Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100508**

ID профиля: **870499**

Вариант 21

Черновик

1) $S=\frac{(a_1+a_{17})n}{2}$

$a_1^2+23a_1+130<\frac{7}{2}a$ $\frac{a_4\cdot 7}{2}+\frac{21}{2}+60$

$(a_1+10d)(a_1+13d)<$

$\frac{7}{2}(a_1+3d)+60$

273

1 3 5 7 9

$a_{11}=\frac{a_8+a_{14}}{2}$

$(2a_{14}-a_{11})(2a_{11}-a_{14})\geq S+27$

$a_{14}=\frac{a_{17}+a_{11}}{2}$

$a_{11}a_{14}<S+60$

$2a_{14}-a_{11}=a_{17}$

$5a_{11}a_{14}<5S+300$

$a_8=2a_{11}-a_{14}$

$-2a_{11}^2-2a_{14}^2\geq S+27$

$5S+300$

$a_8a_{17}-a_{11}a_{14}>-33$

$4S+273\geq 2(a_{11}^2+a_{14}^2)$

>-33

$2S$

$-2a_{11}^2+4a_{11}a_{14}-2a_{14}^2<33$

$(a_4+4d)(a_4+13d)\geq\frac{7}{2}a_4+27$

$a_{14}^2-2a_{11}a_{14}+a_{11}^2<\frac{33}{2}$

$(a_{14}-a_{11})^2<\frac{33}{2}$

$(a_4+7d)(a_4+11d)<\frac{7}{2}a_4+60$

27, 129, ×8, 1032

4·2 46 17

$x^2+17dx+52d^2\geq\frac{7}{2}x+27$ $\frac{21}{2}=10{,}5$

x^2

$a_{14}-a_{11}=3d$

$(a_1+7)(a_1+16)>$

$2a_1^2+41a_1+129\geq 102$ −37 65

$|3d|<\sqrt{\frac{33}{2}}\cdot\frac{1}{3}$

$a_1^2+24a_1+102\geq 120$

$|d|<\sqrt{\frac{33}{18}}<\sqrt{2}$

$\frac{7}{2}(a_1+3)+27$

1681 − 1032 = 649

21 64,5

2,25

4

258

$d=1;0;-1$

$a_1^2+20{,}5a_1$

20 40

$\left(\frac{41}{2}\right)^2-129\cdot 2+64{,}5>0$

24×24 = 96 + 48 = 576

27×27 = 189 + 54 = 729

23×23 = 69 + 46 = 529

144

222,25

25×25 = 125 + 50 = 625

41×41 = 41 + 164 = 1681, $\frac{1681}{4}$

$420+\frac{1}{4}-258=162{,}25$

60 + 21 = 81

$\frac{-41\pm\sqrt{649}}{4}$

Чистовик №1

1), 1) $\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ a_{11} a_{14} < S+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ -a_{11} a_{14} > -S-60 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} a_8 a_{17} - a_{11} a_{14} > -33$

Т.к. $a_{11}, a_8, a_{14}, a_{17}$ – члены арифм. прогрессии:

$a_{11} = \frac{a_8 + a_{14}}{2}$ $\Rightarrow$ $a_{17} = 2a_{14} - a_{11}$

$a_{14} = \frac{a_{17} + a_{11}}{2}$ $\quad a_8 = 2a_{11} - a_{14}$

Сложив ~~уравнения~~ неравенства системы, получим:

$a_8 a_{17} - a_{11} a_{14} > -33$

Подставим a_8 и a_{17}:

$(2a_{14} - a_{11}) \cdot (2a_{11} - a_{14}) - a_{11} a_{14} > -33$

$-2a_{11}^2 + 4a_{11} a_{14} - 2a_{14}^2 > -33$

$(a_{14} - a_{11})^2 < \frac{33}{2}$

Пусть d – ~~[illegible]~~ разность арифм. прогрессии, тогда:

$(a_{14} - a_{11})^2 < \frac{33}{2} \Rightarrow (3d)^2 < \frac{33}{2} \Rightarrow |d| < \sqrt{\frac{11}{6}} < \sqrt{2}$

Следовательно, так как прогрессия состоит из целых чисел ~~[illegible]~~: $\left[\begin{array}{l} d=-1. \\ d=0 \\ d=1 \end{array}\right.$

Но, так как прогрессия – возр.:

$d = 1$

a_1 – искомый первый член, тогда исходная система:

$\begin{cases} (a_1+7)\cdot(a_1+16) > 7\cdot(a_1+3) + 27 \\ (a_1+10)(a_1+13) < 7(a_1+3) + 60 \end{cases}$

Чистовик №2

2

1) Получаем систему:

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+130<7a_1+81 \\ a_1^2+23a_1+112>7a_1+48 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+16a_1+49<0 \\ a_1^2+16a_1+64>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+8)^2-15<0 \\ (a_1+8)^2>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_1+8|<\sqrt{15}<4 \\ a_1\neq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11\leq a_1\leq -5 \\ a_1\neq -8 \end{cases}$$

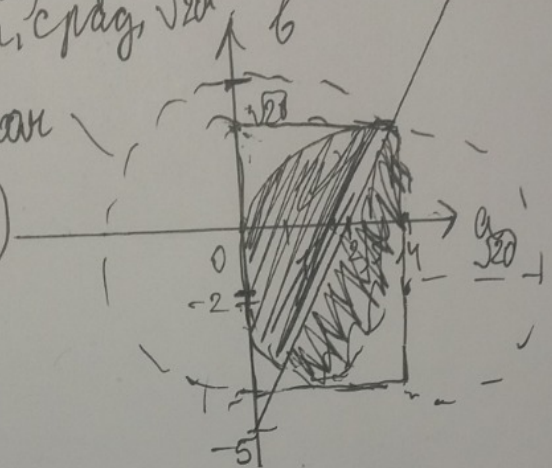
Ответ: $a_1=-11; -10; -9; -7; -6; -5$

Чистовик №3 ③

3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \ (1) \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \ (2) \end{cases}$

(1): Это ~~окр.~~ обл. огр. окр. с центром в т. $(x_0;y_0)$ и рад. $=\sqrt{20}$

(2): обл., огран. окр. с рад. $\sqrt{20}$ и центром в т. $(0;0)$



— пр. $b = 2a-5$

Область, огр. ~~окр.~~ — окр. рад. $\sqrt{20}$ и ц. в т. $(4;-2)$

$S = 2\sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = 2 \cdot 20 = 40$

Ответ: 40

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100508**

ID профиля: **870499**

Вариант 21

Чистовик №4

4) $5^{18}\cdot 7^{16} \vdots\ a, b, c$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ (a, b, c) в разложении на
$a, b, c \vdots\ 35$
простые множители можно представить как:
$a = 7^{k_a}\cdot 5^{n_a}$, где k и n – натуральные числа, при этом; $1 \leq k \leq 16$; $1 \leq n \leq 18$
Т.к. НОД$(a, b, c) = 35$, то:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \not\vdots\ 7^2 \\ b \not\vdots\ 7^2 \\ c \not\vdots\ 7^2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \not\vdots\ 5^2 \\ b \not\vdots\ 5^2 \\ c \not\vdots\ 5^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ в разложении одного из 3 чисел $k = 1$
и в разложении одного из 3 чисел $n = 1$

НОК$(a, b, c) = 5^{18}\cdot 7^{16}$ $\Rightarrow$ в разложении одного из 3 чисел $k = 16$, и в разложении одного из 3 чисел $n = 18$

Пусть: $a = 7^{k_a}\cdot 5^{n_a}$; $b = 7^{k_b}\cdot 5^{n_b}$; $c = 7^{k_c}\cdot 5^{n_c}$
Тогда; k_a, k_b, k_c в произвольном порядке равны:
$1, 16, [1; 16]$
n_a, n_b, n_c в произвольном порядке равны: $1, 18, [1; 18]$
Где $[l, m]$ – множ. целых чисел от l до m включ.

Чистовик №5 (5)

4) Кол-во троек нужных чисел равно кол-ву способов выбрать тройку k умноженное на кол-во способов выбрать тройку n =

$\Rightarrow$ число способов для k (C_k) $= 14 \cdot 3!$ (третье число от 2 до 15) $+ \frac{3! \cdot 2}{2}$ (третье число $= 1; 16 =$ одному из двух других, поэтому делим число способов на 2)

$C_k = 15 \cdot 3! = 90$

Аналогично, $C_n = 16 \cdot 3! + \frac{2 \cdot 3!}{2} = 17 \cdot 6 = 102$

Ответ: $90 \cdot 102 = 9180$

Чистовик №6 ⑥

5) Заметим, что произведение ~~дв~~ 3 данных чисел равно 4 (~~всег~~ всегда).

Пусть два числа равны a, а третье равно $(a-1)$, тогда: $a^2(a-1)=4 \Rightarrow a^3-a^2-4=0$

Используя схему Горнера, найдем целый корень ур.

$a=2$

Разделив на $(a-2)$, получим уравнение:

$(a-2)(a^2+a+2)=0$ равносильное исходному

$a^2+a+2=0$ не имеет действ. корней ($D=-7<0$)

Следовательно, $a=2$:

$$\left[\begin{array}{l}\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2\\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2\\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=2x-3\\ (2x^2-3x+5)^2=(2x-3)^2\\ (x+1)^2=2x^2-3x+5\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ (2x^2-5x+8)\cdot(2x^2-x+2)=0\\ x^2-5x+4=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x\in\varnothing\ (D<0)\\ x=1\end{array}\right.$$

Проверка:

$x=1$ – не подходит. усл., т.к. $2x-3>0$

$x=4$ – подходит. Ответ: $x=4$

21100508 (U870499 M1295622)

$\overset{x}{\log_{a^{\frac{1}{2}}} b}$ $\overset{y}{\log_c a^2}$ $\overset{z}{\log_b c+1}$

$\log_b c \cdot \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = \log_{a^{\frac{1}{2}}} c$ $\log_b (b+c)$ 9

$2(\log_a b - \log_c a) = 0$ $a^2 \cdot (a-1)$

$\dfrac{\log_a b \cdot \log_a c - 1}{\log_a} = 0$

$\log_{a^{\frac{1}{2}}} c \cdot \log_c a^2$

$xyz = 4 = a^2(\frac{a}{2}-1)$ 1-8

$\log_{a^{\frac{1}{2}}} a^2 = 4$

$\frac{4}{xy} = \frac{4}{yz}$ $a^3 - a^2 - 4 = 0$

$(a-2)$ $(a^2+a+2)(a-2)=0$

$x = z$

a^2 a^2-4

$a+2$

$3a^2 - 2a = 0$

$a = 0$

$3a = 2$ $2x^2 - x + 2$

$1 - 2 \cdot 4 = -7$

$2x^2 - 5x + 8$ $+32$

$\frac{37}{2}$ 25

$\frac{5 \pm 3}{2} = 4; 1$ $2a = -1$

25 $a = -\frac{1}{2}$ 3^2

$25 - 16 = 9$ 5^{25} 0

$x = 4$

$(2x^2 - 3x + 5 - 2x + 3)(2x^2 - 3x + 5 + 2x - 3) = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ $\log_{0,5} 5 = 2$