Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100495**

ID профиля: **849522**

Вариант 21

Чистовик

N1

$$\left.\begin{matrix} a_1 \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ d \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \frac{(a_1+a_7)7}{2} = \frac{(2a_1+6d)7}{2} = 7a_1 + 21d$$

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S+27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S+60 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ a_1^2+23a_1d+130d^2 < 7a_1+21d+60 \end{cases}$$ – Из верх. вычтем нижн. =>

$$\Rightarrow -18d^2 > -33 \Rightarrow d^2 < \frac{33}{18}$$, но $d \in \mathbb{N} \Rightarrow d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64 > 0 \\ a_1^2+16a_1+49 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+8)^2 > 0 \\ (a_1+8)^2 - 15 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+8 \neq 0 \\ (a_1+8)^2 < 15 \end{cases}$$

$$a_1+8 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a_1+8 \neq 0 \\ a_1+8 = 0; \pm1; \pm2; \pm3 \end{cases} \Rightarrow a_1+8 = \pm1; \pm2; \pm3$$

Ответ: $a_1 = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

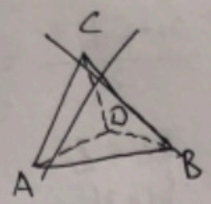
21100495 (U849522 M1300333)

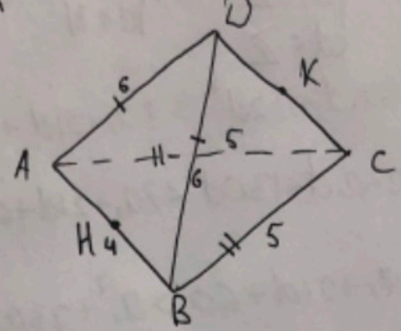
№2 Чистовик

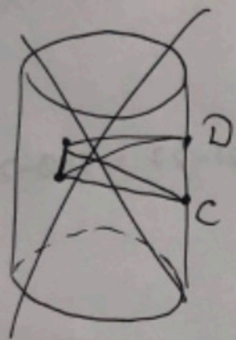
AB = 4

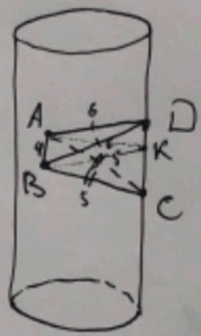
AC = CB = 5

AD = DB = 6









$\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ - равнобедр. => если H - сер. AB, то

$CH \perp AB$ и $DH \perp AB$ => $AB \perp$ пл-ти(CDH) => $AB \perp CD$

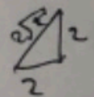
Пров. пл-ть$(ABK) \perp CD$ => $AK \perp CD$, $BK \perp CD$.

Т.к пл-ть$(ABK) \perp$ оси цилиндра и т. A, B и K лежат на поверх-ти цил. =>

рад. опис. окр. $\triangle ABK$ – это радиус цилиндра.

Ц. опис. окр $\triangle ABK$ лежит на сер. перпенд. KH => радиус min, если

ц. в т. H => $R = AH = BH = KH = 2$ => $AK = BK = 2\sqrt{2}$ => $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{25 - 8} =$



$= \cancel{\sqrt{2\ 8}} \ \sqrt{17}$

$DK = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{36 - 8} = 2\sqrt{7}$

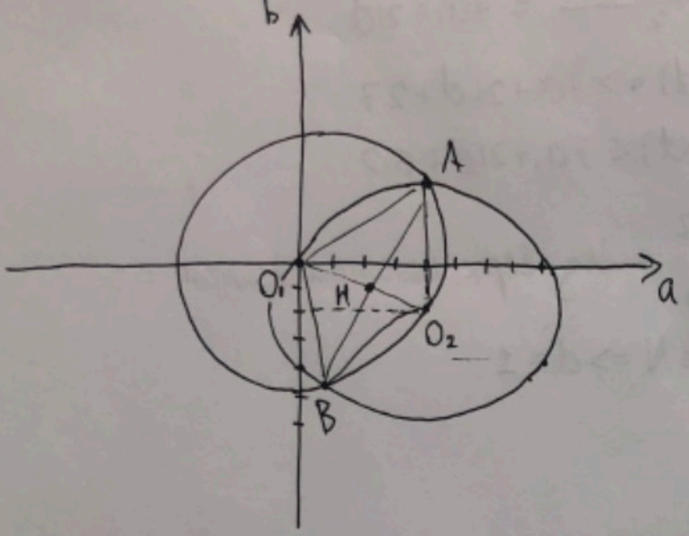
$CD_{min} = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

2

№3 Чистовик

Рассм-м $a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20)$

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$ $\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$



O_1AO_2B - ромб, $H = O_1O_2 \cap AB \Rightarrow \cos\angle AO_1H = \frac{O_1H}{O_1A} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

$\cos\angle AO_1B = 2\cdot\cos^2\angle AO_1H - 1 = 2\cdot\frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\angle AO_1B = \alpha = \arccos(-\frac{1}{2})$

$S_{\text{пересечения окр}} = S_0 = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{\arccos(-\frac{1}{2})\cdot 20}{2} = 10\arccos(-\frac{1}{2})$

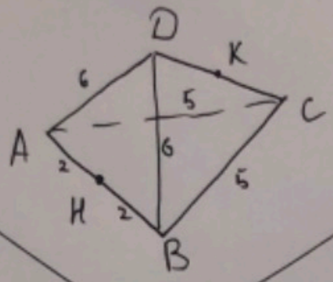
Чистовик Черн

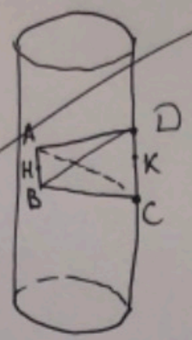
№2

$AB = 4$

$AC = BC = 5$

$AD = BD = 6$





$\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ – р/б => H - середина AB, тогда $CH \perp AB$ и $DH \perp AB$ =>

$AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CD$

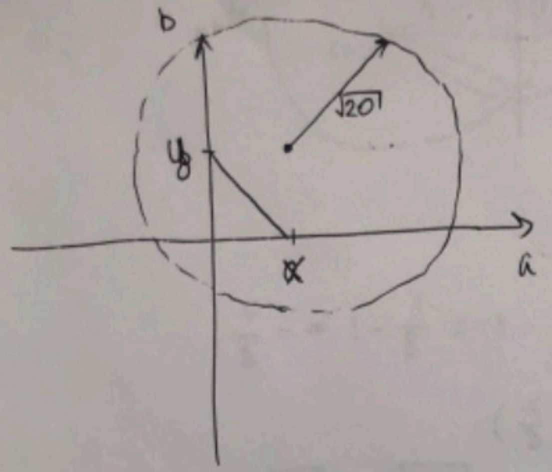
Проведем пл.$(ABK) \perp CD \Rightarrow AK \perp CD$, $BK \perp CD$

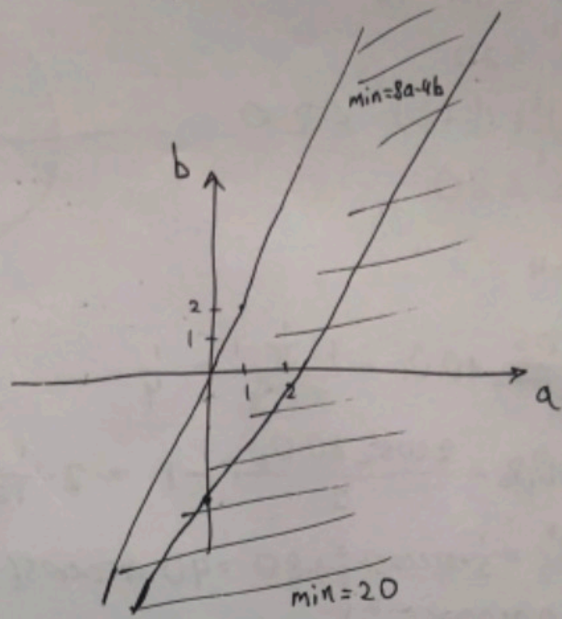
Т.к. $(ABK) \perp$ оси цилиндра и т. A, B, K лежат на

21100495 (U849522 M1300333)

№3 Черн

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$$





$a^2+b^2\ge 0 \Rightarrow$ если $8a-4b<0$, то $a^2+b^2\le 8a-4b$, что невозможно

$\Rightarrow 8a-4b\ge 0 \Rightarrow b\le 2a$

$2a\ge b$

$\boxed{a\ge \frac{b}{2}}$

$a^2+b^2>20$ – невозможно

1° $8a-4b\ge 20$

$2a-b\ge 5$ $\quad\cancel{b\le 2a-5}$

$2a\ge b+5$

$a\ge \frac{b}{2}+\frac{5}{2}$

$a^2+b^2\le 20$

$\left(\frac{b+5}{2}\right)^2+b^2\le 20$

$\frac{b^2+10b+25}{4}+b^2\le 20$

$5b^2+10b+25\le 80$

$5b^2+10b-55\le 0$

$b^2+2b-11\le 0$

$(b+1)^2-12\le 0$

$(b+1)^2\le 12$

$(b+1)\in[-\sqrt{12};+\sqrt{12}]$

$b\in[-2\sqrt{3}-1;2\sqrt{3}-1]$

$a\ge \frac{b+5}{2}$

2° $8a-4b\le 20$

$2a\le b+5$, но $2a\ge b$

$a\in[\frac{b}{2};\frac{b+5}{2}]$

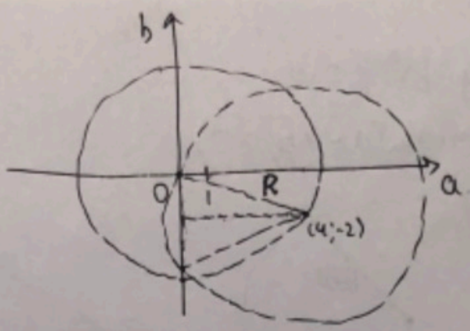
$a^2+b^2\le 8a-4b$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

21100495 (U849522 M1300333)

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$



$5 > \sqrt{20} > 4$

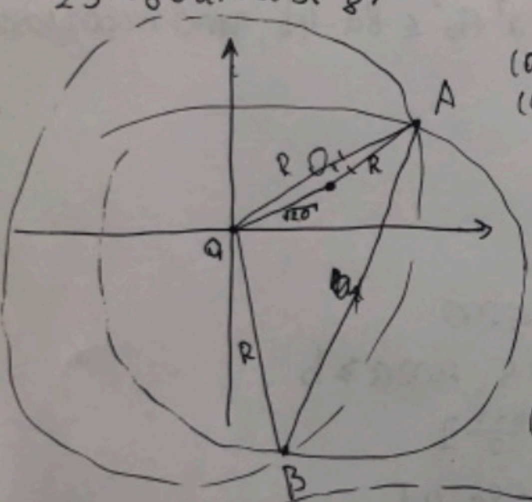
$$\cos\angle AO_1O_2 = \frac{1+\frac{1}{4}-1}{2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\cos\angle AO_1B = \frac{2\cos^2\angle AO_1O_2}{1} - 1 = 2\cdot\frac{1}{16} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

$$S = \alpha \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\arccos(-\tfrac{7}{8})\cdot 80 = 40\cdot\arccos(-\tfrac{7}{8})$$

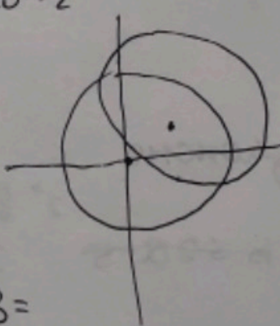
$$2S = 80\arccos(-\tfrac{7}{8})$$

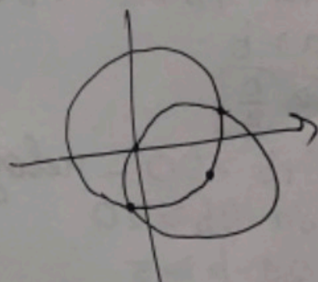
$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



$(0;0)$ $\sqrt{20}\cdot 2$

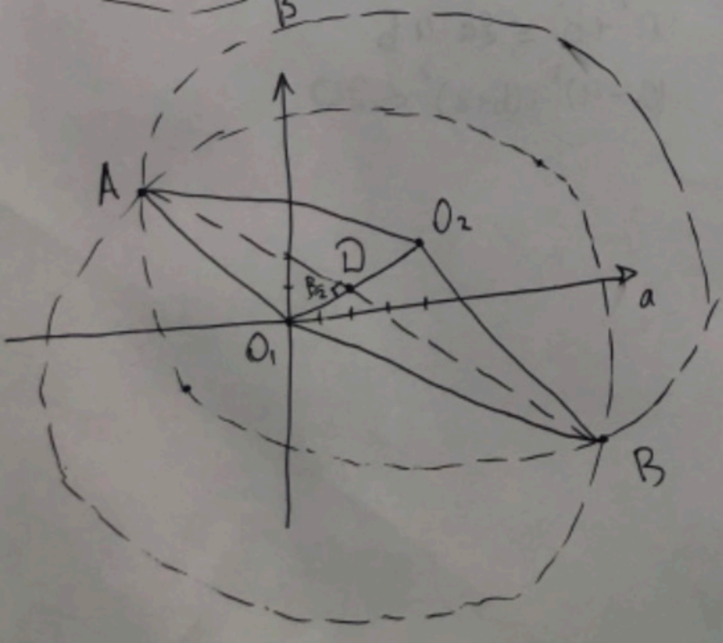
$(4;2)$ $\sqrt{20}\cdot 2$

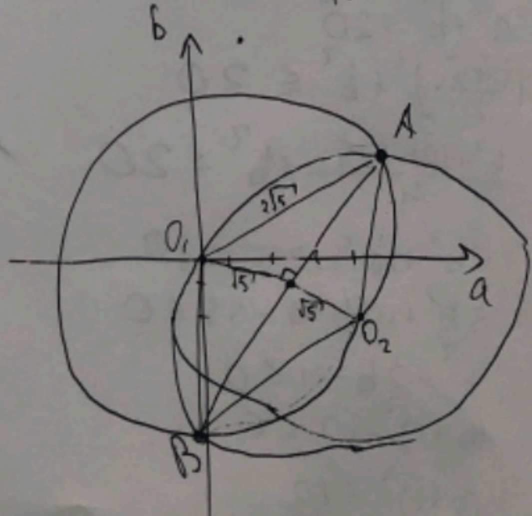




$O_1O_2 \cap AB =$

πR^2





$$\cos\angle AO_1O_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

[redacted] №1 черн.

$S = a_1+a_2+a_3+...+a_7 = \frac{(a_1+a_7)7}{2} = \frac{(2a_1+6d)7}{2} = (a_1+3d)7 = 7a_1+21d$

$\begin{cases} a_8\cdot a_{17} > S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14} < S+60 \end{cases}$ $\begin{cases} d>0 \\ a_1\in\mathbb{Z} \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1\in\mathbb{Z} \\ d\in\mathbb{N} \end{cases}$ [redacted]

$(a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27$ | $\times \begin{matrix}16\\7\\112\end{matrix}$

$(a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2+23a_1d+130d^2 < 7a_1+21d+60$

$a_1^2+23a_1d+112d^2+7a_1+21d+60 > a_1^2+23a_1d+130d^2+7a_1+21d+27$

$33 > 18d^2$

$d^2 < \frac{33}{18}$

$d^2 = 1 \Rightarrow d = 1$

$112-21-27 = 110-21-25 = 85-21 = 64$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64 > 0 \\ a_1^2+16a_1+49 < 0 \end{cases}$

$(a_1+8)^2 > 0$ $a_1 \neq -8$

$(a_1+8)^2-15 < 0$

$(a_1+8)^2 < 15 \Rightarrow a_1+8 = 0; \pm1; \pm2; \pm3$, но $a_1+8 \neq 0$

$\cancel{a_1 \neq 8}$

$a_1 = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100495**

ID профиля: **849522**

Вариант 21

Чистовик

№4

$НОД(a;b;c)=35$ $\quad a,b,c\in\mathbb{N}$

$НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16}$

Т.к. $НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot7^{16}$, то a,b,c не могут содержать простых множ-й, кроме 5 и 7.

$$\begin{cases} a=5^{a_1}\cdot 7^{a_2}\\ b=5^{b_1}\cdot 7^{b_2}\\ c=5^{c_1}\cdot 7^{c_2}\end{cases}$$

Причем, $\min(a_1;b_1;c_1)=1$, $\max(a_1;b_1;c_1)=18$

Без огран-я общ-ти будем считать, что $a_1=1$, $c_1=18$:

$$\begin{cases} a=5\cdot 7^{a_2}\\ b=5^{b_1}\cdot 7^{b_2}\\ c=5^{18}\cdot 7^{c_2}\end{cases}, 1\le b_1\le 18$$

Также $\min(a_2;b_2;c_2)=1$, $\max(a_2;b_2;c_2)=16$

Рассм-м след-й случаи:

1° $b_1=1$

Среди чисел a_2,b_2,c_2 можно 3-мя способами выбрать число, равное 1;

Далее 2-мя способами можно выбрать число, равное 16;

Оставшееся число принимает знач-е от 1 до 16

$\Rightarrow$ Возможных наборов (a_2,b_2,c_2) $3\cdot 2\cdot 16=96$.

Но т.к. $a_1=b_1=1$, кол-во возможных наборов $(a;b;c)$ будет вдвое меньше, т.к. наборы $(a_2;b_2;c_2)$ и $(b_2;a_2;c_2)$ соответствуют одному и тому же набору $(a;b;c)$, значит к-во наборов $(a;b;c)$ $\frac{96}{2}=48$

2° $b_1=18$

Аналогично 1° наборы $(a_2;b_2;c_2)$ и $(a_2;c_2;b_2)$ соответствуют одному набору $(a;b;c)$ $\Rightarrow$ к-во наборов $(a;b;c)=\frac{96}{2}=48$

3° $b_1=2;3;\ldots;18$

$b_1\ne a_1$, $b_1\ne c_1$

Числа $(a_2;b_2;c_2)=(1;x;16)$ без учета порядка, $1\le x\le 16$

Если $x\ne 1;16$, то к-во наборов $(a_2;b_2;c_2)$ $\underset{\text{выбор 16}}{3}\cdot\underset{\text{выбор 1}}{2}\cdot\underset{\text{выбор x}}{14}=84$

21100495 (U849522 M1300334)

Если $x=1$, то есть 3 способа выбрать 16 среди $a_2; b_2; c_2$, а 2 др. числа будут равны по 1

Если $x=16$, то также есть 3 набора.

Таким образом к-во наборов в случае 3:

$84+3+3=90$

Всего наборов $(a;b;c)$ $48+48+90=186$

Ответ: 186

№5 Чистовик

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 4\log_{2x^2-3x+5}\sqrt{2x-3} = 4\,\frac{1}{\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)}$$

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \frac{\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)}{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \\ u = \log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5) \end{array}\right\} \text{замена}$$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 0 \\ \sqrt{2x-3} \neq 1 \\ x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ 2x^2-3x+5 > 0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (\frac{3}{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

$V, \frac{4}{u}, \frac{u}{V}$

1° $\begin{cases} V = \frac{4}{u} \\ V = \frac{u}{V} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} V = \frac{4}{u} \\ \frac{4}{u} = \frac{u^2}{4} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} V = \frac{4}{u} \\ 4 = \frac{u^3}{4} + u \end{cases}$ $\begin{cases} V = \frac{4}{u} \\ 16 = u^3 + 4u \end{cases}$

$\begin{cases} V = \frac{4}{u} \\ u^3 + 4u - 16 = 0 \end{cases}$ $u = 2$ – подходит $\Rightarrow \begin{cases} V = \frac{4}{u} \\ (u-2)(\underbrace{u^2+2u+8}_{D<0}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 2 \\ u = 2 \end{cases}$

2° $\begin{cases} V = \frac{u}{V} \\ V = \frac{4}{u} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u = V^2 \\ V = \frac{4}{V^2} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u = V^2 \\ V^3 - V^2 - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u = V^2 \\ (V-2)(\underbrace{V^2+V+2}_{D<0}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4 \\ V = 2 \end{cases}$

3° $\begin{cases} \frac{4}{u} = \frac{u}{V} \\ V + 1 = \frac{4}{u} \end{cases}$ $\begin{cases} V = \frac{u^2}{4} \\ \frac{u^2}{4} + 1 = \frac{4}{u} \end{cases}$ $\begin{cases} V = \frac{u^2}{4} \\ \frac{u^2+4}{4} = \frac{4}{u} \end{cases}$ $\begin{cases} V = \frac{u^2}{4} \\ u^3 + 4u - 16 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} V = 1 \\ u = 2 \end{cases}$

1° $\left.\begin{array}{l} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2 \Rightarrow 2x-3 = x+1 \Rightarrow x = 4 \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5) = 2 \Rightarrow 2x-3 = 2x^2-3x+5 \Rightarrow 2x^2-5x+8=0,\ D<0 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \varnothing$

2° $\left.\begin{array}{l} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2 \Rightarrow 2x-3 = x+1 \Rightarrow x = 4 \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5) = 4 \Rightarrow (2x-3)^2 = 2x^2-3x+5 \\ \qquad 4x^2-12x+9 = 2x^2-3x+5 \\ \qquad 2x^2-9x+4 = 0 \\ \qquad x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x = 4}$

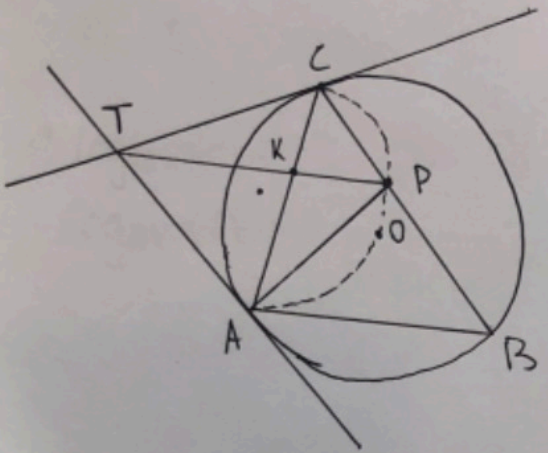
3° $\left.\begin{array}{l} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 1 \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5) = 2 \Rightarrow \text{из } 1° - \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $x = 4$

3

N6 Чистовик

а) TA и TC – кас. к $\omega \Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow OATC$ – впис-й четырехуг-к $\Rightarrow$ т. T лежит на опис. окр ω_1 $\triangle AOC \Rightarrow \angle TPC = \angle TAC$, как впис. в ω_1. $\angle TAC$ – угол м/у кас. и хордой в $\omega \Rightarrow \angle TAC = \angle ABC \Rightarrow \angle TPC = \angle ABC \Rightarrow$
$AB \parallel TP$



$\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту $\Rightarrow$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{AK}{CK}$$

$$\frac{CK}{AC} = \frac{3}{7}$$

$AB \parallel KP \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow S_{ABC} = S_{KPC} \cdot \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = 9 \cdot \frac{49}{9} = 49$

б) $\left.\begin{array}{l}\angle TPA = \angle TCA \text{ как впис.} \\ \angle TCA = \angle TAC = \angle TPC\end{array}\right\} \Rightarrow \angle TPA = \angle TPC = \angle ABC$

$AB \parallel KP \Rightarrow \angle BAP = \angle TPA \Rightarrow \angle BAB = \angle ABC$, $\triangle ABP$ – равнобедр.

$S_{ABP} = S_{ABC} - S_{APK} - S_{CPK} = 49 - 12 - 9 = 28$

$]\ \angle ABC = \beta$, $tg\,\beta = \frac{3}{7}$

$1 + tg^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{58}{49} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{58}}$, $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{21}{29}$

$S_{ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot BP \cdot \sin\angle BPA = \frac{1}{2} BP^2 \cdot \sin(\pi - 2\beta) = \frac{1}{2} BP^2 \sin 2\beta = 28$

$BP^2 = \frac{56}{\sin 2\beta} = \frac{56 \cdot 29}{21} = \frac{232}{3}$

$AB = 2BP\cos\beta = 2\sqrt{\frac{232}{3}} \cdot \frac{7}{\sqrt{58}} = \frac{28}{\sqrt{3}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\beta = 49 \Rightarrow BC = \frac{98}{AB \cdot \sin\beta} = 98 \frac{\sqrt{3}}{28} \cdot \frac{\sqrt{58}}{3} = 7 \frac{\sqrt{58}}{2\sqrt{3}}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta = \frac{784}{3} + \frac{2842}{12} - 2 \cdot \frac{28}{\sqrt{3}} \cdot \frac{7\sqrt{58}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{7}{\sqrt{58}} =$
$= \frac{784}{3} + \frac{1421}{6} - \frac{1372}{3} = \frac{1421}{6} - \frac{588}{3} = \frac{245}{6} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$

Ответ: $[ABC] = 49$; $AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$

4

N 5 Черн.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 0 \\ \sqrt{2x-3} \neq 1 \\ x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ 2x^2-3x+5 > 0 & D = 9-4\cdot2\cdot5<0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 & D = 9-4\cdot2\cdot4<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$x \in (\frac{3}{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

1° $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

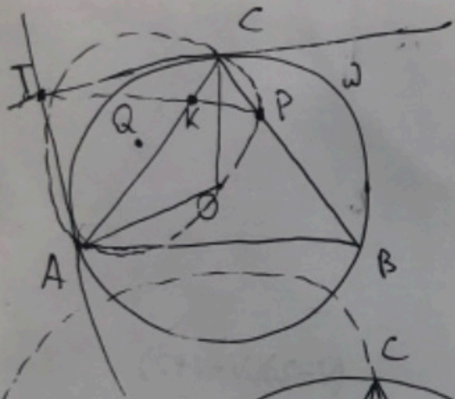
$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \frac{1}{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)}$

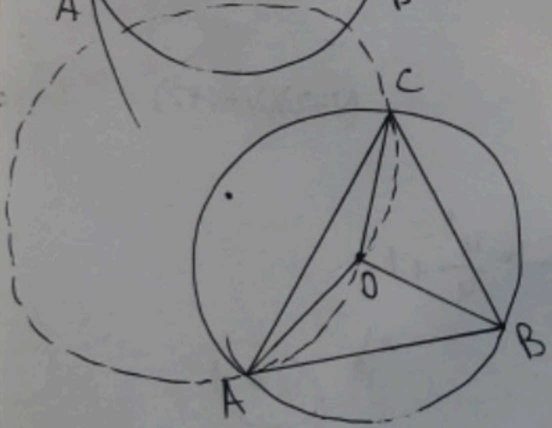
N 6

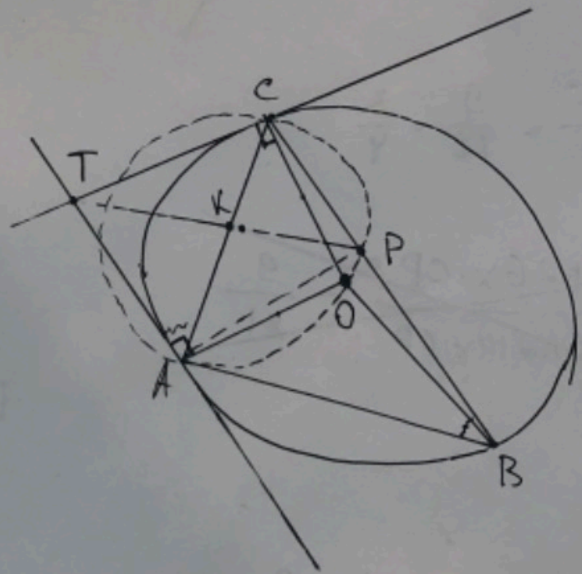
$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

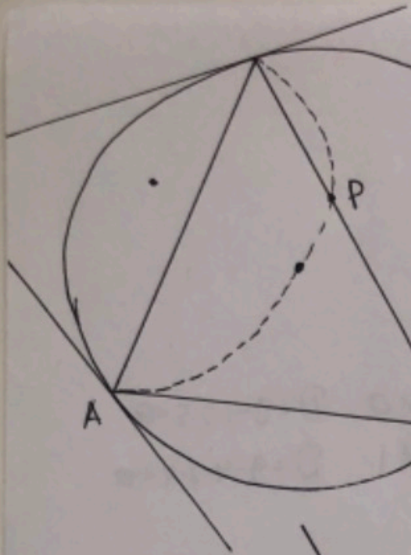
$S_{ABC} - ?$

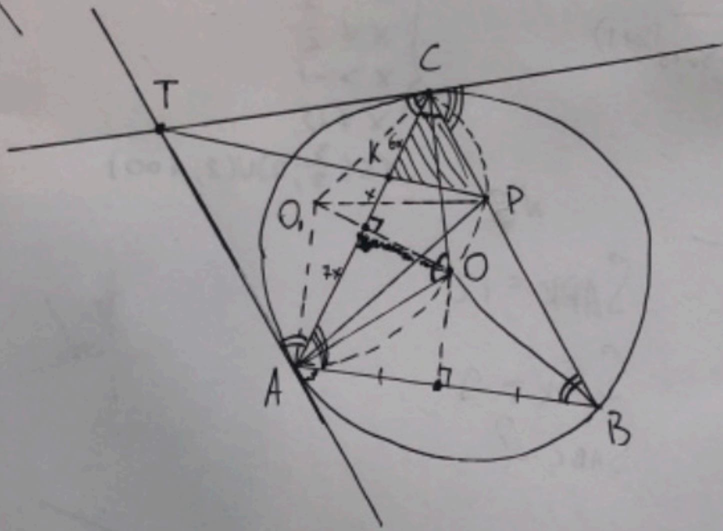






5, 7





$\frac{CK}{KA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\cancel{\frac{\frac{1}{2}\sin 26x \cdot CP}{\frac{1}{2}\sin 214x \cdot CP}} = \frac{9}{21}$

$(v-2)(v^2+v+2)$

$\frac{4}{u} = \frac{u^2}{4} + 1$

$\frac{4}{u}$

$\frac{21}{29}$

$x = 4$

$u = \frac{u^3}{4} + u$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5) = 2$

$u = 2$

$u^3 + 4u - 16 = 0$

$2x - 3 = 2x^2 - 3x + 5$

$(u-2)(u^2+2u+8)$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 8$

$v = 2; u = 2$

$2x^2 - 5x + 8 = 0$

$u = 4; v = 2$

$x_{1,2} =$

$u = 2; v = 1$

$\frac{245}{6}$

$\sqrt{\frac{246}{8}}$