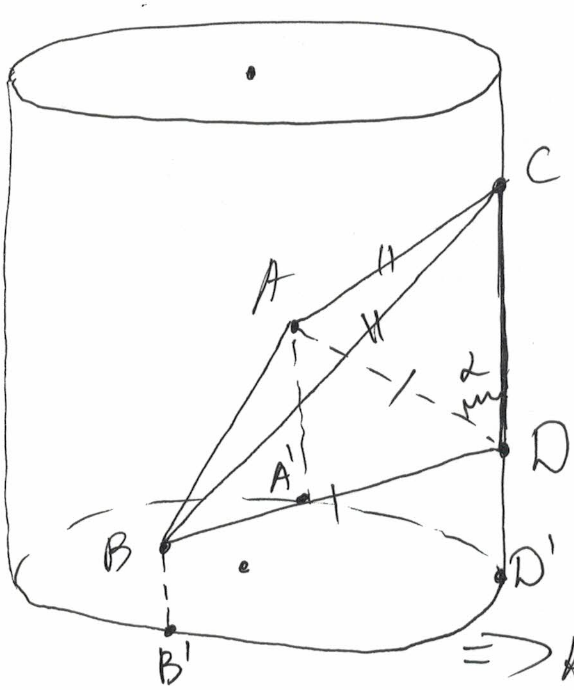
$AD=DB=6$

$R_{min} \Rightarrow CD?$



1) $\triangle DAC = \triangle DBC$ по 3 сторонам $\Rightarrow \angle CDA = \angle CDB = \alpha$

2) $CD \parallel$ оси цилиндра по усл $\Rightarrow CD \perp$ пл-ти основания цилиндра $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ребра тетраэдра AD и BD наклонены к плоскости основания цилиндра под углом $90° - \alpha$



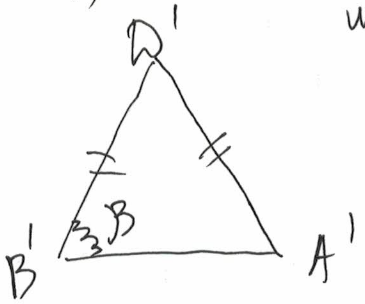
3) Пусть A', B', D' — проекции точек A, B и D на ~~[illegible]~~ плоскость основания цилиндра $\Rightarrow A'D' = B'D' = AD\cos(90° - \alpha) =$
$= AD \sin\alpha$

$AA', BB' \perp$ пл-ти основания

$AA' = BB' \Rightarrow AA'B'B$ – прям-к $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel$ плоскости основания

$A'B' = AB = 4$

4) Для $\triangle A'B'D'$ R — радиус описанной окр-ти из т. синусов $\Rightarrow R = \dfrac{A'D'}{2\sin B}$



$$\cos B = \frac{A'B'}{2B'D'} = \frac{2}{6\sin\alpha} = \frac{1}{3\sin\alpha}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{9\sin^2\alpha - 1}}{3\sin\alpha}$$

$$R = \frac{6\sin\alpha}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{9\sin^2\alpha - 1}}{3\sin\alpha}\right)} = \frac{9\sin^2\alpha}{\sqrt{9\sin^2\alpha - 1}}$$

$x = 9\sin^2\alpha$, $x \geq 1$; $x \leq 9$

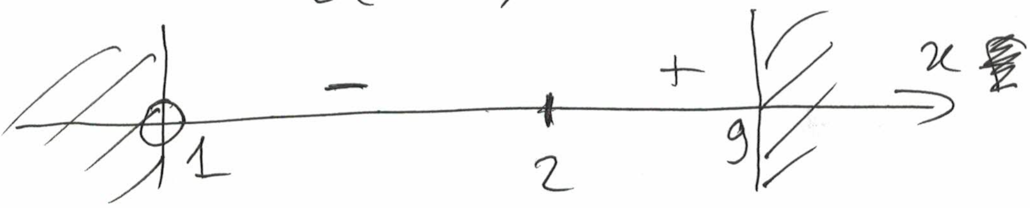
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$; $\quad f'(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}}{(x-1)} =$

$$= \frac{2(x-1) - x}{2(x-1)^{3/2}} = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}$$

Чистовик   Вариант 21

Зад 2 (стр 2)

4) $f'(x) = \dfrac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}$



2 — локальный минимум.

$\Rightarrow$ R_{min} при $x = 2$

$9\sin^2\alpha = 2$ $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

5) $\triangle ACD$, т. косинусов:

$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2AD\cdot CD\cdot\cos\alpha$

$CD^2 + 11 - 12\cdot CD\cdot\cos\alpha = 0$

а) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow CD^2 - 4\sqrt{7}CD + 11 = 0$

$\dfrac{D}{4} = 28 - 11 = 17$

$CD = 2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$

б) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow CD^2 + 4\sqrt{7}CD + 11 = 0$

$CD = -2\sqrt{7} \pm \sqrt{17} < 0 \Rightarrow CD \in \varnothing$

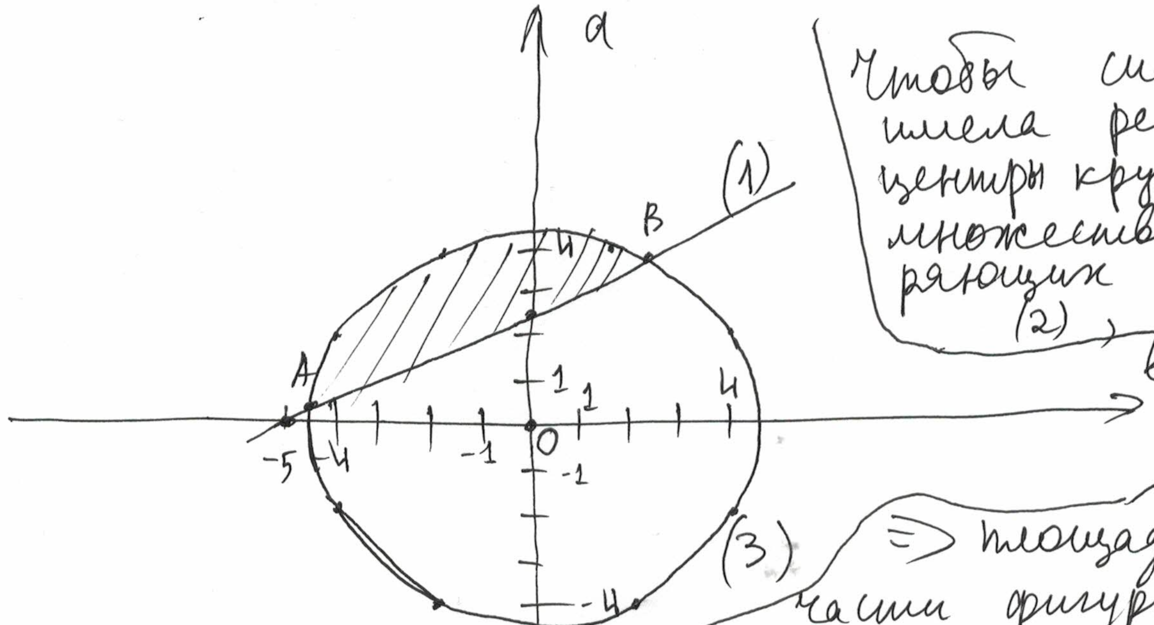
Ответ: $CD = 2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$

Зад 3 (стр 1) Чистовик Вариант 21

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,\ 20)\end{cases}\qquad S_M\ ?$$

I $\quad 8a-4b\ge 20$

$$\begin{cases}2a-b\ge 5 & (1)\\ (x-a)^2+(y-b)^2\le 20 & (2)\text{ — круги с центром } (x;y)\\ a^2+b^2\le 20 & (3)\end{cases}$$



Чтобы система имела решения, центры кругов из множества, удовлетворяющих неравенство (2), должны попадать в заштрихованную область $\Rightarrow$ площадь ~~фиг~~ той части фигуры M, которая подходит под условие I $8a-4b\ge 20$ равна площади, заштрихованной на графике $= S_I$

Найдём точки пересечения прямой ~~(2)~~ $2a=5+b$ и окружности $a^2+b^2=20$

$a^2+(2a-5)^2=20 \qquad 5a^2-20a+5=0 \qquad \cancel{(a-1)^2\ne}$

$a^2-4a+1=0$

$\frac{D}{4}=4-1=3\ ;\quad a=2\pm\sqrt{3}$

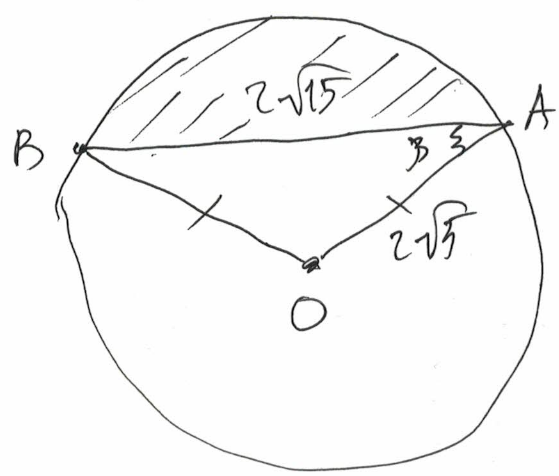
$\begin{cases}a_B=2+\sqrt{3}\\ b_B=2\sqrt{3}-1\end{cases}$ – координаты точки $B(b_B;a_B)$

$\begin{cases}a_A=2-\sqrt{3}\\ b_A=-2\sqrt{3}-1\end{cases}$ – координаты точки $A(b_A;a_A)$

Зад 3 (стр 2) Чистовик Вариант 21

$$AB=\sqrt{(a_B-a_A)^2+(b_B-b_A)^2}=\sqrt{(2+\sqrt3-2+\sqrt3)^2+(2\sqrt3-1+2\sqrt3+1)^2}=$$
$$=\sqrt{12+48}=2\sqrt{15}$$

Радиус окружности $a^2+b^2=20$ $R=2\sqrt5$

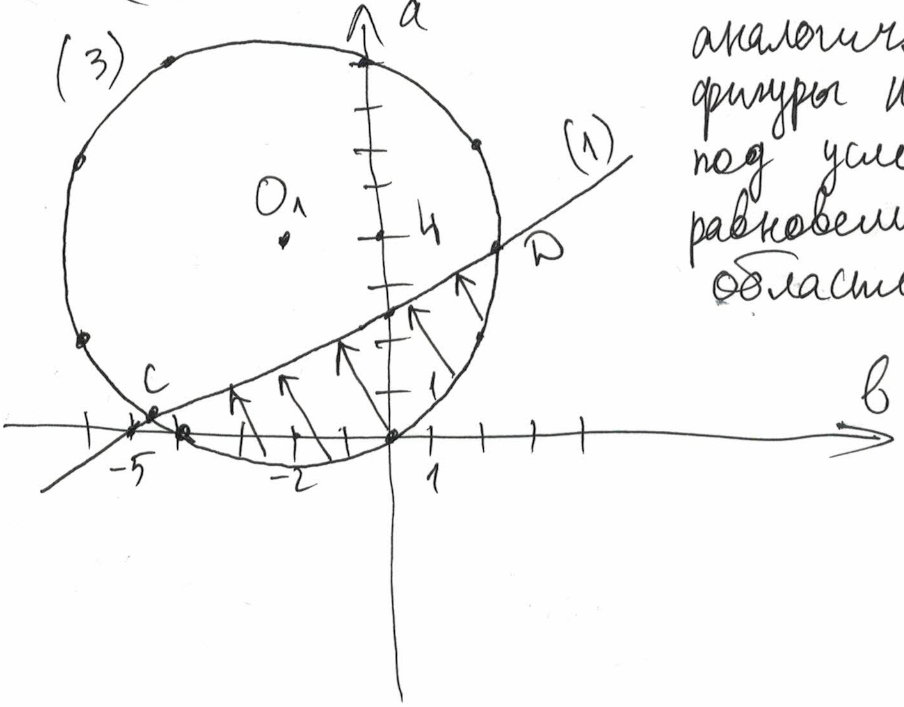


$$\cos\beta=\frac{AB}{2AO}=\frac{2\sqrt{15}}{4\sqrt5}=\frac{\sqrt3}{2}$$
$$\beta=30^\circ \Rightarrow \angle AOB=120^\circ$$
$$S_I=\pi R^2\cdot\frac{\angle AOB}{360^\circ}=\frac{\pi R^2}{3}=$$
$$=\frac{20\pi}{3}$$

II $8a-4b<20$

$$\begin{cases}2a-b<5\\(a-x)^2+(y-b)^2\le 20\\a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a-b<5 & (1)\\(a-x)^2+(b-y)^2\le 20 & (2)\\(a-4)^2+(b+2)^2\le 20 & (3)\end{cases}$$



аналогично п. I та часть фигуры III, которая подходит под условие II $8a-4b<20$ равновелика заштрихованной области

Зад 3 (стр 3) Чистовик Вариант 21

C, D - точки пересечения прямой $2a-b=5$ и окружности $(a-4)^2+(b+2)^2=20$

найдём их координаты:

$(a-4)^2+(2a-3)^2=20$

$a^2-8a+16+4a^2-12a+9=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0 \Rightarrow$ ~~точки C и D~~

$C\equiv A$; $D\equiv B$ (A,B из п. I)

$AB=2\sqrt{15}$ из п. I

окружности $(a-4)^2+(b+2)^2=20$ и $a^2+b^2=20$ имеют одинаковый радиус,

AB - общая хорда $\Rightarrow$ искомая площадь $S_{II}=S_I$

$S_m=S_I+S_{II}=\frac{40\pi}{3}$

Ответ: $\frac{40\pi}{3}$.

Черновик

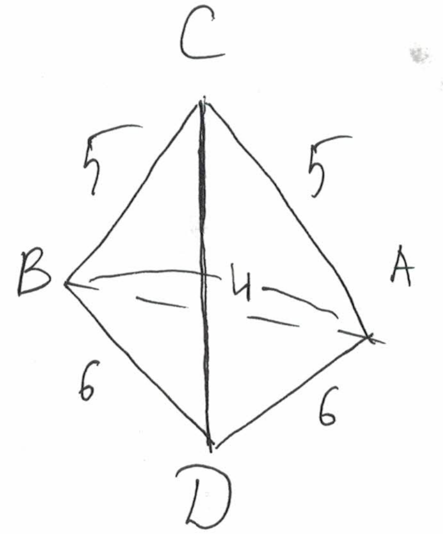
Зад 2

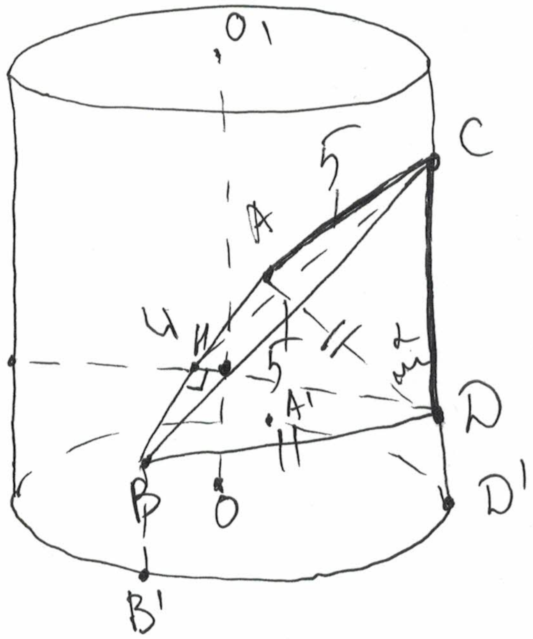
$AB = 4$

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 6$

CD ?





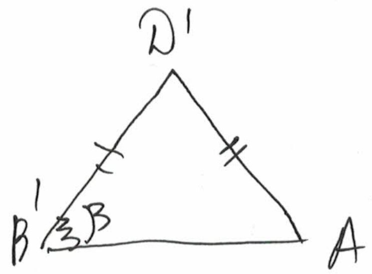
$DH = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

по т. о $3^x \perp$ ~~[illegible]~~

$A'D' = AD \sin\alpha = B'D' = 6\sin\alpha$

$A'B' = AB = 4$



$$R = \frac{A'D'}{2\sin\beta}$$

$$\cos\beta = \frac{A'B'}{2B'D'} = \frac{2}{6\sin\alpha} = \frac{1}{3\sin\alpha}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{9\sin^2\alpha - 1}}{3\sin\alpha}$$

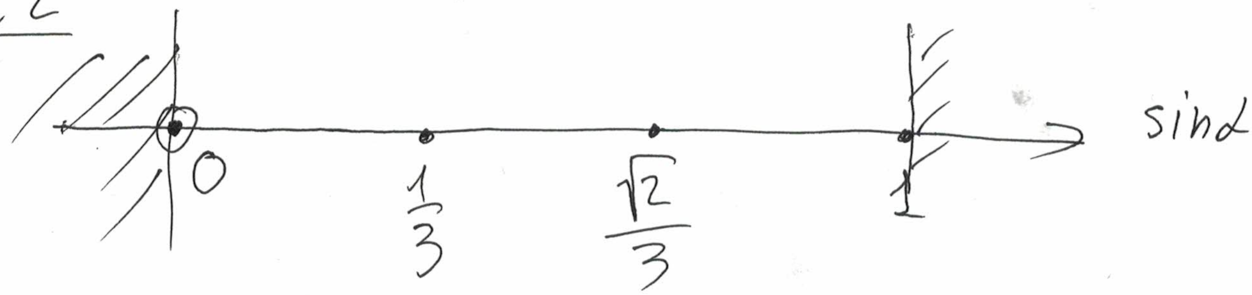
$$R = \frac{6\sin\alpha}{2\left(\frac{\sqrt{9\sin^2\alpha - 1}}{3\sin\alpha}\right)} = \frac{9\sin^2\alpha}{\sqrt{9\sin^2\alpha - 1}}$$

$$R'(\alpha) = \frac{18\sin\alpha \cdot \cos\alpha\sqrt{9\sin^2\alpha - 1} - \frac{18\sin\alpha\cos\alpha \cdot 9\sin^2\alpha}{2\sqrt{9\sin^2\alpha - 1}}}{9\sin^2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{\cancel{18}\,9\sin\alpha\cos\alpha}{\cancel{2}(9\sin^2\alpha - 1)^{3/2}}\left(2(9\sin^2\alpha - 1) - \cancel{18}\,9\sin^2\alpha\right) = \frac{9\sin\alpha\cos\alpha(9\sin^2\alpha - 2)}{(9\sin^2\alpha - 1)^{3/2}}$$

Черновик

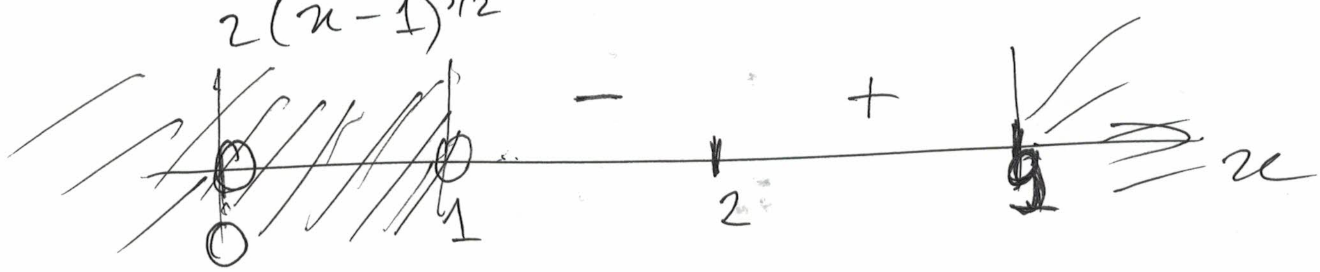
Зад 2



$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

$$F'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{2(x-1)-x}{2(x-1)^{3/2}} =$$

$$= \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}$$



$x = 2$ — min

$9\sin^2\alpha = 2$ $\quad$ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD\cdot CD\cdot\cos\alpha$

1) $25 = 36 + CD^2 - 12CD\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}$ $\quad$ $\left(\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$CD^2 - 4\sqrt{7}CD + 11 = 0$

$\frac{D}{4} = 28 - 11 = 17$

$CD = 2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$

2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$: $\quad$ $25 = 36 + CD^2 + 12CD\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}$

$CD = -2\sqrt{7} \pm \sqrt{17} \Rightarrow CD \in \varnothing$

Черновик

Зад 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20\\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

I $$\begin{cases} 8a-4b \ge 20 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$ $2a-b \ge 5$

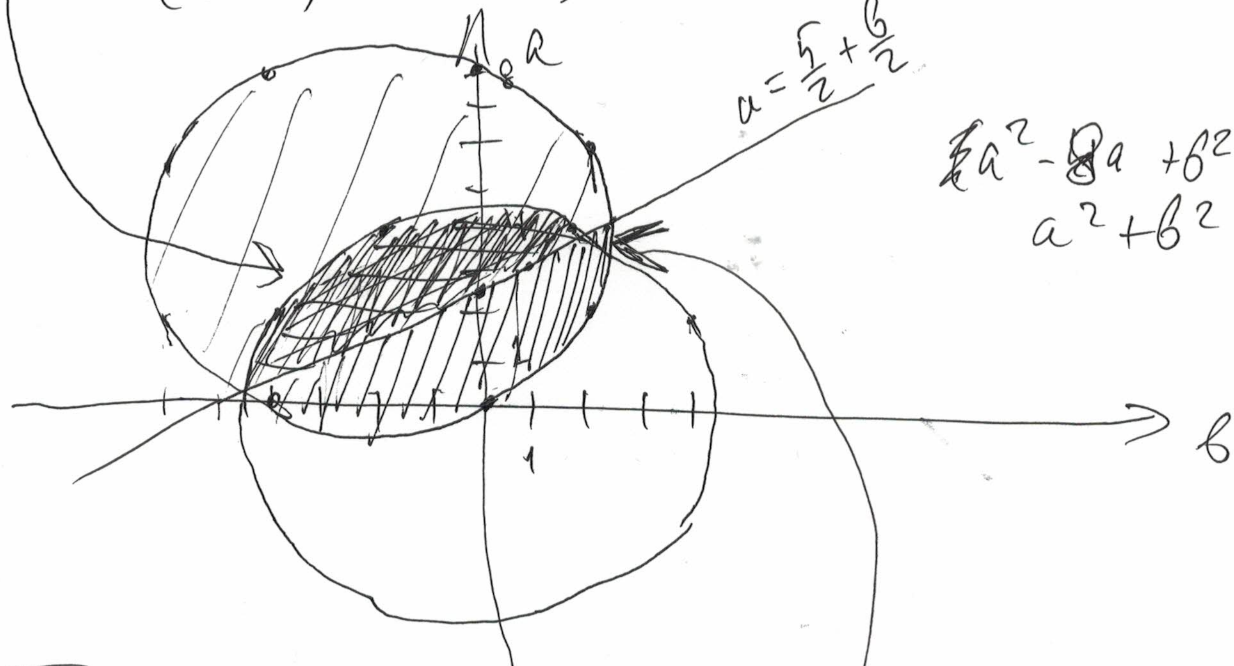
$2a \ge \frac{5}{2}+\frac{b}{2}$

$20 \le 8a-4b$

$a^2-8a+b^2+4b \le 0$

$(a-4)^2-16+(b+2)^2-4 \le 0$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$



$\cancel{a}^2-\cancel{8}a+b^2+4a \le \cancel{20}$

$a^2+b^2 \le 20$

II $$\begin{cases} 2a-b<5 \\ (a-x)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b \end{cases}$$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 = 20$

$a^2+b^2=20$

$-8a+4b+20=0$

$2a=b+5$

Зад 1 Черновик

$S - a_1 + \dots + a_7$

$a_i \in Z$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$a_8 = a_1 + 7d$; $a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{14} = a_1 + 13d$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > S + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < S + 60 \\ S = \frac{(a_1 + a_7)}{2} 7 = (a_1 + 3d)7 = 7a_1 + 21d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases} +$$

$7a_1 + 21d + 60 > a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 60 > \cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 130d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 27$

$18d^2 < 33$ $\quad d^2 < \frac{33}{18}$

$a_i \in Z \Rightarrow d \in Z$; возраст. прогр $\Rightarrow d > 0$

$0 < d \le \sqrt{\frac{33}{18}} < 2$ $\quad \sqrt{\frac{33}{18}} > 1$

$d = 1$

$\cancel{S = 7a_1 + 21d}$

$\cancel{a_1 = \frac{S}{7} - 3d}$

$112 - 48 = 64$

44

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1 + 8)^2 > 0$ при $\forall a$

$130 - 81 = 49$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$-8 + \sqrt{15} \stackrel{<}{\vee} -4$

$\sqrt{15} \stackrel{<}{\vee} 4$

$-8 + \sqrt{15} \stackrel{>}{\vee} -5$

$\sqrt{15} \stackrel{>}{\vee} 3$

$\frac{D}{4} = 64 - 49 = 15$

$a \in (-8 - \sqrt{15} ; -8 + \sqrt{15})$ $\quad a \in (-12 ; -4)$

$-8 - \sqrt{15} \stackrel{>}{\vee} -12$ $\quad -8 - \sqrt{15} \stackrel{<}{\vee} -11$

$-\sqrt{15} \stackrel{>}{\vee} -4$ $\quad -\sqrt{15} \stackrel{<}{\vee} -3$

$a = -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100531**

ID профиля: **372834**

Вариант 21

Зад 5 (стр 1) Чистовик Вариант 21

$$\left[\begin{aligned}&\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1+\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\\&\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1+\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\\&1+\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\end{aligned}\right.$$

$a=2x-3$; $b=x+1$; $c=2x^2-3x+5$

$$\left[\begin{aligned}&\log_{\sqrt{a}} b=\log_c a^2=1+\log_b c &(1)\\&\log_{\sqrt{a}} b=1+\log_c a^2=\log_b c &(2)\\&1+\log_{\sqrt{a}} b=\cancel{1+}\log_c a^2=\log_b c &(3)\end{aligned}\right.$$

$~~(1)\begin{cases}\frac{1}{2}\log_a b=2\log_c a\ (a)\\ 2\log_c a=1+\log_b c\ (б)\end{cases}~~$

~~(a) $\log_{2x^2-3x+5}$~~

$$(1)\begin{cases}\log_{\sqrt{a}} b=\log_c a^2\\ \log_c a^2=1+\log_b c\end{cases}\to 2\log_a b=2\log_c a$$

$$\begin{cases}a\neq 1;\ a>0\\ \log_c b=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-3>0 \longrightarrow x>\frac{3}{2}\\ 2x\neq 4 \longrightarrow x\neq 2\\ 2x^2-3x+5>0\\ 2x^2-3x+5\neq 1\end{cases}\Rightarrow 2x^2-3x+5\geq\frac{31}{8}\Rightarrow \text{при } \forall x$$

$$x>-1 \longrightarrow x>-1$$

$$x+1=2x^2-3x+5 \Rightarrow 2x^2-4x+4=0$$

$$(x-1)^2+1=0$$

$$x\in\varnothing$$

Зад 5 (стр 2) Чистовик Вариант 21

(2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{a}} b = 1 + \log_c a^2 \\ \log_{\sqrt{a}} b = \log_b c \end{cases} \Rightarrow 2\log_a b = \log_b c$

$\begin{cases} b > 0;\ b \neq 1 \\ \log_a c = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ 2x - 3 \neq 1 \\ 4x^2 - 12x + 9 = 2x^2 - 3x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ 2x^2 - 9x + 4 = 0 \end{cases}$

$D = 81 - 32 = 49$

$x = \frac{9 \pm 7}{4} = \left[\begin{array}{l} 4 \\ \frac{1}{2}\ \varnothing \end{array} \right.$

Подставим $x = 4$

$\log_{\sqrt{5}} 5 = 1 + \log_{25} 25 = \log_5 25$

подходит

(3) $\begin{cases} \log_b c = \log_c a^2 \\ 1 + \log_{\sqrt{a}} b = \log_c a^2 \end{cases} \Rightarrow 2\log_c a = \log_b c$

$\begin{cases} c > 0;\ c \neq 1 \\ \log_b c = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{b > 0}\ 2x^2 - 3x + 5 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 5 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ 2x - 3 > 0 \\ 4x^2 - 12x + 9 = x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x > \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 13x + 8 = 0 \end{cases}$

Зад 5 (стр 3) Чистовик Вариант 21

$$4x^2-13x+8=0$$

$$D=169-16\cdot 8=169-128=41$$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{41}}{8}$$

Зад 4 Чистовик Вариант 21

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a,b,c \in N$; кол-во троек $(a;b;c)$ n?

1) Пусть $a=5^{k_1}\cdot 7^{k_2}$; $b=5^{k_3}\cdot 7^{k_4}$; $c=5^{k_5}\cdot 7^{k_6}$

$k_i \in N$, т.к. из условия (1) $\Rightarrow$ числа a, b, c делятся на 5 и на 7. Числа a, b, c состоят только из степеней 5 и 7, т.к. их НОК состоит только из степеней 5 и 7.

2) $НОК(5^m;5^n) = 5^{\max(n;m)}$ $m;n \in N$

$НОД(5^m;5^n) = 5^{\min(m;n)}$

3) из п.2) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \min(5^{k_1};5^{k_3};5^{k_5})=5 \\ \min(7^{k_2};7^{k_4};7^{k_6})=7 \\ \max(5^{k_1};5^{k_3};5^{k_5})=5^{18} \\ \max(7^{k_2};7^{k_4};7^{k_6})=7^{16} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \min(k_1;k_3;k_5)=1 \\ \max(k_1;k_3;k_5)=18 \end{array}\right\} (1) \\ \left.\begin{array}{l} \min(k_2;k_4;k_6)=1 \\ \max(k_2;k_4;k_6)=16 \end{array}\right\} (2) \end{cases}$$

(1) Пусть $k_1=1$; $k_5=18 \Rightarrow k_3$ можно выбрать 18 способами. Т.к. мы зафиксировали позиции чисел, кол-во $n_{(1)}$ уменьшилось в 3! раз $\Rightarrow n_{(1)}=18\cdot 3!$

(2) аналогично п.(1) $n_{(2)}=16\cdot 3!$

$n=n_{(1)}\cdot n_{(2)}=18\cdot 16\cdot 6^2=288\cdot 36=10498$

Ответ: 10498 троек.

Зад 6 Чистовик Вариант 21

Дано

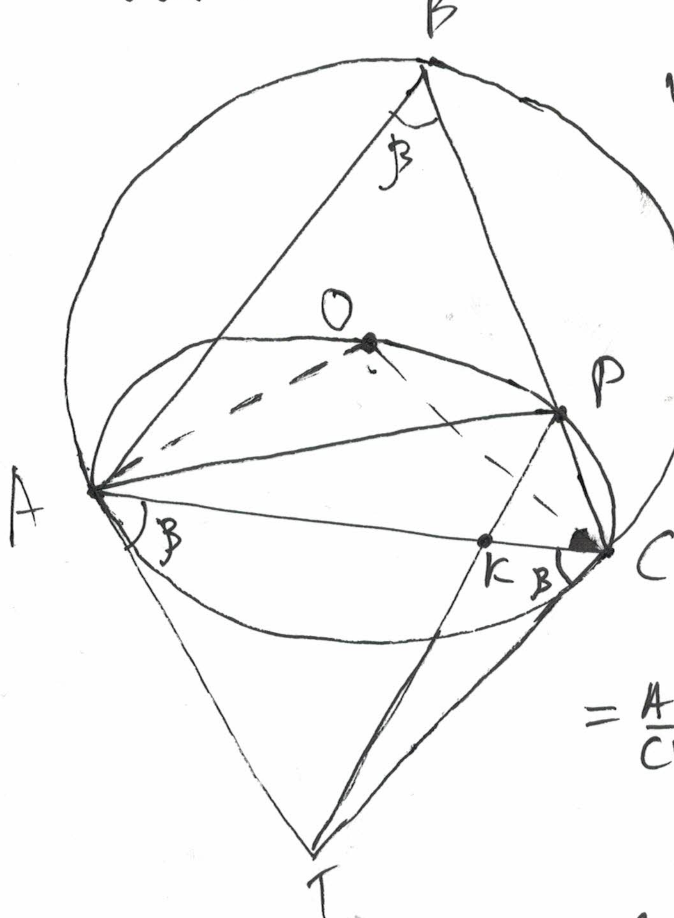
$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

1) S_{ABC}?

2) $\angle ABC = arctg\frac{3}{4}$

AC?



1) Пусть $\angle ABC = \beta$ $\Rightarrow$ по т. о вписанном угле и т. об угле между касательной и хордой $\angle ACT = \angle CAT = \beta$

2) $\frac{S_{APK}}{S_{KPK}} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot \rho(P;AC)}{\frac{1}{2}CK \cdot \rho(P;AC)} = \frac{AK}{CK} = \frac{4}{3}$

3) $OA \perp AT$; $OC \perp CT$ (радиусы в точку касания)

$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = 90° - \beta \Rightarrow \angle AOC = 2\beta$

4) $\angle AOC = \angle APC = 2\beta$ (по т. о вписанном угле)

~~5) $\angle ABC = arctg\frac{3}{7} \Rightarrow tg\beta = \frac{3}{7} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{\frac{1}{tg^2\beta+1}} =$~~

~~$= \sqrt{\frac{1}{\frac{9}{49}+1}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$~~

Зад 4 Черновик ~~Чистовик~~ Вариант 21

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=35 & (1) \\ \text{НОК}(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} & (2) \end{cases}$$

$a,b,c \in N$; кол-во троек $(a;b;c)$ n?

1) Пусть $a=5^{k_1}\cdot 7^{k_2}$; $b=5^{k_3}\cdot 7^{k_4}$; $c=5^{k_5}\cdot 7^{k_6}$

$k_i \in N$, т.к. из условия (1) $\Rightarrow$ все числа a,b,c делятся на 35.

~~2) из условие (2)~~ $\Rightarrow$ $\cancel{k_1+k_3+k_5}$

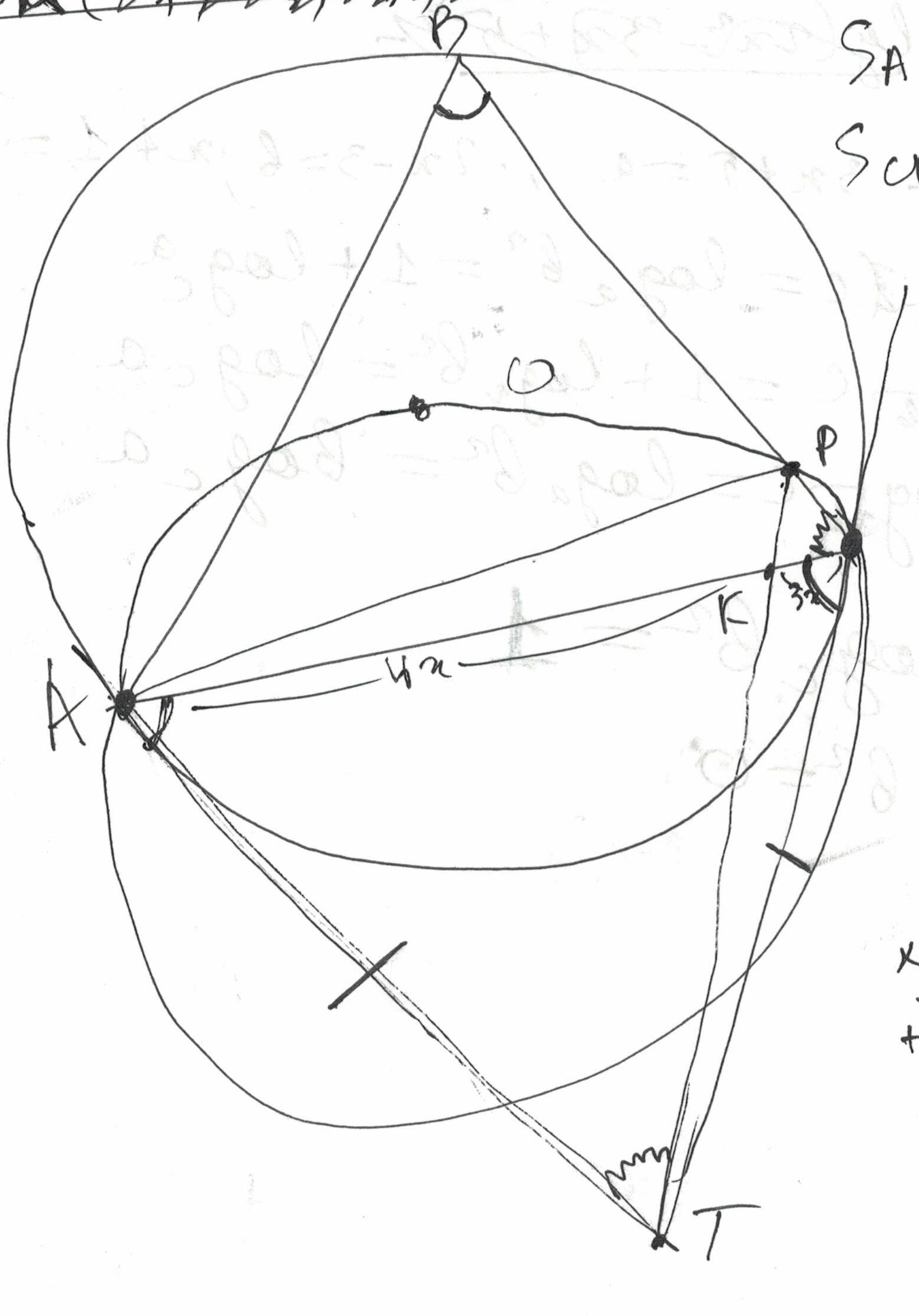
$\Rightarrow \cancel{\text{НОК}(k_1,k_3,k_5)=18}$

Зад 6

S_{ABC}?

$S_{APK}=12$

$S_{CPK}=9$



$$\begin{array}{r} 288 \\ \times\ 36 \\ \hline 1458 \\ +\ 864 \\ \hline 10498 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 16 \\ \hline 108 \\ +\ 18 \\ \hline 288 \end{array}$$

Черновик

$\cancel{2x^2-3x+9} \mid \cancel{2x-3}$

$\cancel{x}$

$2x^2-3x+5 = \cancel{2(x+1)(x-\frac{5}{2})}$

$\cancel{(2x-5)(x+1) = 2x^2-3x}$

$\cancel{D=9x}$

$2x^2-3x+5=0$

$D=9-80<0$

$\cancel{4x^2-12x+9}$

$x>-1$

$\cancel{\lg(2x^2-3x+5)}=$

$2x^2-3x+5=a$; $2x-3=b$; $x+1=c$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{b}} c = \log_a b^2 = 1+\log_c a \\ \log_{\sqrt{b}} c = 1+\log_a b^2 = \log_c a \\ 1+\log_{\sqrt{b}} c = \log_a b^2 = \log_c a \end{cases}$$

$\log_c b^2 = 1$

$b^2=0$

Зад 5 ~~Черновик~~ Чистовик Вариант 21

(1) (2) (3)
$$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1+\log_{x+1}(2x^2-3x+5) \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1+\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{x+1}(2x^2-3x+5) \\ 1+\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{x+1}(2x^2-3x+5) \end{array}\right.$$

x?

(1)
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1+\log_{x+1}(2x^2-3x+5) \end{cases}$$

$$\frac{2\lg(x+1)}{\lg(2x-3)}=\frac{\lg(2x-3)^2}{\lg(2x^2-3x+5)}$$

$$\begin{cases} \log_c\left(\frac{a^2}{c}\right)=\log_b c \end{cases}$$

$$\log_b\frac{a^2}{c}=1\to\frac{a^2}{c}=b$$

$$a^2=bc$$

$$4x^2-12x+9=2x^3-3x^2+5x+2x^2-3x+5$$

$$2x^3-5x^2+14x-4=0$$

~~$\log_c b=4 \quad b=c^4$~~

$$\frac{1}{2}\log_a b=1+\log_b c$$

$$\frac{1}{2}\log_a\frac{b}{a^2}=\log_b c$$

$$2\log_c a=1+\log_b c$$

$$2\log_c\frac{a}{\sqrt{c}}=\log_b c$$

$$\log_b\frac{a}{\sqrt{c}}=\frac{1}{2}$$

$$a^2=bc$$

Зад 6 Черновик ~~Чистовик~~ Вариант №1

Дано

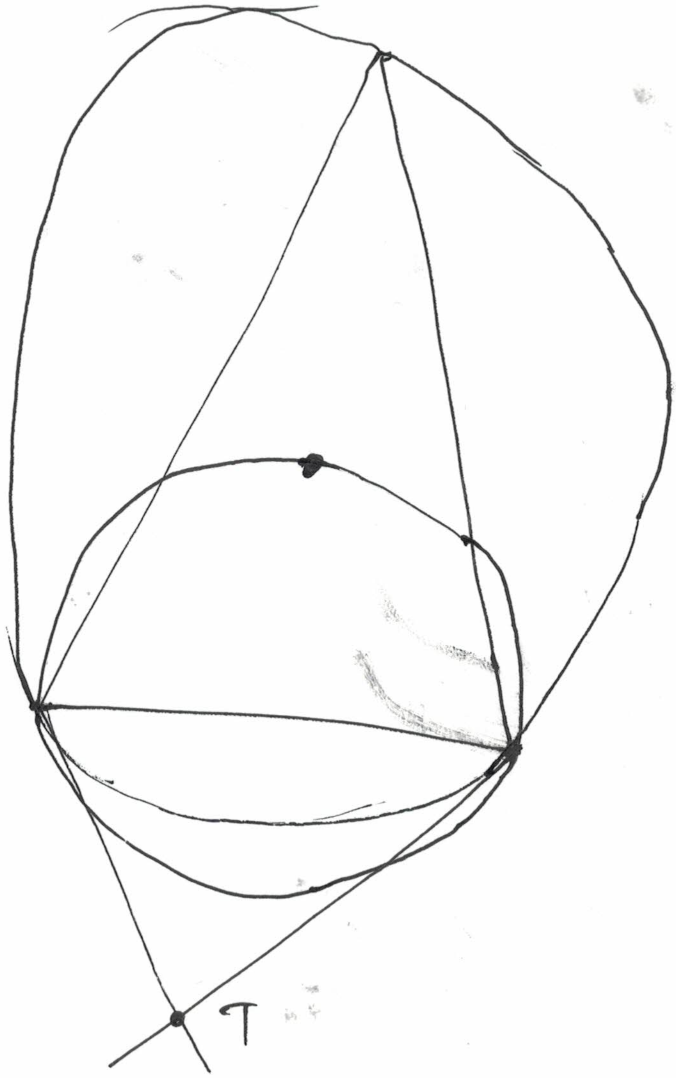
$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

а) S_{ABC}?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$

AC?



Черновик из усл-я (2) $НОК(5^{k_1}; 5^{k_3}; 5^{k_5}) = 5^{18}$

$НОК(7^{k_2}; 7^{k_4}; 7^{k_6}) = 7^{16}$

$\cancel{18-k_1 \neq 18-k_3 \neq 18-k_5}$ ~~хотя бы 1 из них~~

$\cancel{5^{18-k_1}, 5^{18-k_3}, 5^{18-k_5}}$

$\cancel{НОК(7; 3; 12) = 84}$

$\cancel{\frac{84}{3} = 28; \frac{84}{7} = 12; \frac{84}{12} = 7}$

$НОД(a; b; c) = 35 \Rightarrow$ хотя бы 1 из $k_1; k_3; k_5 = 1$;

1 из $k_2; k_4; k_6 = 1$

Пусть $k_1; k_2 = 1$

$k_5 \geq k_3; k_6 \geq k_4$

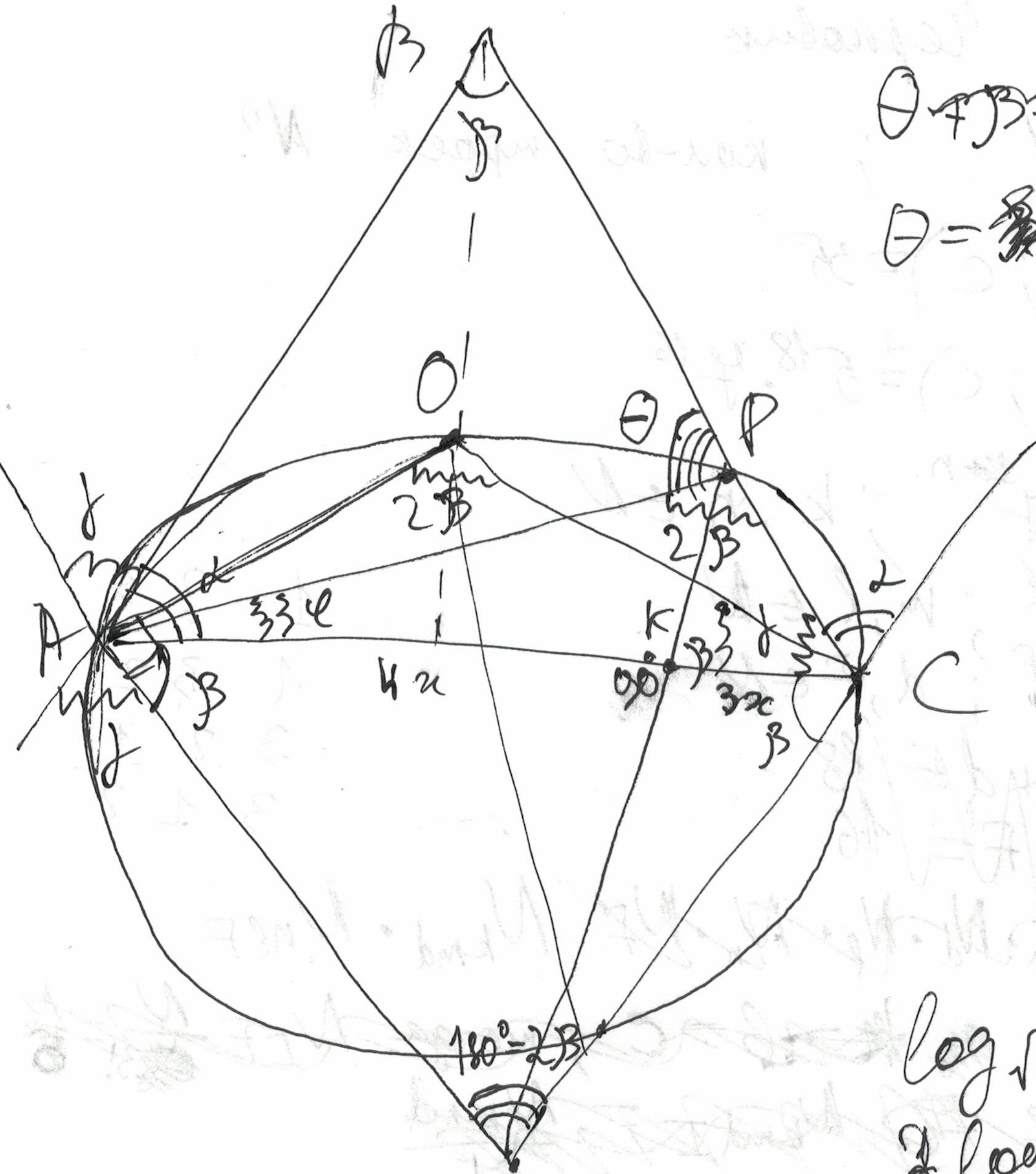
$\frac{5^{18-k_3}}{5^{18-k_5}}$ — не целое или единица

$5^{k_5-k_3}$ — нецелое или единица $\Rightarrow k_5 \leq k_3$

т.к. $k_5 \geq k_3 \Rightarrow k_5 = k_3$

$\max(k_5; k_3; k_1) = 18$

$\max(k_6; k_4; k_2) = 16$



$\theta + \beta = \ldots + \beta + \gamma$

$\theta = \ldots + \gamma$

$2x^2 - 3x + 5 = 0$

$D =$

$\log_{\sqrt{a}} b = 1 + \log_c a^2$

$2\log_a b = 1 + 2\log_c a$

$\log_a \frac{b}{\sqrt{a}} = \log_c a$

$\log_c \frac{b}{\sqrt{a}} = 1$

$\frac{b}{\sqrt{a}} = c$

$\log_{\sqrt{a}} b = \log_b c$

$\cancel{a > 0;\ a \neq 1}$

$\cancel{b = 1}$

$a > 0;\ \cancel{a \neq 1}$

$b > 0;\ b \neq 1$

$\cancel{\log_{\sqrt{a}} c = 1}$ $\cancel{b = c\sqrt{a}}$

$\cancel{b > 0;\ b \neq 1}$

$c^2 = 401$

$\cancel{4x^4 + 9x^2 + 25 - 12x^3 - 30x + 20x^2 =}$

$\cancel{= 2x - 3}$

Зад 4 Черновик

$a, b, c \in N$; кол-во троек N?

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=35 \\ \text{НОК}(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=5^{k}\cdot 7^{n};\ k,n\in N \\ b=5^{m}\cdot 7^{l};\ m,l\in N \\ c=5^{d}\cdot 7^{f};\ d,f\in N \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} k+m+d=18 \\ n+l+f=16 \end{cases}}$$

1 2 3
1 3 2
3 2 1
3 1 2

$N = \cancel{N_k\cdot N_m\cdot N_d\cdot N_l\cdot N_n\cdot N_f}\ N_{kmd}\cdot N_{nlf}$

I Пусть ~~$k \geq b \geq c$, тогда $N_I = \frac{N}{3!}$~~

~~Выберем k~~

~~16 − 1 − 1~~

~~15 − 1/2/3 − 2/1~~

~~14 − 3/2/1 − 1/2/3~~

~~N_{kmd}~~

~~13 − 4/3/2/1 − 1/2/3/4~~

~~1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16~~

$n\,(18-n+1)$

$n(17-n)$

$$\sum_{1}^{16} n(17-n) = 2\sum_{1}^{8} n(17-n) = 2(16+30+42+52+60+66+70+72)$$

$\log_2 a^2 =$

$$2x^2 - 3x + 5 \cancel{=0} \geq \cancel{\tfrac{49}{8}}\ \tfrac{31}{8}$$

$$\left(\sqrt{2}x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 2x^2 - 3x + \frac{9}{8} \cancel{+\frac{49}{8} = 0}$$

$\cancel{\sqrt{\quad}}$