# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100405**

ID профиля: **801718**

Вариант 21

Чистовик

Вариант 2 1
Часть 1

**№1** $(a_n) \div$, $a_n \in \mathbb{Z}$, $\nearrow$

$S_7 = S$ $\quad a_8 \cdot a_{17} > S+27$ $\quad a_1 = \{?; ?; \dots ?\}$

$a_{11} \cdot a_{14} < S+60$

Решение:

$S_7 = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 = 7a_1+21d$;

$a_8 = a_1+7d$
$a_{17} = a_1+16d$
$a_{11} = a_1+10d$
$a_{14} = a_1+13d$
опр св-во ар. прог.

$a_1^2+23da_1+112d^2$

$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$

$a_1^2+23da_1+130d^2$

$\begin{cases} a_1^2+23da_1+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ -(a_1^2+23da_1+130d^2) > -(7a_1+21d+60) \end{cases}$ $+ \Rightarrow -18d^2 > -33 \,| \cdot (-1)$

$d^2 < \frac{33}{18}$

$1\frac{15}{18}$

$0 \le d^2 < 2$, $\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < d \le 0 \\ 0 \le d < \sqrt{2} \end{array}\right.$

$a_n \nearrow, a_n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{d=1}$

$\begin{cases} d=1 \\ a_1^2+16a_1+64>0 \quad (1) \\ a_1^2+16a_1+49<0 \quad (2) \end{cases}$

(1) $(a_1+8)^2 > 0$.
$a_1 \ne -8$

(2) $D_1 = 64-49 = 15$
$a_1 = -8 \pm \sqrt{15}$; $a_1 \in \mathbb{Z}$.

$-8-\sqrt{15} < a_1 < -8+\sqrt{15}$.

$-12 < a_1 < -4$
$a_1 \ne -8$

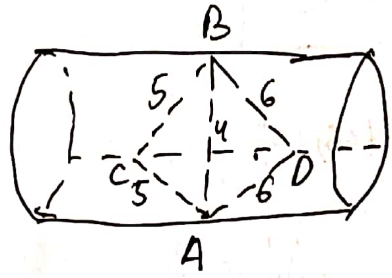
$-12 < -8-\sqrt{15} < -11$

$-5 < -8+\sqrt{15} < -4$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$

**Чистовик**

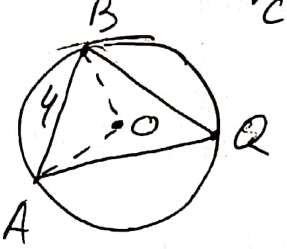
**№2** ABCD впис в цилиндр,
все верш. $\in$ б.п.; (CD) || оси
$r$ цил. min    $CD = ?$



## Решение:

⊛ поясн.

1) Д.п. $\alpha \mid (AB) \subset \alpha$, $\alpha \parallel$ осн, $\cap (CD) = Q$, в сеч – окр. с ц O, $r = r_{цил}$

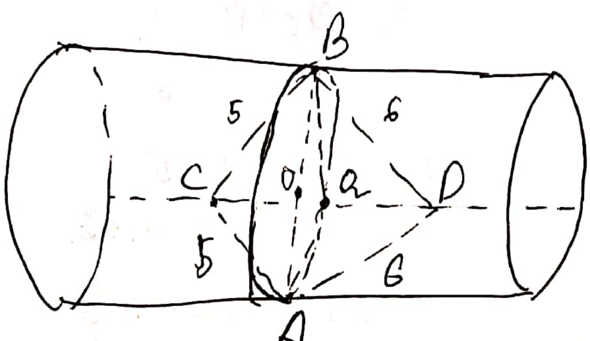


Рассмотрим $\triangle ABO$:
согл. нер $\triangle$ $r + r > AB$, т.е.
$2r > 4$, $r > 2$.
min радиус цил получим при усл, что [AB] явл d дан. сеч,
тогда $2r = 4$ и $r = 2$ – мин $r$

⊛ Точки A, B равноуд от C и равноуд от D;
$\left.\begin{array}{l}(CD) \parallel \text{оси (усл.)}, \\ C, D \in \text{б.п. (усл.)}\end{array}\right| \Rightarrow C, D \in$ обр.

Если через D провести плоск (пл. || осн), то A и B будут равноуд. от неё,
следовательно, (AB) || дан пл, зн. || осн (транз.)

2)



$\left.\begin{array}{l}(CD) \parallel \text{оси} \\ \alpha \parallel \text{осн}\end{array}\right| \Rightarrow (CD) \perp \alpha$,

Тогда $\angle BQD = \angle AQD = 90^\circ$ (пр $\perp$ пр и пл.)

$\triangle BQD = \triangle AQD$ (по кат. и гип)

$\left.\begin{array}{l}BQ = AQ \\ [AB] - d\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\triangle ABQ - \text{п/б и } \angle Q = 90^\circ \\ AB = 4\end{array}\right| \Rightarrow BQ = AQ = 2\sqrt{2}$.

$CD = CQ + QD$

Из $\triangle BQD$
Т.П. $\underset{36}{BD^2} = QD^2 + \underset{8}{BQ^2}$   $QD^2 = 28$,
$QD = 2\sqrt{7}$.

$\triangle CBQ$:
Т.П. $\underset{25}{CB^2} = CQ^2 + \underset{8}{BQ^2}$   $CQ = \sqrt{17}$

2

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

# Чистовик

**№3:**
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \; (1)\\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

M сост из всех $(x,y)$ | $\exists (a,b)$, при кот. вып. система

$S_M = ?$

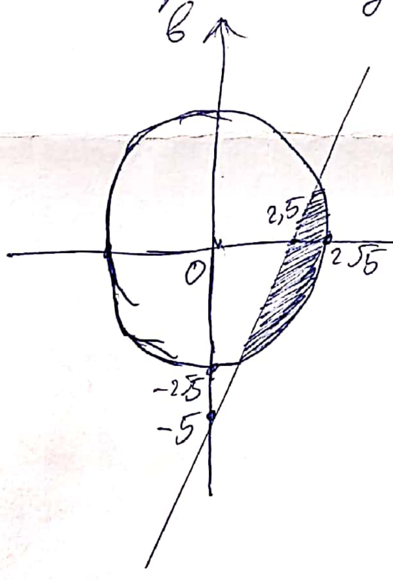
Решение:

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ — задаёт плоск внутри окр с ц $(a;b)$ и $R = 2\sqrt{5}$

(2): $a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$.

Если $8a-4b>20$, то $2a-b>5$,
$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 20\\ b < 2a-5\end{cases}$$

Рассмотрим систему коорд $(aOb)$:



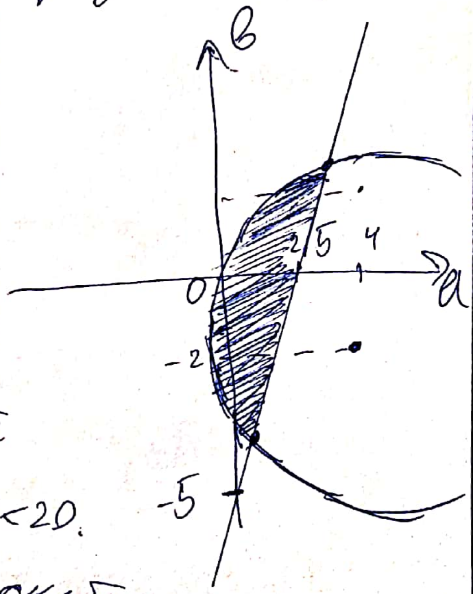

$a^2+b^2 \le 20$ (мн-во внутри окр. с ц$(0;0)$ и $R=2\sqrt{5}$)

$b=2a-5$ – прям.,
$b<2a-5$

Нас интересуют $(a,b)$ из закраш. обл.

Если $8a-4b<20$,
то $2a-b<5$, $b>2a-5$
$a^2+b^2 \le 8a-4b$, т.е.
$a^2-8a+b^2+4b \le 0$, т.е.
$$\begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \text{ – ур мн-ва внутри окр (ц}(4;-2) \text{ и } R=2\sqrt{5})\\ b>2a-5\end{cases}$$

Перейдём в $(aOb)$




Если $\forall$ пары $(a,b)$ из данных закраш. областей подставлять в нер(1), то получим $(x-a)^2+(y-b)^2<20$.

Если брать из данных рисунков пары$(a,b)$, $\in$ окр, то получим max значение и $(x-a)^2+(y-b)^2=20$, т.е.

$S_{max}\, M = \pi R^2 = 20\pi$.

Ответ: $S_{max} = 20\pi$.

3

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100405**

ID профиля: **801718**

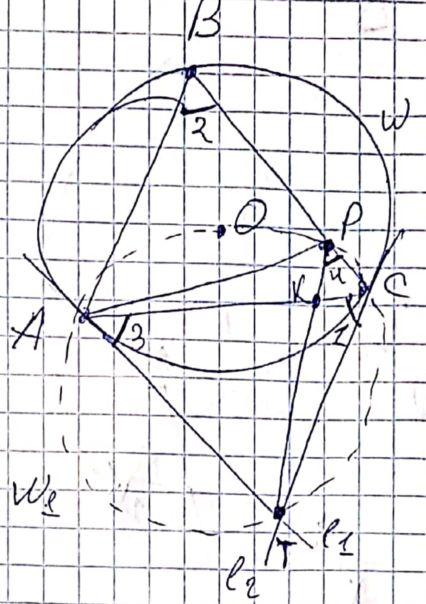
Вариант 21

Чистовик

Вариант 21

Часть II

6




$S_{APK}=12$

$S_{PKC}=9$

$l_1, l_2$ – кас к $\omega$ в т. A, C соотв.

$\angle B=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

$S_{ABC}=?$

$AC=?$

Решение.

1) Д. п. [AO], [CO] – R окр. ω, тогда $\angle OAT=\angle OCT=90^\circ$ (опр. кас),

Тогда AOCT впис в окр (призн.)
A, O, C ∈ Окр $\omega_1$ (усл.) | ⇒ A, O, C, T ∈ Окр $\omega_1$

2) $\overset{\angle 1}{\angle ACT}=\frac{1}{2}\breve{AC}$ (Между кас и хорд.

$\overset{\angle 2}{\angle ABC}=\frac{1}{2}\breve{AC}$ (Впис. оп. на $\breve{AC}$)

△ ACT: AT=TC (отп. кас), зн △ р/б (опр.) и ∠A=∠C (св-во),

$\angle 3=\angle 1=\angle 2$

$\angle TAC=\frac{1}{2}\breve{TC}$

$\angle TPC=\frac{1}{2}\breve{TC}$ (Впис. оп. на $\breve{TC}$) | ⇒ ∠3=∠4 =∠1=∠2 док.-м

Тогда ∠ABC=∠TPC и явл.
соотв. при (AB), (PT), сек. (BC), зн.
(AB)||(PT) (призн.)

3) $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}}=\frac{h_p\cdot AK}{h_p\cdot KC}=\frac{AK}{KC}$ (общ. h) $=\frac{4}{3}$ (из усл.)

△ABC: (PK)||(AB) (п. 2), ∠4=∠2 (док.), зн.

△ ABC ~ △ KPC (по 2)

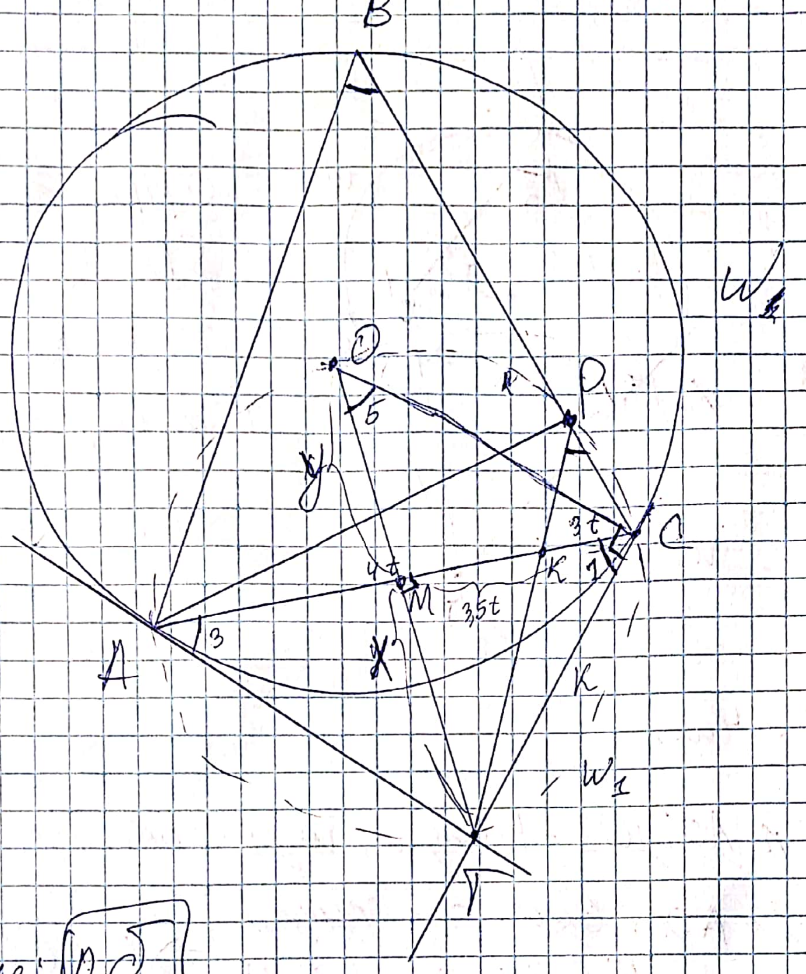
$\frac{CK}{CA}=\frac{3}{7}$ ; $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}}=\left(\frac{7}{3}\right)^2$, $S_{ABC}=\frac{49}{9}S_{PKC}=49$

Ответ: 49

1

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$, $AC = ?$

Чистовик




Решение: п.б

1) из п.(а) $\frac{CK}{KA} = \frac{3}{4}$; Пусть $t$ - коэф. проп, тогда

$CK = 3t$,
$AK = 4t$

Д.П. $[OC]$ - R,
$[OT]$, $[OT] \cap [AC] = M$.

$\angle OCT = 90^0$ (отр. кас) и отр. на $(OT)$) $\Rightarrow$ $[OT]$ - $d$ окр. $W_1$

из п.(а) $\angle 1 = \angle 3$
$\angle 3 = \angle MOC$ (впис. оп. на TC) $\Rightarrow$ $= \angle 1 = \angle 5$

2) $\angle 1 + \angle OCM = 90^0$ (а.и.о.)
$\angle 1 = \angle 5$ (п.1) $\Rightarrow$ $\angle 5 + \angle OCM = 90^0$, зн. $\angle M = 90^0$, зн $(OT) \perp (AC)$, $[OT]$ - $d$, $[AC]$ - хорда окр. $W_1$ $\Rightarrow$ $M$ - сер. $[AC]$, $AM = MC = \underline{3,5t}$

$\triangle MOC$: $\angle O = \angle B$ (п.а), зн.
$\angle O = \angle B = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ (усл.)

$\operatorname{tg} O = \frac{MC}{OM}$, $MC = OM \operatorname{tg} O$
$3,5t = \frac{3}{4} y$

2

3) Пусть $OM = y$, $MT = x$, $CT = K$, $OC = R$ (п.а) **Чистовик**

Тогда $\triangle OMC$: т.П. $\left\{\begin{array}{l} y^2 + (\frac{7}{2}t)^2 = R^2 \quad (1) \end{array}\right.$

$\triangle MTC$: т.П. $\quad x^2 + (\frac{7}{2}t)^2 = K^2 \quad (2)$

$\triangle OCT$: т.П. $\quad K^2 + R^2 = (x+y)^2 \quad (3)$

$\boxed{\frac{7}{2}t = \frac{3}{4}y \quad п.(2)}$

(2) и (3): $x^2 + (\frac{7}{2}t)^2 + R^2 = (x+y)^2$

$\cancel{x^2} + (\frac{3}{4}y)^2 + R^2 = \cancel{x^2} + 2xy + y^2$

из 1 $R^2 = y^2 + (\frac{7}{2}t)^2$ $\quad (\frac{3}{4}y)^2 + (\frac{3}{4}y)^2 + \cancel{y^2} = 2xy + \cancel{y^2}$

$\frac{18}{49}y^2 - 2xy = 0$
$y > 0$ (а.и.о.) $\Rightarrow \frac{9}{49}y = x$,

$y = \frac{49}{9}x$

4) $\triangle TMC \sim \triangle TCO$ (по 2-м $\angle$)

$\frac{TC}{TO} = \frac{TM}{TC} = \frac{MC}{CO}$; т.е. $\frac{K}{x+y} = \frac{x}{K} = \frac{3,5t}{R}$

$x^2 + xy = K^2$
$y = \frac{49}{9}x$ (п.3) $\Rightarrow x^2 + \frac{49}{9}x^2 = K^2$

$x^2 = \frac{9}{58}K^2$
$x, K > 0$ (а.и.о) $\Rightarrow x = \frac{3K}{\sqrt{58}}$

Тогда $\frac{3,5t}{R} = \frac{x}{K} = \frac{3K}{\sqrt{58}\cdot K} = \frac{3}{\sqrt{58}}$.

$\frac{7}{2}t = \frac{3}{\sqrt{58}}R$.

5) $\triangle OMC$: т.П $y^2 + (\frac{7}{2}t)^2 = R^2$

$y = \frac{49}{6}t = \frac{7}{3}(\frac{7}{2}t)$ $\quad \frac{49}{9}(\frac{7}{2}t)^2 + (\frac{7}{2}t)^2 = R^2$;

$\frac{7}{2}t = \frac{3}{\sqrt{58}}R$.

$\frac{49}{9} \cdot \frac{9}{58}R^2 + \frac{9}{58}R^2 = R^2$

(5) Черновик

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1),\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2,\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$.

ОДЗ:
$$\begin{cases}2x-3>0,\ \neq 1\\ x+1>0,\ \neq 1\\ 2x^2-3x+5>0,\ \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ x\neq 2\\ x>-1\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ x\neq 2\end{cases}$$

$2x^2-3x+5>0$
$D=9-8\cdot 5<0,\ 2x^2-3x+5>0$

$2x^2-3x+5=1$
$2x^2-3x+4=0$
$D=9-16\cdot 2<0$, нет реш.

Пусть $2x-3=a$
$x+1=b$
$2x^2-3x+5=c$

(1) $\log_{a^{\frac{1}{2}}} b$, (2) $\log_c a^2$, (3) $\log_b c$

$\boxed{\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}}$

I случ. (1)=(2), (3) < на 1!

$$\begin{cases}\log_{a^{\frac{1}{2}}} b=\log_c a^2 \quad (1)\\ \log_b c = n-1\end{cases}$$

(1): $\log_{a^{\frac{1}{2}}} b=\log_c a^2$
$2\log_a b=2\log_c a$ (не т. 11, т.к. a осн.)
$\log_a b=\log_c a$

$\log_c b=\log_a b\cdot\log_c a$ (осн. св-во log)
$\log_c b=\log_a^2 b=\frac{1}{\log_b c}$

$2\log_a b-1=\frac{1}{\log_a^2 b}$, $t=\log_a b$.

$2t-1=\frac{1}{t^2}$;

$\frac{2t^3-t^2-1}{t^2}=0$

$$\begin{cases}t\neq 0\\ 2t^3-t^2-1=0\end{cases}$$
$(t-1)(2t^2+t+1)=0$, $\underline{t=1}$.
$D=1-8<0$

ОДЗ: $\log_a b=1$, т.е.

$\log_{2x-3}(x+1)=\frac{1}{\log_{2x-3}(2x+3)}$

$\cancel{(2x+3-1)(x+1-(2x+3))=0}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3>1\\ x+1=2x+3\end{cases}\\ \begin{cases}0<2x-3<1\\ x+1=-(2x+3)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2\\ -7>1\end{cases}\ \varnothing\\ \begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\ -\frac{8}{3}-3>0\end{cases}\ \varnothing.\end{array}\right.$$

(4)

2 случ. (2)=(3), (1) < на 1 — Листовик

лест 11, т.к в сист. а восх.

$$\begin{cases} \log_c a^2 = \log_b c \\ \log_{a^{\frac12}} b = -1 \end{cases}$$

$\to 2\log_c a = \log_b c$

$\log_b a = \log_b c \cdot \log_c a$

$\log_b a = 2\log_c^2 a$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{2\log_c^2 a}$

$$\frac{1}{\log_c^2 a} = \log_c a^2 - 1$$

$\log_c a = p.$

$2p - 1 = \frac{1}{p^2}$

$\frac{2p^3 - p^2 - 1}{p^2} = 0,$ $\begin{cases} p \neq 0 \\ (p-1)(2p^2+p+1) = 0 \end{cases}$

$D = 1 - 8 < 0$, нет. реш.

$p = 1$

(0.3) $\log_c a = 1,$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = \frac{1}{\log_{2x^2-3x+5}(2x^2-3x+5)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2-3x+5 > 1 \text{ верно } \forall x \text{ (см ОДЗ)} \\ 2x-3 = 2x^2-3x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x^2-3x+5 < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\to 2x^2 - 5x + 8 = 0$, $D = 25 - 64 < 0$, $\varnothing$

$\varnothing$

3 случ. (1)=(3), (2) < на 1

$$\begin{cases} \log_{a^{\frac12}} b = \log_b c \\ \log_c a^2 = -1 \end{cases}$$

$2\log_a b = \log_b c$

$\log_a c = \log_b c \cdot \log_a b.$

$\log_a c = 2\log_a^2 b$

$\log_c a = \frac{1}{2\log_a^2 b}.$

$2\log_c a = \log_a b - 1$

$\frac{1}{\log_a^2 b} = 2\underbrace{\log_a b}_{m} - 1.$

$\frac{2m^3 - m^2 - 1}{m^2} = 0$ $\begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \text{ (см. выше)} \end{cases},$

Чистовик

0.3 $\log_a b = 1$, т.е.

$\log_{2x-3}(x+1) = 1$ нет реш. (см. случ(1))

Вывод: нет таких $x$.

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$ $N_{abc}=?$

НОД: 6 15
$2\cdot 3$ $3\cdot 5$
3

НОК: 6 15
$2\cdot 3$ $3\cdot 5$
$2\cdot 3\cdot 5 = \underline{30}$

НОД = 35 НОК $= 5^{18}\cdot 7^{16} = (5\cdot 7)^{16}\cdot 5^2 = \underline{35\cdot 25}$

a b c a b c

Пусть $35\cdot x$ $35\cdot y$ $35\cdot z$ $35\cdot x$, $35\cdot y$, $35\cdot z$ ~~$x\cdot y\cdot z = 25$.~~

$5\cdot 7 = 35$.

подобрать тройки $x, y, z$ такие, что...

не подходит.

$25 = \overbrace{5\cdot 5} = 25\cdot 1$.

$\left.\begin{matrix}(25;1;1)\\(1;1;25)\\(1;25;1)\end{matrix}\right\}$ 3

~~$C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$~~

~~5 и 5: (5;5;1), (5;1;5), (1;5;5)~~

~~Ответ: 6 троек.~~

Ответ: 3 тройки.