Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100416**

ID профиля: **858765**

Вариант 21

Чистовик. Лист 1.

№1

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ $\quad a_i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$$

$S = a_1 + a_1 + k + a_1 + 2k + a_1 + 3k + a_1 + 4k + a_1 + 5k + a_1 + 6k =$

$= 7a_1 + 21k$

$a_8 = a_1 + 7k$; $\quad a_{17} = a_1 + 16k$

$a_{11} = a_1 + 10k$; $\quad a_{14} = a_1 + 13k$

$$\begin{cases} (a_1 + 7k)(a_1 + 16k) > 7a_1 + 21k + 27 \\ (a_1 + 10k)(a_1 + 13k) < 7a_1 + 21k + 60 \end{cases}$$

Пусть $a_1 = x$, $k = y$, тогда:

$$\begin{cases} (x + 7y)(x + 16y) > 7x + 21y + 27 \\ (x + 10y)(x + 13y) < 7x + 21y + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 16xy + 7xy + 112y^2 > 7x + 21y + 27 \\ x^2 + 13xy + 10xy + 130y^2 < 7x + 21y + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 23xy + 112y^2 > 7x + 21y + 27 \\ x^2 + 23xy + 130y^2 < 7x + 21y + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 - 23xy - 112y^2 < -7x - 21y - 27 \\ x^2 + 23xy + 130y^2 < 7x + 21y + 60 \end{cases} \oplus$$

$18y^2 < 33$

Т.к. $y \in \mathbb{Z}$ и ~~на~~ арифметическая прогрессия возрастает $(y > 0)$, то $\underline{y = 1}$

Подставим ~~исходное~~ найденное значение y в исходную систему:

$$\begin{cases} x^2 + 23x + 112 > 7x + 48 \\ x^2 + 23x + 130 < 7x + 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 16x + 64 > 0 \\ x^2 + 16x + 49 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 > 0 \\ x^2 + 16x + 49 < 0 \end{cases}$$

21100416 (U858765 M1296129)

Чистовик. Лист 3.

$DQ = \sqrt{DP^2 - QP^2} = \sqrt{32-4} = \sqrt{28}$

По т. Пифагора в $\triangle CPQ$:

$CQ = \sqrt{CP^2 - PQ^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$CD = DQ + QC = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$

№3

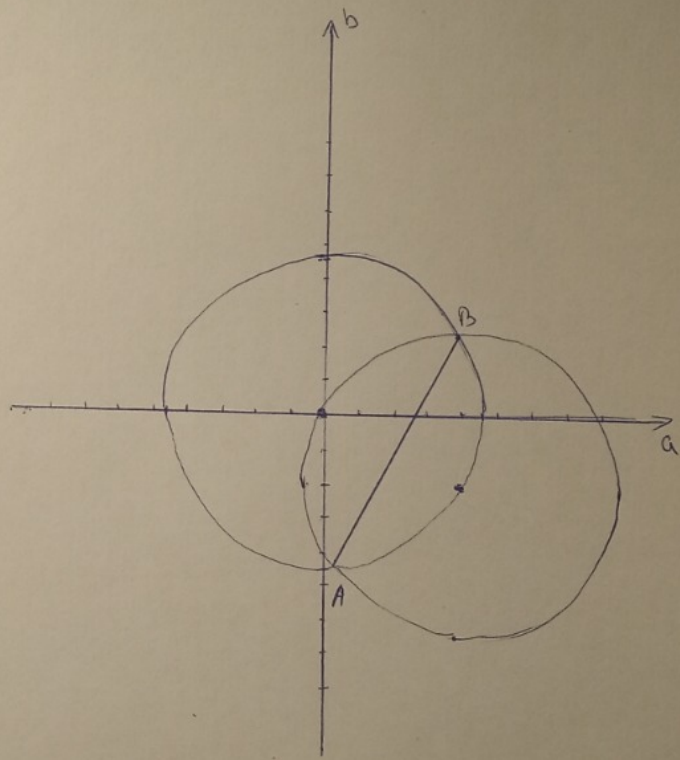
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \le 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$

2) $a^2 + b^2 \le 20$



Рассмотрим $(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$

При $a=0$:

$16 + (b+2)^2 \le 20$

$b^2 + 4b \le 0$

$b(b+4) \le 0$

При $b=0$:

$(a-4)^2 + 4 \le 20$

$a - 8a \le 0$

$a(a-8) \le 0$

Найдем пересечение с $a=4$:

$(b+2)^2 \le 20$

$(b+2)^2 - (2\sqrt5)^2 \le 0$

$(b+2+2\sqrt5)(b+2-2\sqrt5) \le 0$

Всего 2 окружности: $\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ (a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20 \end{cases}$

Найдём точки их пересечения:

$\begin{cases} a^2+b^2 = 20 \\ a^2+b^2 = 8a-4b \end{cases}$ $\begin{cases} 8a-4b = 20 \\ a^2+b^2 = 20 \end{cases}$ $\Rightarrow b = 2a-5$ $a^2 - 4a + 1 = 0$; $a_1 = 2+\sqrt3$; $a_2 = 2-\sqrt3$

$b_1 = 2\sqrt3 - 1$; $b_2 = -2\sqrt3 - 1$

Т.к. окружности одинаковых радиусов ($2\sqrt5$), то AB - ось симметрии.

21100416 (U858765 M1296129)

$\begin{cases}(x+8)^2>0\\ x^2+16x+49<0\end{cases}$

Чистовик. Лист 2.

1) $x \neq -8$

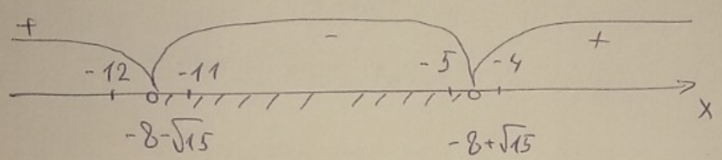
2) $x^2+16x+49<0$

$D = 16^2 - 4\cdot 49 = 256 - 196 = 60 = 2\sqrt{15}$

$x_1 = \dfrac{-16+2\sqrt{15}}{2} = -8+\sqrt{15}$; $\quad x_2 = \dfrac{-16-2\sqrt{15}}{2} = -8-\sqrt{15}$

$3 = \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$

$-5 < -8+\sqrt{15} < -4 \qquad -12 < -8-\sqrt{15} < -11$

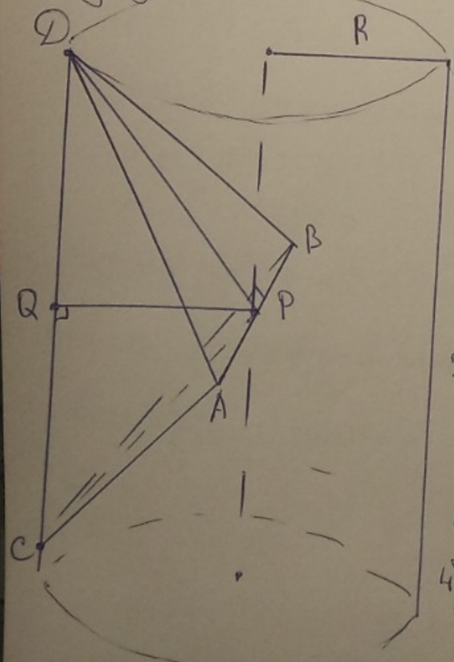


$\begin{cases}x \in [-11; -5]; \quad x \in \mathbb{Z}\\ x \neq -8\end{cases}$

Ответ: $-11; -10; -9;$ ~~-8~~ $-7; -6; -5.$

№2

CD ∥ оси цилиндра, а все вершины тетраэдра ABCD лежат на боковой поверхности цилиндра, то CD лежит в боковой плоскости ⊥ основанию цилиндра. Также все вершины принадлежат боковой стороне и радиус при этом минимален, то $R = 2 = \frac{1}{2}AB$ ($AB = 4$ по условию)



1) В $\triangle CAB$ провед. высоту CP (она же медиана и высота, т.к. $\triangle CAB$ - равноб.)

В $\triangle ADB$ провед. высоту DP —//—

2) По т. Пифагора ($BP = \frac{1}{2}AB = R = 2$):

$DP = \sqrt{6^2-2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$CP = \sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$

3) Заметим, что точка P лежит на оси цилиндра. Тогда из P провед. перп. PQ к CD. Т.к. CD ∥ оси цилиндра, то PQ ∥ основанию цилиндра $\Rightarrow PQ = 2 = R$.

4) $DC = DQ + QC$

По т. Пифагора в $\triangle DPQ$:

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100416**

ID профиля: **858765**

Вариант 21

Чистовик. Лист 1.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

1) $НОД(a;b;c)=35 \Rightarrow$ каждое из чисел a, b и c в разложении имеет множители $5^1\cdot 7^1$.

2) $НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow$ у чисел a, b и c нет никаких других простых делителей кроме ~~них~~ 5 и 7.

3) Рассмотрим степени числа 5 в числах a, b и c:

$НОД(a,b,c)=5^1\cdot 7 \Rightarrow$ одно из чисел можно представить, как $5^1\cdot 7^x$

$НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow$ одно из чисел можно представить, как $5^{18}\cdot 7^y$

А вот степень „третьего" числа никак на НОД и НОК не влияет, если его степень пятерки находится в диапазоне $[1;18]$: $5^z\cdot 7^w$, $z\in[1;18]$

При этом, если степень „третьего" числа не равна 1 или 18, то общее кол-во расстановок степеней: $16\cdot 3!$ (одна степень может принимать значения от 2 до 17 (всего 16) и 3! - кол-во способов переставить 3 числа)

Если же степень „третьего" числа равна 1 или 18, то общее число перестановок $\frac{3!}{2!}$ (т.к. 2 числа совпадают). Тогда общее кол-во расстановок степеней $\frac{2\cdot 3!}{2!}=6$.

Итого способов расставить степени пятёрок:

$$16\cdot 3!+6=16\cdot 6+6=17\cdot 6=60+42=102$$

4) Аналогично, рассматривая способы „расставить" степени числа 7, получаем: $14\cdot 3!$ (для всех степеней „третьего" числа от 2 до 15) и $\frac{2\cdot 3!}{2}=6$ (для степени 1 и 16 „третьего" числа)

Итого способов расставить степени семёрок:

$$14\cdot 6+6=15\cdot 6=90$$

5) Всего: $102\cdot 90=9180$

Ответ: 9180.

Черновик. Часть 2
Лист 1.

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 35 \\ НОК(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 7 \cdot 5$
$b = 7 \cdot 5$
$c = 7 \cdot 35$

$5^{15} \cdot 7^{13}$

a = 28
b = 14

НОД (28; 14) = 14
НОК (28; 14) = 28

$a \cdot b \cdot c = 5^{18} \cdot 7^{16} \cdot 7 \cdot 5 = 5^{19} \cdot 7^{17}$

a = 121 b = 44
НОД(a; b) = 11
НОК (a; b) = 484

НОД(a; b) · НОК(a; b) = a · b.

$a = 5 \cdot 7^2$
$b = 5^{100} \cdot 7$
$c = 5 \cdot 7$

НОД(a; b; c) = 5 · 7
НОК(a; b; c) = $5^{100} \cdot 7^2$

$5 \cdot 7^2 \cdot 5^{100} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 5^{102} \cdot 7^4$

$5^{101} \cdot 7^3$

1 1 2
1 2 1
2 1 1 3

1 1 3
1 3 2
2 3 1
2 1 3
3 1 2
3 2 1 6

$НОД^2(a; b; c) \cdot НОК(a; b; c) =$
= abc.

$5^{20} \cdot 7^{18}$

5^2
5^n
5^k

5^2

a = 5 · 7 = 35
b = 35
c = 35

$5^{17} \cdot 7^{15}$ $5^{17} \cdot 7^{15}$

8100
× 6
48600

255

~~17 · 15 = 1020~~ 15 · 15 + 15 · 2 = 225 + 30 = 255

Ответ: 255

	5	7
a	5	7
b	5^{18}	7^{16}
c	17	15

3! · 17 · 15 · 3! =

= 225 · 36

225
× 36
1350
675
8100

8100 = 6 · 6 · 15 · 15 = $(6 \cdot 15)^2 = 90^2 = 8100$

Ответ 8100 : 3!