Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100395**

ID профиля: **863541**

Вариант 21

Чистовик

1

№1 $S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7(a_1 + 3d)$

Пусть $a_1 = x$, $d > 0$, поскольку прогрессия возрастающая, d-целое

$$\begin{cases} 7(x+3d) + 27 < (x+7d)(x+16d) \quad (1) \\ (x+10d)(x+13d) < (x+3d)7 + 60 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $7x + 21d + 27 < x^2 + 16dx + 7dx + 112d^2$

$x^2 + 23dx - 7x > 21d + 27 - 112d^2$

(2) $x^2 + 13dx + 10dx + 130d^2 < 7x + 21d + \cancel{18d}\ 60$

$x^2 + 23dx - 7x < \cancel{48d - 130d^2 + 60}\ 21d - 130d^2 + 60$

$$\begin{cases} x^2 + 23dx - 7x > 21d + 27 - 112d^2 \\ x^2 + 23dx - 7x < 21d + 60 - 130d^2 \end{cases}$$

$\cancel{21d} + 27 - 112d^2 < \cancel{21d} + 60 - 130d^2$

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{33}{18}$

$d < \sqrt{\frac{33}{18}}$

$d \leq 1$

$\boxed{d = 1}$ (прогрессия возрастающая, a - целое)

Подставим значение d в I выражение

$7(x+3) + 27 < (x+7)(x+16)$

$\cancel{7x} + 21 + 27 < x^2 + 16x + \cancel{7x} + 112$

$x^2 + 16x + 64 > 0$

$(x+8)^2 > 0$

$x \neq -8$

№1 (продолжение) Чистовик ②

$$(x+10)(x+13) < 7x+21+60$$

$$x^2+16x+49>0$$

$$D=\cancel{196-136}\ 256-196=60$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-16+\sqrt{60}}{2}=\sqrt{15}-8 \\ x_2=-8-\sqrt{15} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x\in(-8-\sqrt{15};\ \cancel{xш}\ -8+\sqrt{15}) \\ x\in\mathbb{Z}/\{-8\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

№3

Чистовик

③

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \quad ① \\ a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b; 20) \quad ② \end{cases}$$

~~① – площадь круга, включающая его периметр с радиусом $\sqrt{20}$ и двигающийся с центром $(a; b)$~~

~~(2)~~ Найдем условие, при к-х $8a - 4b = 20$

$2a - b = 5$

$b = 2a - 5$ – задается прямой с отриц. наклоном

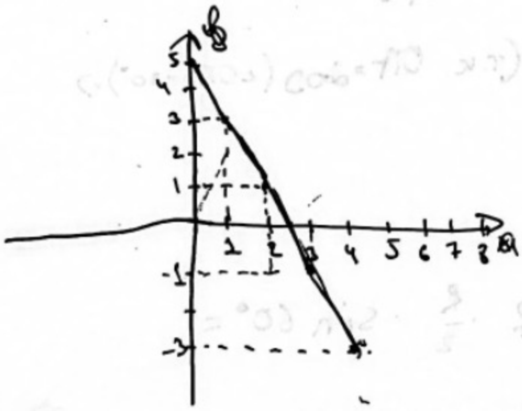
~~Заметим, что a всегда ≥ 0, покажем~~

~~$a^2 + b^2 \ge 0$, при условии что~~

~~b неотриц. ≥ 0~~

~~$8a - 4b \ge 0$~~

~~$2a \ge b$~~



Найдем условие, при к-м $a^2 + b^2 \le 8a - 4b$
~~тог~~ и $8a - 4b \le 20$

$a^2 - 8a + b^2 + 4b \le 0$

$a(a-8) + b(b+4) \le 0$

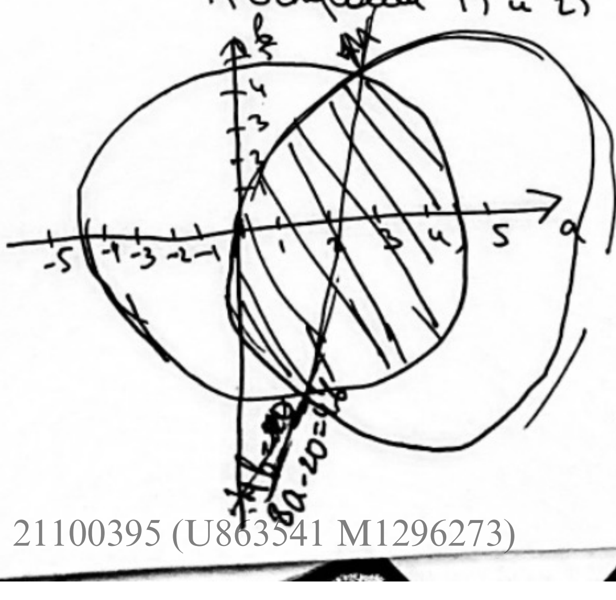
~~$a^2 - 8$~~ $(a^2 - 8a + 16) - 16 + (b^2 + 4b + 4) - 4 \le 0$

1) $\boxed{(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20}$

Найдем условие, при к-м $8a - 4b > 20$, тогда

2) $\boxed{a^2 + b^2 \le 20}$

Построим 1) и 2) в осях a, b



Обозначим полученную область a и b за G.

Область G показывает все возможные пары чисел a, b, к-е удовл. условию.

При этом каждая пара чисел является центром окр-ти $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 20$

Заметим, что область G – это 2 одинаковых сегмента

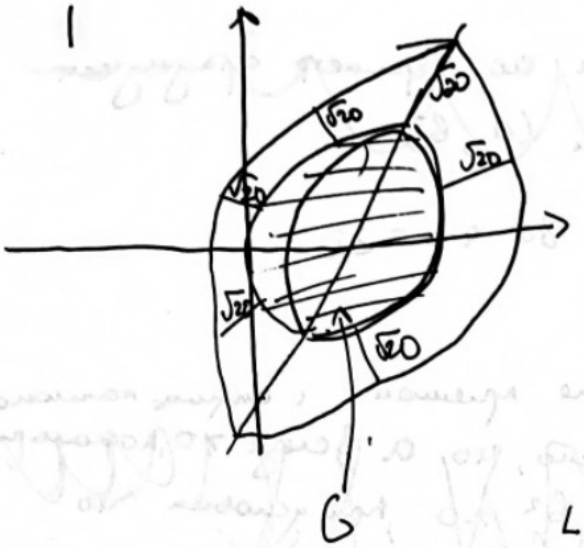
21100395 (U863541 M1296273)

Чистовик

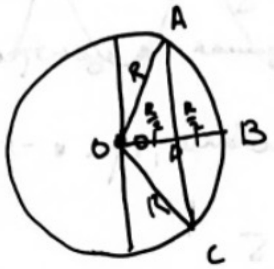
(4)

№3 (продолжение)

Искомая фигура М - это увеличенная область G на $R = \sqrt{20}$



Найдем $S_{сегмента}$



$S_{сегмента} = S_{сектора} - S_{\triangle OAC}$

$\angle AOD = 60°$ (т.к. $OA = 2OD$ ($\angle OAD = 30°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ угол сектора $= 120°$

$S_{сектора} = \frac{1}{3}\pi R^2$

$S_{\triangle OAC} = 2 \cdot S_{\triangle OAD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{R}{2} \cdot \sin 60° =$

$= \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$

$S_{сегмента} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3})$

Площадь М $= 2 \cdot S_{сегмента} = \frac{R^2}{6} (4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{(2\sqrt{20})^2}{6} (4\pi - 3\sqrt{3}) =$

$= \frac{4 \cdot 20}{6} (4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{40}{3} (4\pi - 3\sqrt{3})$

Ответ: $\frac{40}{3} (4\pi - 3\sqrt{3})$

21100395 (U863541 M1296273)

$a + a$

~~Чистовик~~ Черновик

№3 $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \; (1) \\ a^2 + b^2 \le \min(6a - 4b, 20) \; (2) \end{cases}$

(1) - площадь внутри круга с радиусом $\sqrt{20}$ и движущимся центром

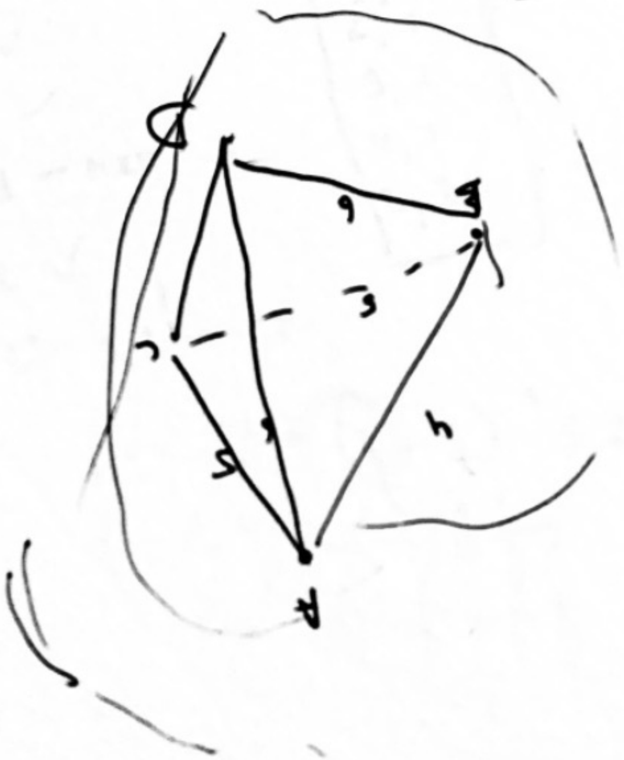
Чистовик Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,\ 20)\end{cases}$$

Рассмотрим условие на a и b и найдем допустимое значение

Если $8a-4b\le 20$, то $a^2+b^2\le 8a-4b$

$(a-4)^2+(b+2$



6

21100395 (U863541 M1296273)

18 с

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le (\sqrt{20})^2 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b;\,20)\end{cases}$$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\boxed{a, b \ge 0}$

~~x^2+16x+~~

$(x-2)(x-20) \le 0$

$a = b = 1$

$16 - 4 = 12$ 2, 1 ✓

~~1, 2 ✓~~ 1, 2 — нет

1, 0

1, 1

2, 1

3, 1

4, 1

2, 2

3, 1 ✓

4, 1 ✓

5, 1 — нет

2, 2 ✓

3, 2 — нет

$8 \cdot 2 - 4 = 12$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 \le 20$

$a^2 + b^2 - 12ab \le 0$

$a^2 - 12ab + b^2 \le 0$

$D = 144 - 4 = 140$

~~$S = \sqrt{20}\pi$~~

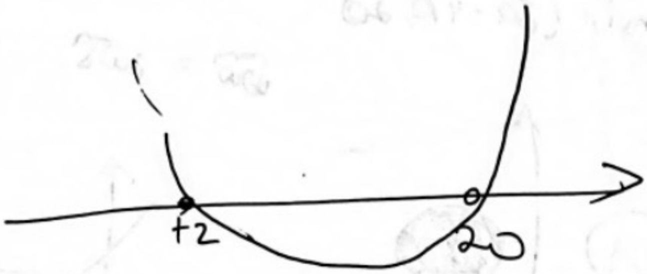
$\boxed{S = 20\pi}$

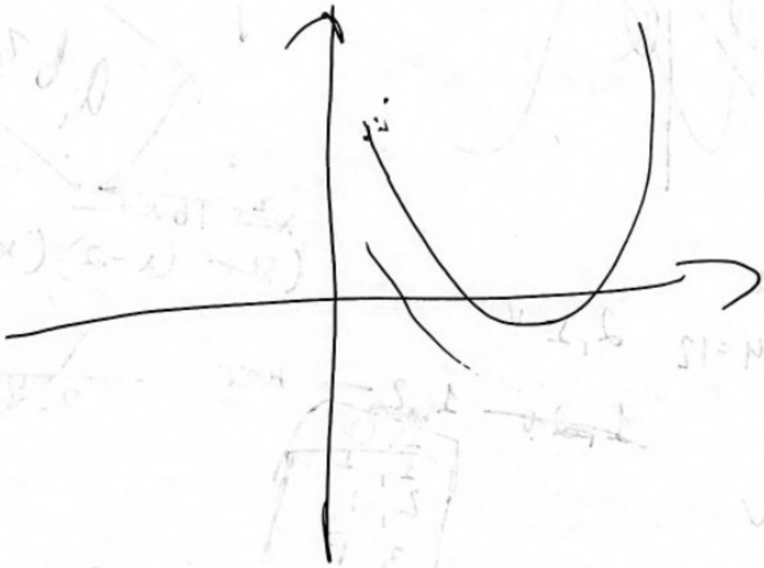
$\boxed{4 + 1 \le 12}$

21100395 (U863541 M1296273)

Черновик

$(x-2)(x-20)\leq 0$





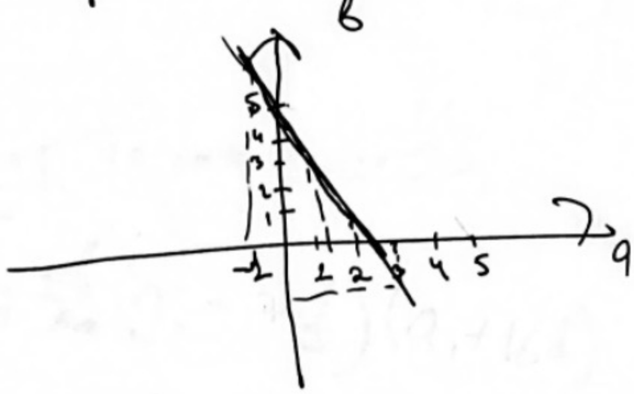
Черновик

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{\cancel{33}\ 11}{\cancel{18}\ 6}$

$d < \sqrt{\frac{11}{6}}$

$d \leq 1$



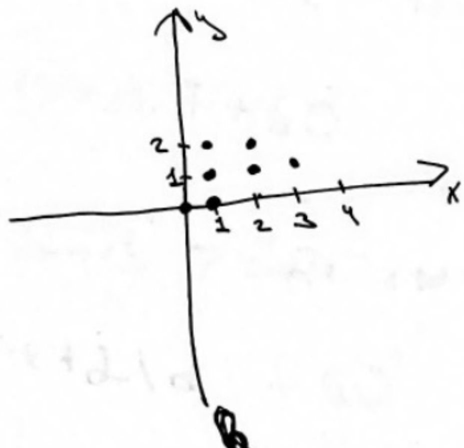
$(x+3)7 + 27 < (x+7)(x+16)$

$7x + 21 + 27 < x^2 + 16x + \cancel{7x} + 112$

$x^2 + 16x + 64 < 0$

$(x+8)^2 < 0$

x



16
16
96
16
256

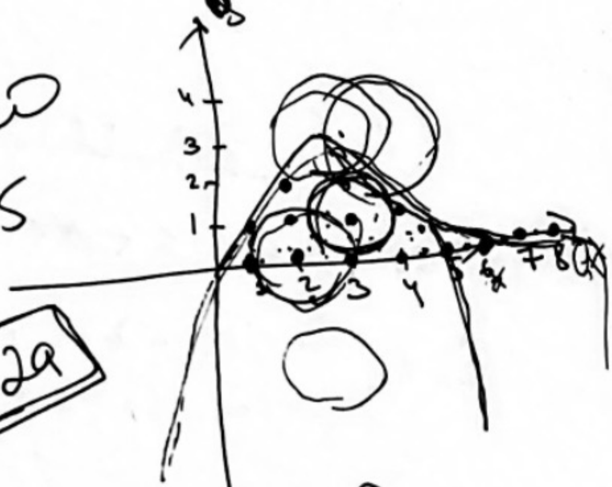
17
17
119
17
289

$x=0$

$8a - 4b = 20$

$2a - b = 5$

$\boxed{b = 5 - 2a}$



$x=0$

Черновик

$\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7+27>$

$a_1+(n+6)a_7$

$a_1+\cancel{2a_1}$ $a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d+a_1+5d$

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7+27>(a_1+7d)(a_1+16d) \\ (a_1+10d)(a_1+13d)<\frac{a_1+a_1+6d}{2}+60 \end{cases}$$

$a_1=x$

$$\begin{cases} (x+3d)7+27>(x+7d)(x+16d) \\ (x+10d)(x+13d)<(x+3d)7+60 \end{cases}$$

$x^2+23dx+112d^2>27+7x+21d$

$x^2+23dx+130d^2<7x+21d+60$

$x^2+13dx-7x$

$\cancel{x^2+23dx+112d^2>7x+21d+27}$

$\cancel{x^2+23dx}$ $x^2+23dx-7x>21d+27-112d^2$

$x^2+23dx-7x<21d-130d^2+60$

$\cancel{21d}+27-112d^2<\cancel{21d}-130d^2+60$

$+18d^2$

Чистовик Черновик

№1 (продолжение)

~~$x^2 + 13 x + 10$~~

$(x+10)(x+13) < (x+3)\,7 + 60$

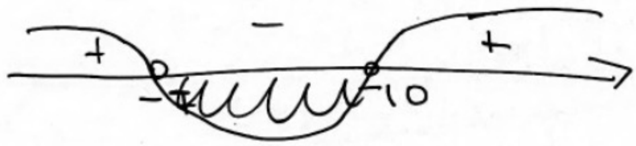
$x^2 + 13x + 10x + 130 < 7x + 21 + 60$

$x^2 + 17x + 70 < 0$

$D = 289 - 280 = 9$

$x_1 = \frac{-17+3}{2} = -7$

$x_2 = \frac{-17-3}{2} = -10$



$$\begin{cases} x \in (-7; -10) \\ x \in Z / \{-8\} \end{cases}$$

$x = -9$

Ответ: -9

Чистовик

№1 $S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7(a_1 + 3d)$

Пусть $a_1 = x$, $d > 0$, поскольку прогрессия возрастающая, d-целое

$$\begin{cases} 7(x+3d) + 27 < (x+7d)(x+16d) \quad (1) \\ (x+10d)(x+13d) < (x+3d)\,7 + 60 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $7x + 21d + 27 < x^2 + 16dx + 7dx + 112d^2$

$x^2 + 23dx - 7x > 21d + 27 - 112d^2$

(2) $x^2 + 13dx + 10dx + 130d^2 < 7x + 21d + \cancel{18d}\, 60$

$x^2 + 23dx - 7x < \cancel{48d - 130d^2 + 60}\ 21d - 130d^2 + 60$

$$\begin{cases} x^2 + 23dx - 7x > 21d + 27 - 112d^2 \\ x^2 + 23dx - 7x < 21d + 60 - 130d^2 \end{cases}$$

$\cancel{21d} + 27 - 112d^2 < \cancel{21d} + 60 - 130d^2$

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{33}{18}$

$d < \sqrt{\frac{33}{18}}$

$d \leq 1$

$\boxed{d = 1}$ (прогрессия возрастающая, а - целое)

Подставим значение d в I выражение

$7(x+3) + 27 < (x+7)(x+16)$

$\cancel{7x} + 21 + 27 < x^2 + 16x + \cancel{7x} + 112$

$x^2 + 16x + 64 > 0$

$(x+8)^2 > 0$

$x \neq -8$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100395**

ID профиля: **863541**

Вариант 21

Чистовик (2)

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

Т.к $НОД(a,b,c) = 35$, то $a = 35a_1$, $b = 35b_1$, $c = 35c_1$, где a_1, b_1, c_1 - натуральные, при этом у них нет общего делителя, кроме 1 ($НОД\ a_1, b_1, c_1) = 1$

Если $НОД(a_1, b_1, c_1) > 1 = A$, тогда $НОД(a; b; c) = 35$, что противоречит условию

$НОК(a;b;c) = НОК(35a_1; 35b_1; 35c_1) = 35\, НОК(a_1;b_1;c_1) =$
$= 5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow НОК(a_1; b_1; c_1) = 5^{17}\cdot 7^{15}$

$a_1 = 5^m \cdot 7^n$
$b_1 = 5^p \cdot 7^t$
$c_1 = 5^x \cdot 7^y$

НО! $НОД(a_1; b_1; c_1) = 1 \Rightarrow$ возможна только ситуация, когда либо другая перестановка между a_1, b_1, c_1

$a_1 = 5^m \cdot 7^n$!
$b_1 = 5^p$
$c_1 = 7^y$

$НОК(a_1; b_1; c_1) = 5^{17}\cdot 7^{15} = 5^{m\ или\ p}\cdot 7^{n\ или\ y}$

Заметим, что одно из чисел m или p всегда должно быть равно 17.

А одно из чисел n или y всегда должно быть $= 15$.

m	0	1	2	...	17	17	17
p	17	17	17	...	2	1	0

- 35 вариантов пар m и p

n	0	1	2	...	15	15	15
y	15	15	15	...	2	1	0

- 31 вариант n и y.

Чистовик (2)

№4 продолжение

Выбор пар (m и p) не зависит от выбора (n и y) $\to$

$\Rightarrow$ Кол-во комбинаций $= 35 \cdot 31 = 1085$

Теперь учтем перестановки a_1; b_1; c_1

$P(3) = 3! = 6 \Rightarrow$ Общее ~~число~~ число троек a_1, b_1, c_1 = общее число троек $a, b, c = 6 \cdot 1085 = 6510$

Ответ: 6510

Чистовик

№5 $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$,

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3\neq 1 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1,5 \\ x\neq 2 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \end{cases}$$

Обозначим логарифмы за A, B и C и рассмотрим их произведение

$A\cdot B\cdot C=\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot$

$\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2\log_{2x-3}(x+1)\cdot 2\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)\cdot$

$\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=4$

НО! Известно, что два числа равны ($A=B=A$), а третье меньше на 1: $A\cdot A\cdot(A-1)=4$

$A^3-A^2-4=0$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

Подставим $A=2$ - подходит

$(A-2)(A^2+A+2)=0\Rightarrow A=2$ - единственное решение

Получим, что исходное условие выполняется только, если 2 из 3-х логарифмов $=2$, а III равен 1.

№5 продолжение. Чистовик (4)

Рассмотрим различные случаи, когда сразу 2 логарифма вик могут быть равны 2

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2x-3 \\ + * \end{cases}$

$x=4$ подходит по ограничению (*)

2) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+5=2x-3 \\ (*) \end{cases}$

$2x^2-5x+8=0$

$D<0$

$\varnothing$

3) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=2x^2-3x+5 \\ (*) \end{cases}$

$x^2-5x+4=0$

$x_1=4$ - подходит по ограничению (*)

$x_2=1$ - не подходит по ограничению (*)

Получим, что единственный случай, когда 2 логарифма одновременно равны 2 бывает только при $x=4 \Rightarrow$ I и III логарифмы обращаются в 2

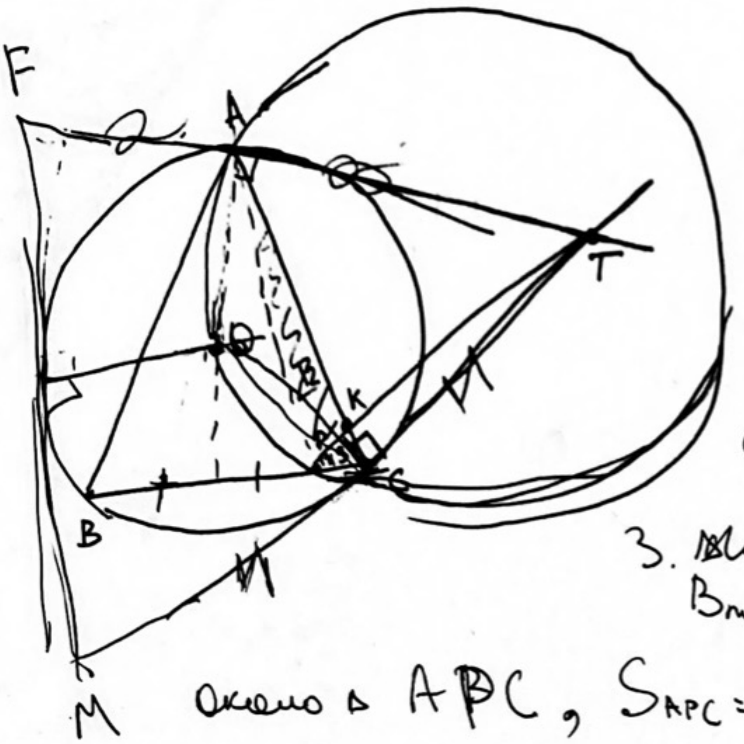
Рассмотрим значение II логарифма при $x=4$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{25}25=1$ - меньше 2 ровно на 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=4$ подходит

Ответ: $\boxed{x=4}$

Чистовик ⑤



1. Возле $\triangle ABC$ описана окружность => O - точка пересечения медиан

2. Достроим $\triangle TFM$.
В него вписана окружность ω =>
=> точки A и C - основания серединных перпендикуляров $\triangle TFM$

3. ~~ABC~~ $S_{ABC} = 12$
Вторая окружность ω_2 описана около $\triangle APC$, $S_{APC} = 12 + 9 = 21$ => ~~21 = 3R~~

$$21 = \frac{3R}{ABC}$$

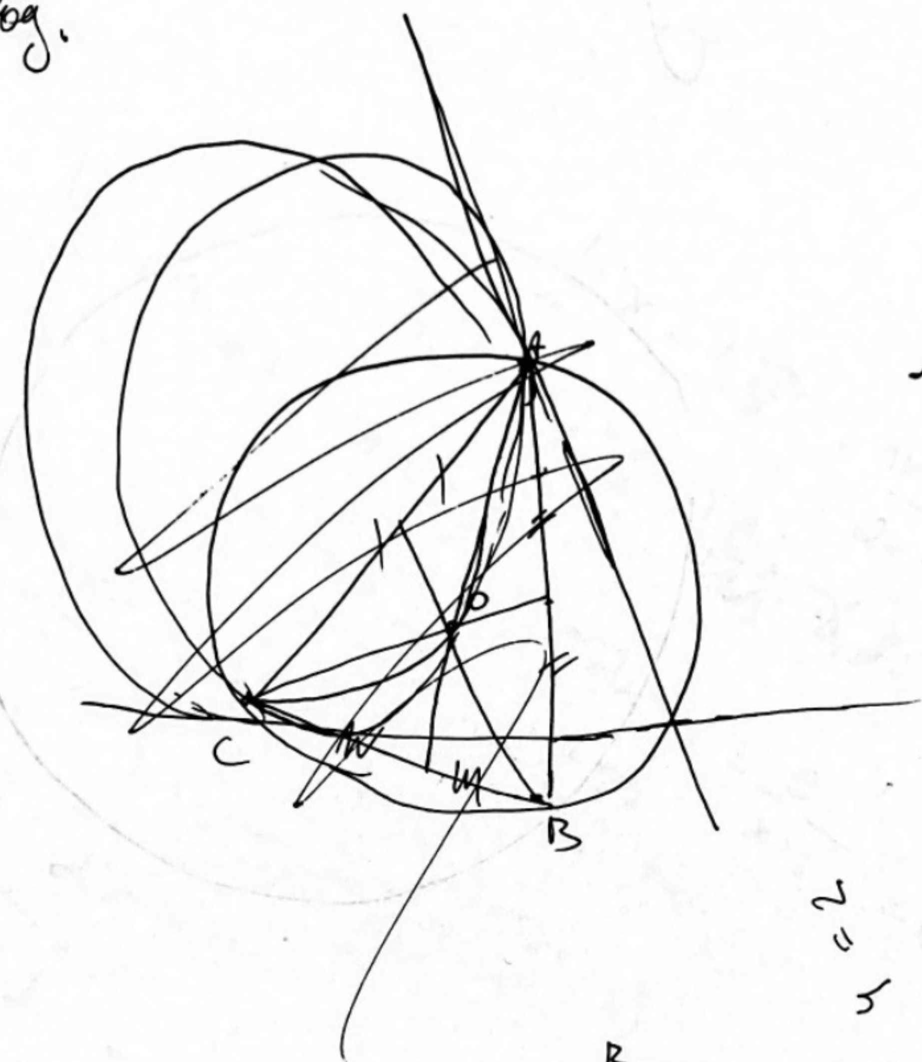
$\triangle AOC$ - равнобедренный (стороны - радиусы) =>

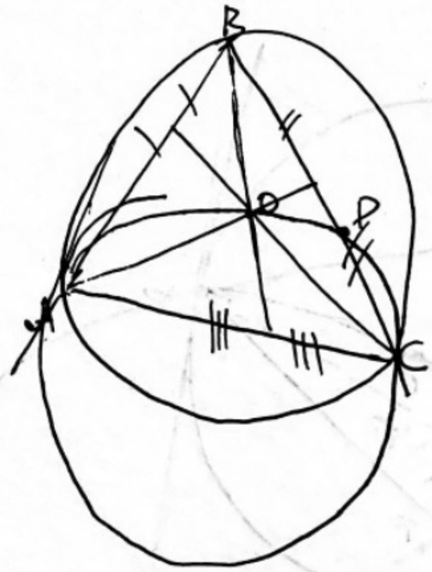
=> Аналогично, $\triangle AOB$ - р/б.

21100395 (U863541 M1296274)

Лог.

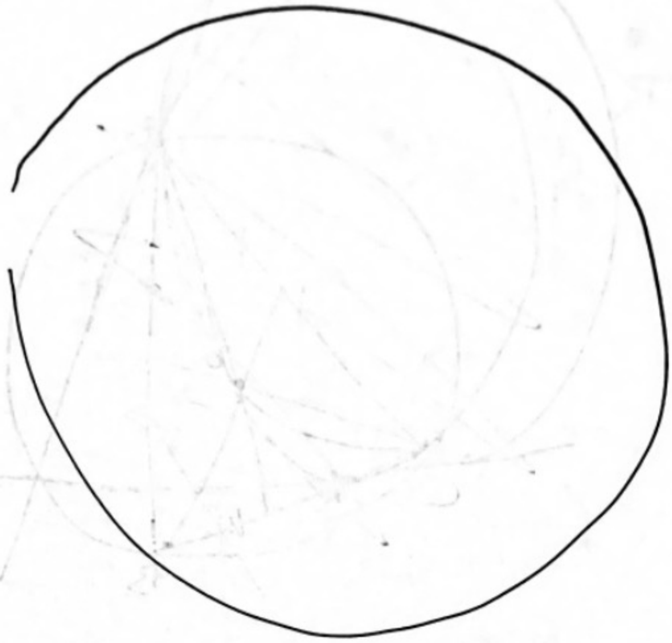
Черновик

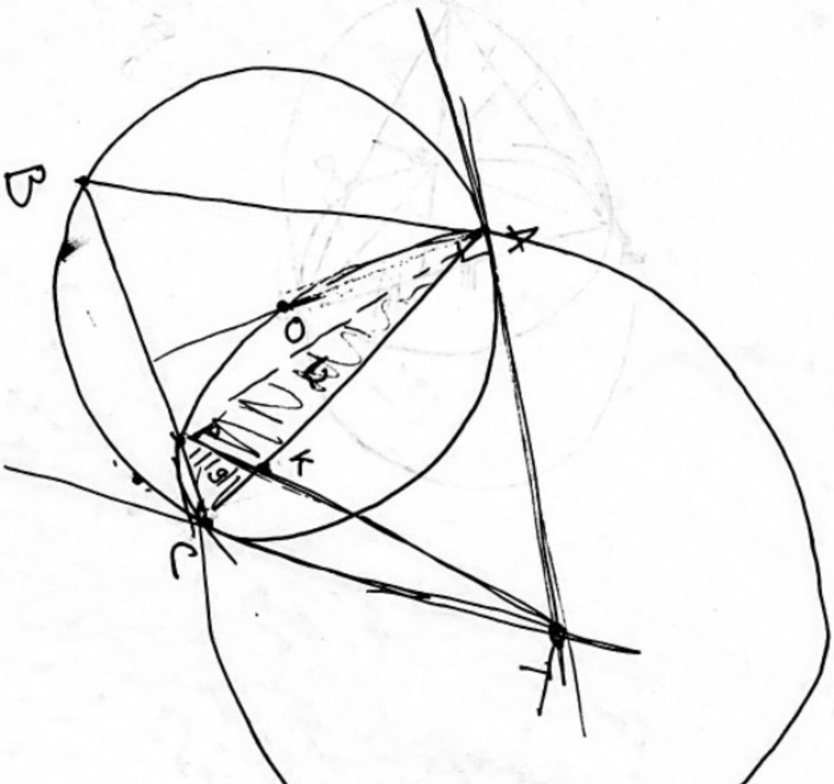




5Г.

Черновик





Уравнения

① $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 0$

$D = 9 -$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \frac{\log_{\sqrt{2x-3}}(\cancel{x+1}\ 2x^2-3x+5)}{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)} = 0$ $\quad \frac{1}{\log_{x+1} 2}$

$\log^2_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5) = 0$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\sqrt{2x-3}\,(x+1-2x^2+3x-5) = 0$

$2x^2+4x-4=0$ $\quad 2x=3$ - нет $\quad x+1=1$

$x^2+2x-2=0$ $\quad \varnothing$

$\varnothing$

② $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 0$

$\cancel{4}\log_{2x-3}(x+1) - \cancel{4}\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^4 = 0$

$\cancel{\tfrac{1}{2}}$ $\cancel{\log}$ $\log_{2x-3}(x+1) - \frac{4}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)} = 0$

$\cancel{\log_{2x-3}(x+1)\cdot\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)} = 4$

$\log_{2x-3}(x+1) - \log^{-1}_{2x-3}(2x^2-3x+5)^4 = 0$

$\log \quad \frac{1}{\frac{x}{2}} \quad 1 \cdot \frac{2}{x}$

Черновик

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5=-1$.

$$\begin{cases}(x+1)^y = 2x^2-3x+5 \\ \sqrt{2x-3}^{\,y} = x+1\end{cases}$$

~~Замена~~ $\cancel{x+1}$ Замена: $x+1=h$

$\sqrt{2x-3}=f$

$$\begin{cases}h^y = 5+(h-1)f^2 \\ f^y = h\end{cases}$$

$$f^{2y} = 5+(f^y-1)f^2$$

$$f^{2y} = 5+f^{2+y}-f^2=0$$

$$(f+f^y)^2+5=0$$

$$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-3}^{\,y})^2+5=0$$

21

21100395 (U863541 M1296274)

Черновик

$\log_{2x^2-3x+5}(4x^2-12x+9)$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$$\begin{cases}(x+1)^y = 2x^2-3x+5 \\ (2x^2-3x+5)^y = (2x-3)^2\end{cases}$$

$((x+1)^y)^y = (2x-3)^2$

$(x+1)^{y^2} = (2x-3)^3$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3)^2 = 4$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x^2-3x+5) = 1$

$\log_{(x+1)}(x+1) = 1$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 =$

$2x-3-x-1 = x-4$

21100395 (U863541 M1296274)

Черновик

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5$$

$\cancel{\lg(2x-3)x+5}$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+5 & x+1 \\ \hline -\,2x^2+2x & 2x-4 \\ -4x+5 & \\ -\,-4x-4 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & 2x-3 \\ \hline -\,x^2-1{,}5x & \frac{1}{2}x+1{,}75 \\ 3{,}5x+1 & \\ -\,3{,}5x-5{,}25 & \\ 6{,}25 & \end{array}$$

$$2x-4+\frac{9}{x+1}$$

$$\frac{1}{2}x+1{,}75+\frac{6{,}25}{2x-3}=2x-4+\frac{9}{x+1}$$

$\cancel{1{,}5x-5{,}75+\frac{9}{x+1}\ 6{,}25(x+1)}$

$$2x+7+\frac{25}{2x-3}-2x+4-\frac{9}{x+1}=0$$

$$11+\frac{25x+25-18x+27}{(x+1)(2x-3)}=0$$

$$\frac{7x+52+11(2x^2-3x+2x-3)}{(x+1)(2x-3)}=0$$

$$\frac{7x+52+22x^2-33x+22x-33}{(x+1)(2x-3)}=0$$

$22x^2-33.$

$\boxed{\begin{matrix}35\\70\\105\end{matrix}}$

$5^1 \cdot 7^1$

$5^1 \cdot 7^2$

$\boxed{5^9 \cdot 7^8}$

Черновик

$\boxed{\begin{matrix}5^1 & 7^1\\5^1 & 7^2\\5^{18}, & 7^{16}\end{matrix}}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) + 1 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\frac{\log_{x+1}(x+1)}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}} - \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = -1$

$\frac{1}{\frac{1}{2}\log_{x+1}} = \frac{2}{\log}$

$\frac{2}{\log_{x+1}} \quad \frac{2}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}$

$-\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = +1$

3

21100395 (U863541 M1296274)