Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100336**

ID профиля: **165316**

Вариант 21

№ 1. Черновик

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$

d - разность арифм. прогрессии.

$$S_7 = 7 \cdot \frac{a_1+a_7}{2} = 7 \cdot \frac{a_1+a_1+6d}{2} = 7(a_1+3d)$$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

1) $(a_1+7d)(a_1+16d) > \cancel{S_7+27}$

$7a_1+21d+27$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = \cancel{S_7}\ \cancel{7a_1+21d+60}\ a_1+13d$

2) $(a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +16 \\ 7 \\ \hline 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \times 16 \\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$\overbrace{(a_1^2+23da_1-7a_1-21d)}^{a}+112d^2>27$

$(a_1^2+23da_1-7a_1-21d)+130d^2<60$

$a+112d^2>27$

$a+130d^2<60$

$b = a_1^2 + 23da_1 + 112d^2 - 7a_1 - 21d$ Черновик

$b > 27$

$b + 18d^2 < 60$

$18d^2 + 27 < 60$

$d^2 < \frac{33}{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 \in \left(-\sqrt{\frac{33}{18}}; +\sqrt{\frac{33}{18}}\right)$, т.к.

прогрес.

$0 < \sqrt{\frac{33}{18}} < 2$

1, это и

2, то

$d = 1$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -27 \\ \hline 33 \end{array}$$

$33 \,|\, 18$

$$\begin{array}{r} 23 \\ -7 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ -48 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ +27 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ -81 \\ \hline 49 \end{array}$$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 = 0$

~~$D_4 = 64$~~ $(a_1 + 8)^2 > 0$

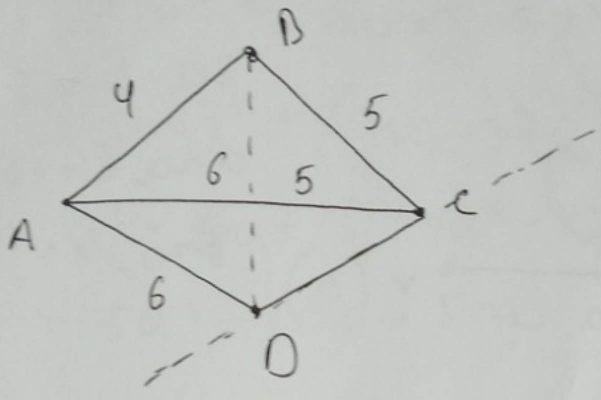
$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

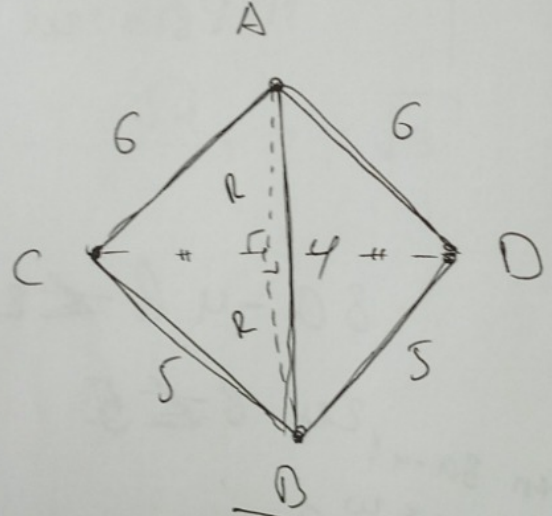
$D_4 = 64 - 49 =$

$$\begin{array}{r} 64 \\ -49 \\ \hline 15 \end{array}$$

(2)

Черновик.

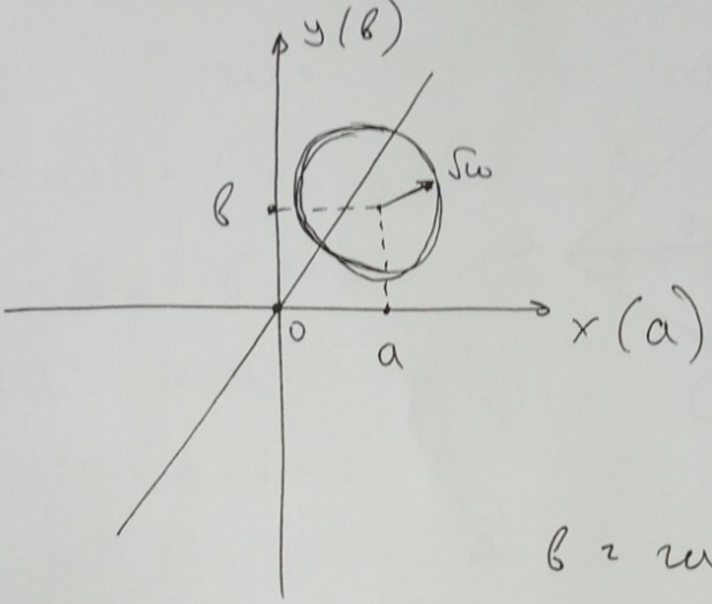




~~$\sqrt{6^2-(R)^2}=\sqrt{5^2-R^2}$~~

21100336 (U165316 M1296609)

Черновик.



$8a-4b=20$

$2a-b=5$

$a=0,\ b=-5$

$b=0,\ a=5/2$

$b=2a$

$8a-4b \leq 20$

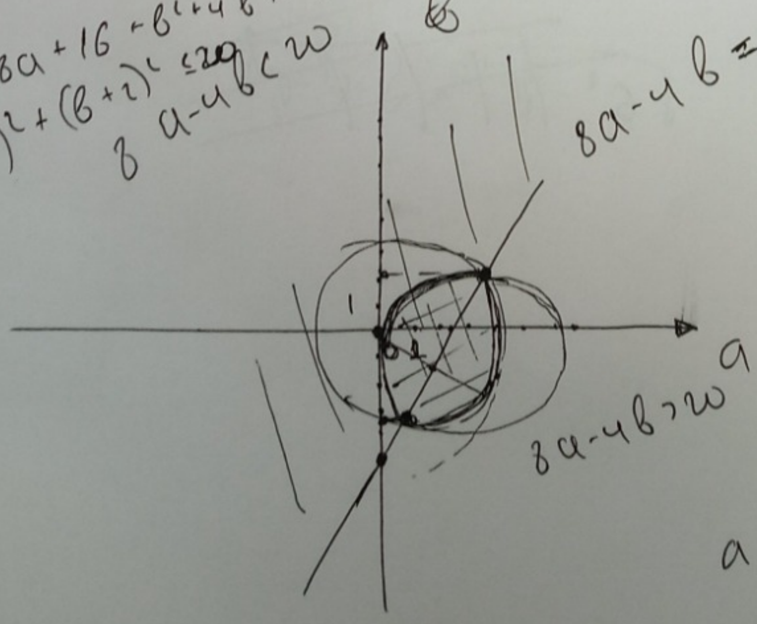
$2a-b \leq 5$

$a^2+b^2 \leq 8a-4b$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \leq 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20$

$8a-4b < 20$



$a^2+b^2 \leq 20$

Черновик.

$8a - 4b = 20 \Rightarrow \cancel{a} \; b = 2a - 5$

$(a-4)^2 + (2a-3)^2 = 20$

$a^2 - 8a + 16 + 4a^2 - 12a + 9 = 20$

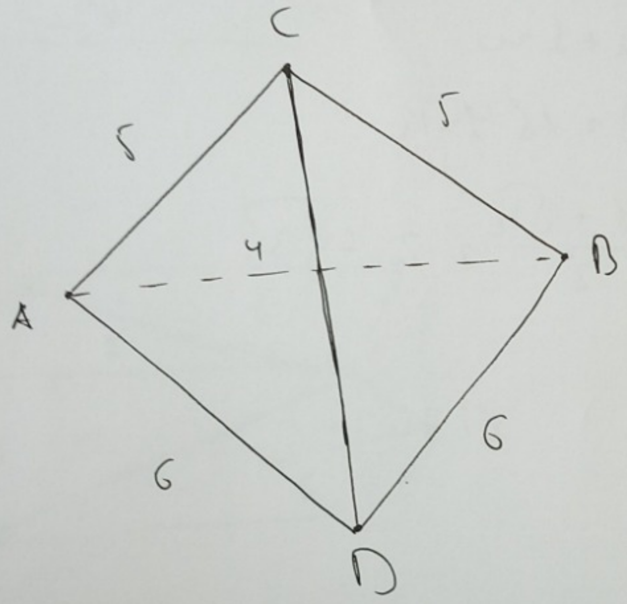
$5a^2 - 20a + 5 = 0$

$a^2 - 4a + 1 = 0$

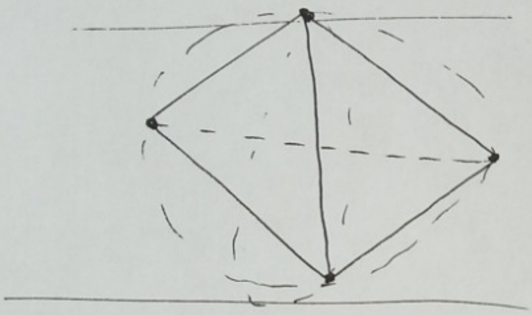
$\cancel{a} \; D = 16 - 4 = 12$

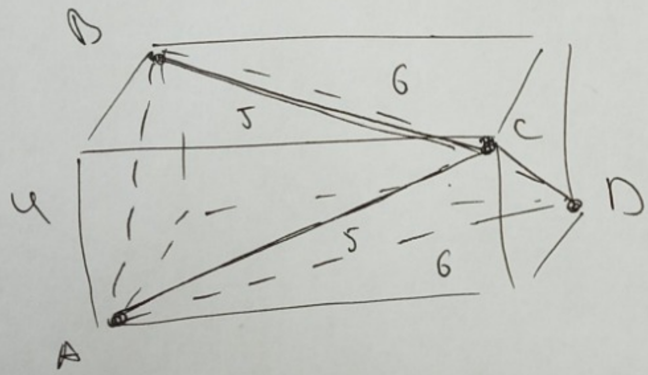
$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Черновик.



Черновик.





21100336 (U165316 M1296609)

Чистовик.

21 вариант.

№1.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots$ – возрастающая арифметическая прогрессия, d – её разность, $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}$.

$\S$n/2 $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S_n = n\,\frac{a_1+a_n}{2} = n\,\frac{2a_1+(n-1)d}{2}$$

$$S = S_7 = 7\,\frac{2a_1+6d}{2} = 7(a_1+3d) = 7a_1+21d.$$

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S+27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S+60 \end{cases} \qquad (a_1 - ?)$$

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16da_1+7da_1+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ a_1^2+13da_1+10da_1+130d^2 < 7a_1+21d+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ a_1^2+23da_1+130d^2 < 7a_1+21d+60 \end{cases}$$

$$b = a_1^2+23da_1+112d^2-7a_1-21d$$

$$\begin{cases} b > 27 \\ b+18d^2 < 60 \end{cases}$$

$$27+18d^2 < 60$$

$$d^2 < \frac{11}{6}$$

Чистовик.

$d \in \left(-\sqrt{\frac{11}{6}}; +\sqrt{\frac{11}{6}}\right)$

$0 < \sqrt{\frac{11}{6}} < 2$

Т.к. арифм. прогрессия состоит из целых чисел и возрастает (по усл.), то $d = 1$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases}$$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 = 0$

$D_4 = 64 - 49 = 15$

$a_1 = -8 + \sqrt{15}$

$a_2 = -8 - \sqrt{15}$

$$\begin{cases} (a_1 + 8)^2 > 0 \\ (a_1 - (-8 + \sqrt{15}))(a_1 - (-8 - \sqrt{15})) < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \in (-8 - \sqrt{15}; -8) \cup (-8; -8 + \sqrt{15}) \\ 3 < \sqrt{15} < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$-12 < -8 - \sqrt{15} < -11$

$-5 < -8 + \sqrt{15} < -4$

$\Rightarrow a_1 = -11, -10, -9, -7, -6, -5$

Ответ: $-11, -10, -9, -7, -6, -5$.

2

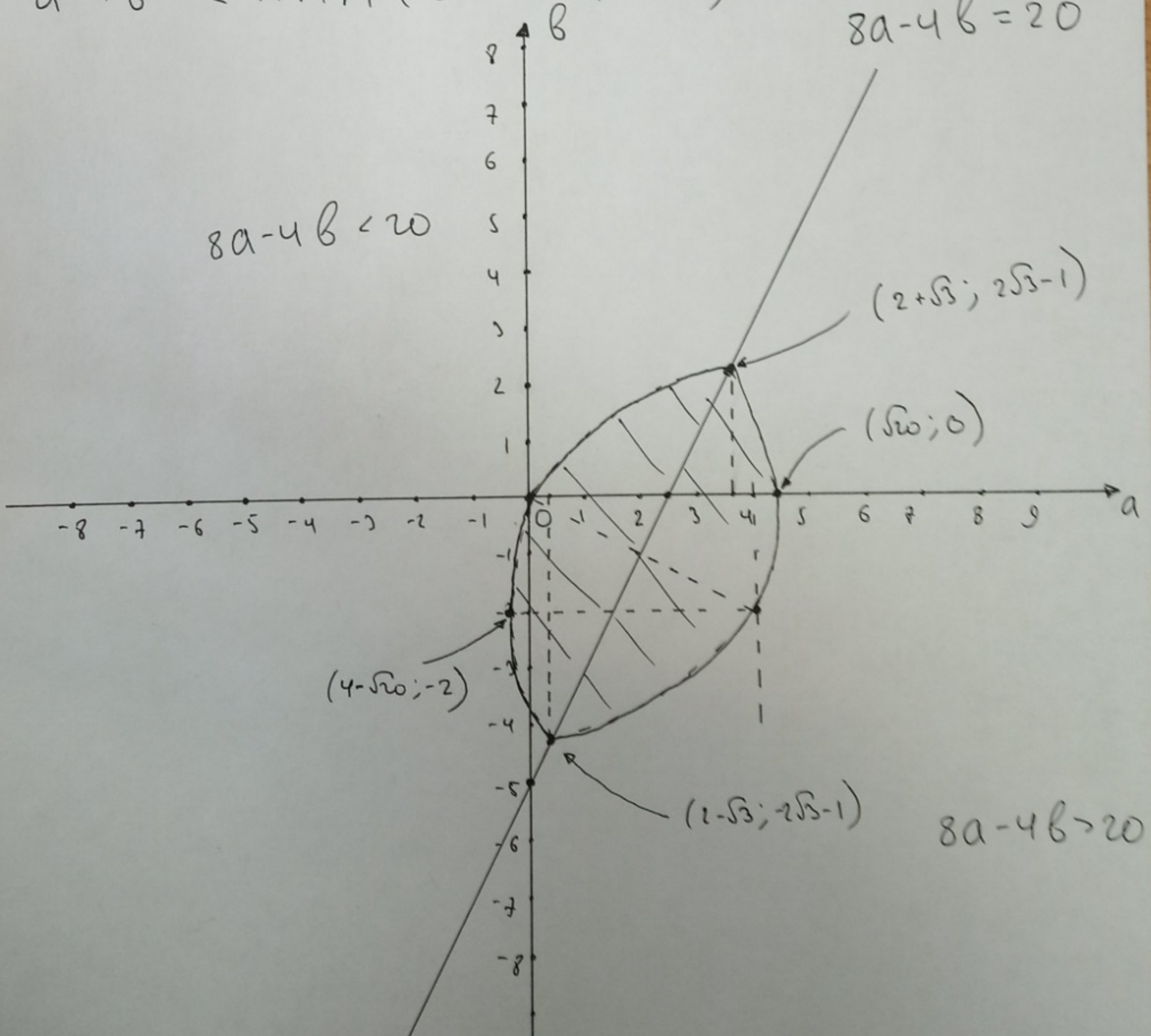
Чистовик.

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b,\ 20) \quad (2) \end{cases}$$

1) Рассмотрим второе ~~ур-ние~~ нер-во системы и найдём все пары чисел $(a;b)$, которые ему удовлетворяют.

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b,\ 20)$



③

Чистовик.

1. $8a-4b<20$:

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

$$\begin{cases} 8a-4b=20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2=20 \end{cases}$$

$b=2a-5$

$a^2+16-8a+4a^2-12a+9=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0$

$D_4=4-1=3$

$a=2\pm\sqrt{3}$

$a=2+\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}-1$

$a=2-\sqrt{3}$, $b=-2\sqrt{3}-1$

2. $8a-4b>20$:

$a^2+b^2 \le 20$

т.к. точка $(0;0)$ симметрична точке $(4;-2)$ относительно прямой $8a-4b=20$, то легко найти множество решений нер-ва 2. простым отражением множества решений нер-ва 1. относит. пр. $8a-4b=20$.

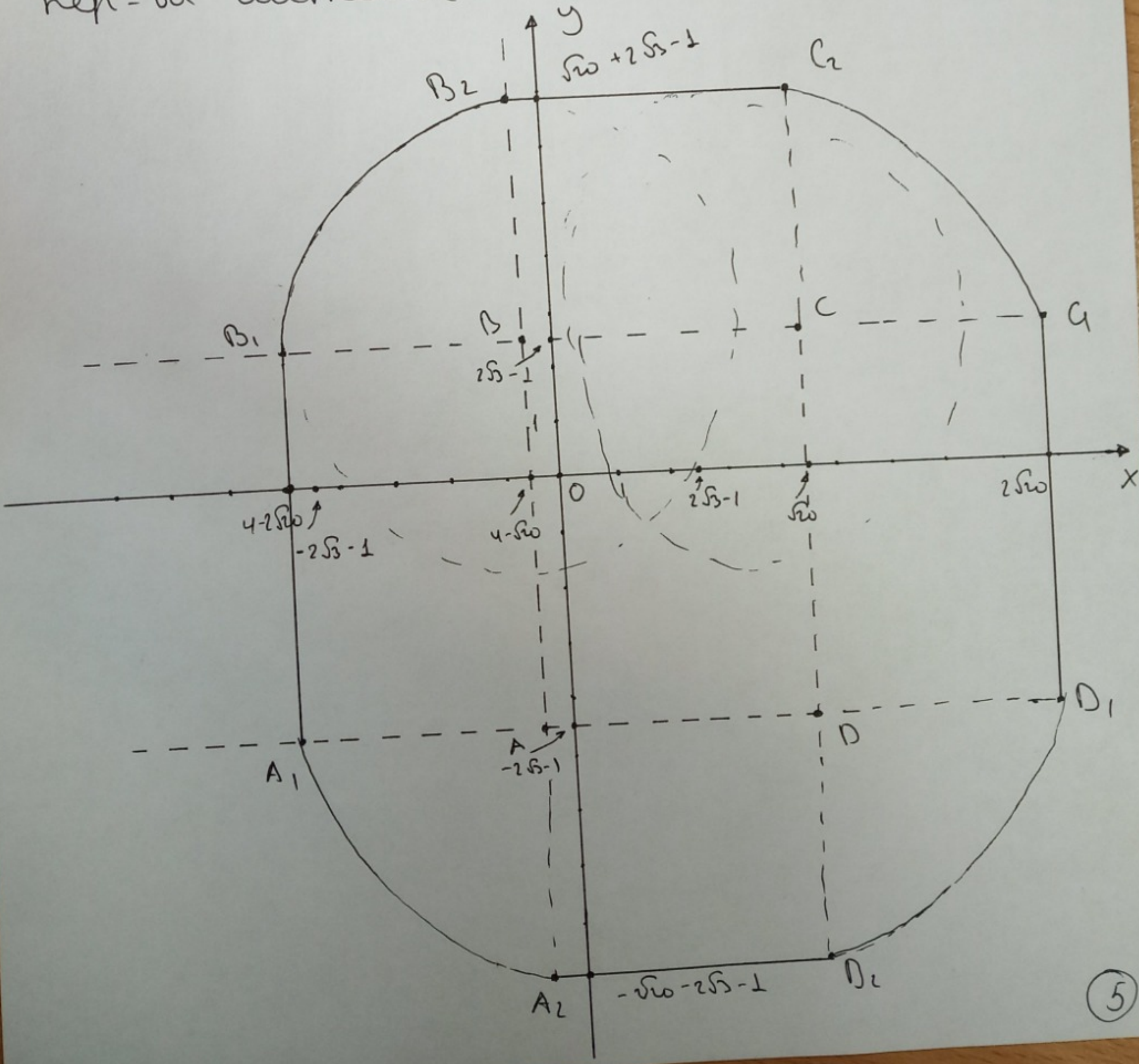
Чистовик.

Множеством решений нер-ва (2) будут являться все точки $(a; b)$, которые лежат внутри или на границе получившейся фигуры.

~~2)~~ $a \in [4-\sqrt{20}; \sqrt{20}]$

$b \in [-2\sqrt{3}-1; 2\sqrt{3}-1]$

2) Вернёмся к рассмотрению первого нер-ва системы:



Чистовик.

(и на границе)
Внутри получившегося прямоугольника ABCD будут лежать центры окр. с радиусом $\sqrt{20}$, тогда очевидно, что искомая фигура M есть фигура $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_1$.

3) Найдём площадь этой фигуры M:

$$S_M = \pi(\sqrt{20})^2 + 2\cdot(\sqrt{20})\cdot(4\sqrt{3}) + 2\cdot(4)\cdot(\sqrt{40}) + (4\sqrt{3})\cdot(4) =$$

$$= 20\pi + 32\sqrt{15} + 32\sqrt{5} + 16\sqrt{3}$$

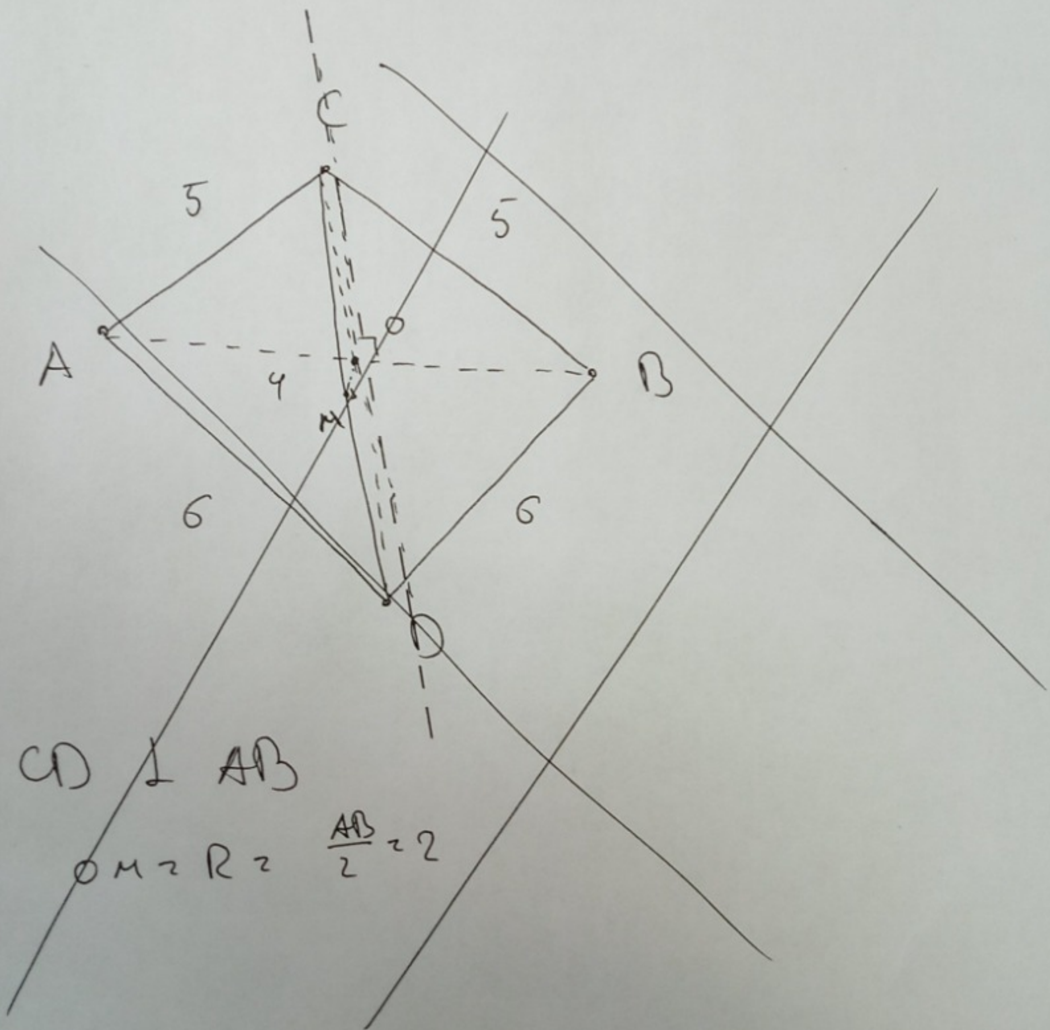
Ответ: $S_M = 20\pi + 32\sqrt{15} + 32\sqrt{5} + 16\sqrt{3}$.

Чистовик.

№2.

1) чтобы радиус цилиндра был минимальным необходимо вписать в него тетраэдр ABCD так, чтобы AB было диаметром цилиндра.

2)



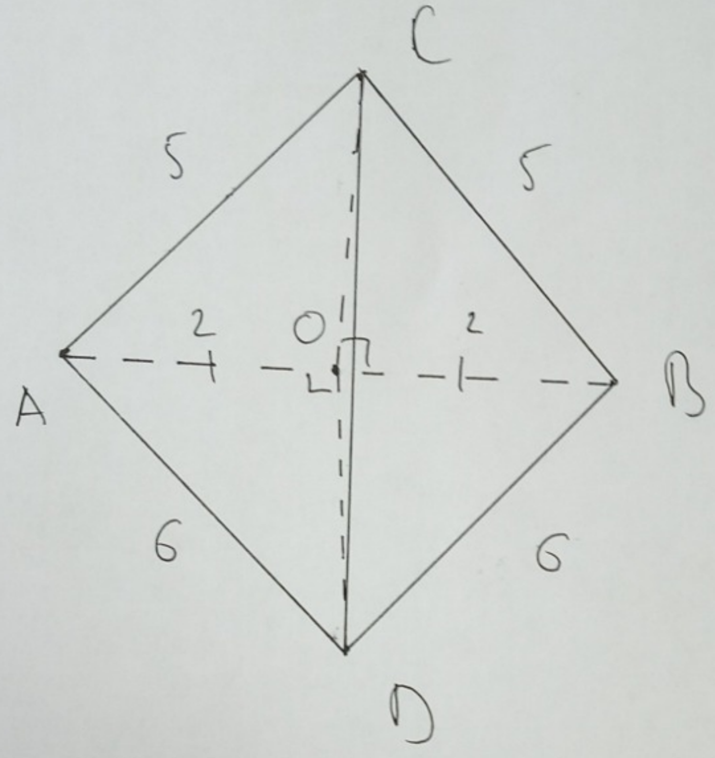
$CD \perp AB$

$OM = R = \frac{AB}{2} = 2$

21100336 (U165316 M1296609)

Чистовик

2)



$AB \perp CD$

$\begin{cases} OD = \sqrt{32} \text{ (по тр. Пифагора)} \\ OC = \sqrt{21} \text{ (по тр. Пифагора)} \end{cases}$

$\cancel{CD = \sqrt{53 - 2\sqrt{32}\sqrt{21}}}$

$CD = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{53}$

Ответ: $\sqrt{53}$.

8

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100336**

ID профиля: **165316**

Вариант 21

Черновик.

№5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2$,

$\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

~~$2x^2-3x+5>0$~~

~~$D=9-40$~~

$4=x\cdot x(x-1)$

$4=x^3-x^2$

~~$x^3-x^2-4=0$~~

$2x-3$ $\sqrt{2x-3}=t>0$

$x+1=m$

$2x^2-3x+5=n$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4 & x-2 \\ \underline{-\,x^3-2x^2} & x^2+x+2 \\ x^2-4 & \\ \underline{-\,x^2-2x} & \\ 2x-4 & \\ \underline{-\,2x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$2\log_t m$, $2\log_n t$, $\log_m n$

$2\log_n t=\frac{2}{\log_t n}$

$2\log_t m$, $\frac{2}{\log_t n}$, $\log_m n$

$x^2+x+2=0$

~~$D=1-4$~~

$2\log_t m\cdot\frac{2}{\log_t n}=4\cdot\frac{\log_t m}{\log_t n}=4\log_m m$

1) $\log_t m=\log_n t$

$$\frac{\log_t m\cdot\log_t n-1}{\log_t n}=0$$

21100336 (U165316 M1296610)

Черновик.

$4\log_n m \cdot \log_m n = 4$

$2x-3>0$
$x+1>0$
$x>\frac{3}{2}$
$x>-1$

$4 = 2\cdot 2\cdot 1$

1) $2\log_{(2x-3)}(x+1) = 2$

$(2x-3) = x+1$

$x = 4$

$-\frac{37}{17}$
20

пр.

$2\cdot\log_{2\cdot16-3\cdot4+5}(2\cdot4-3) =$

$= 2\log_{20} 5 \ne 2$ и $\ne 1$

2) $2\log_{(2x-3)}(x+1) = 1$

$\sqrt{2x-3} = x+1$

$\cancel{2x}-3 = x^2+\cancel{2x}+1$

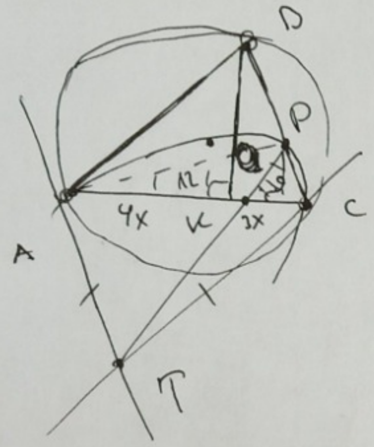
$2\cdot16-12+5=$

$=32-12+5=25$

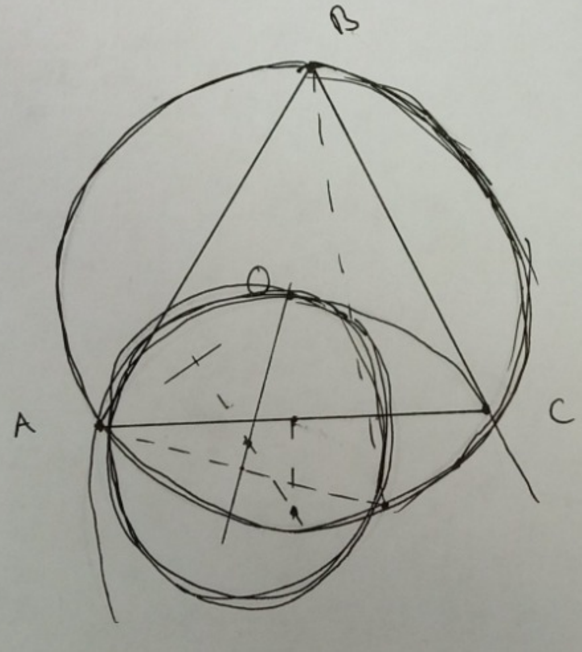
$\log_{25} 5 = 2$

Черновик.

№6.



$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$



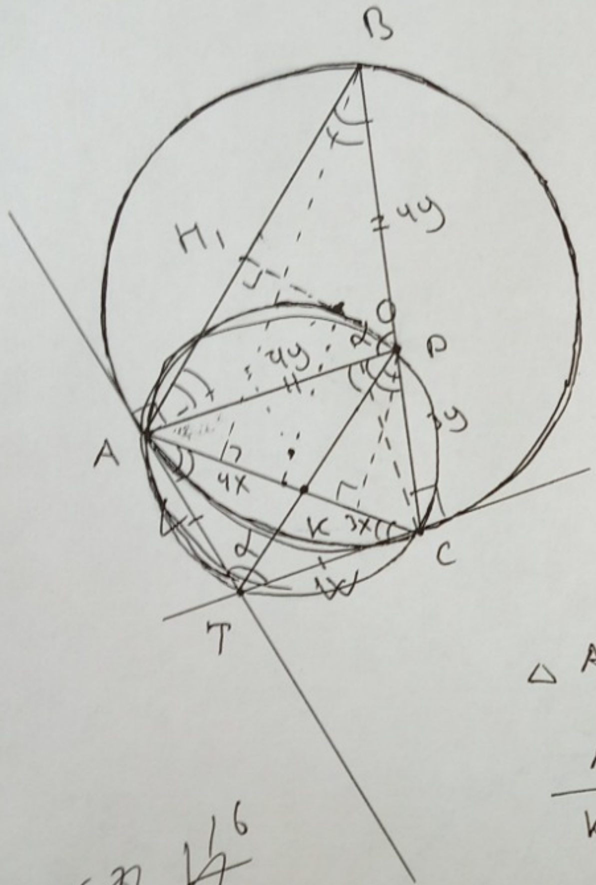
3

Черновик.

$$\begin{array}{r} 645 \\ -6 \\ \hline 4 \\ -? \\ \hline 15 \end{array} \Big| \; 215$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 9 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 29 \\ \hline 225 \\ +\ 50\ \\ \hline 725 \\ -\ 80 \\ \hline 645 \end{array}$$



$\triangle AKT \sim \triangle PKC$

$\frac{AK}{KP} = \frac{TK}{KC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\frac{AK}{?}}$

$\cancel{AK} \cdot KC =$

$tg\, \beta = \frac{3}{7}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{7}{\sqrt{49+9}} =$

$= \frac{7}{\sqrt{58}}$

$\alpha = 180° - 2\beta$

$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{30}}$

$S_{APH_1} = 4y \cdot \frac{1}{2} \cdot 4y \sin\beta$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 9 \\ \hline 58 \end{array}$$

4

21100336 (U165316 M1296610)

Черновик.

$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{7}$

$\cos\beta = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\begin{array}{r} 29 \\ \times 29 \\ \hline 261 \\ + 58 \\ \hline 841 \end{array}$ $\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ + 42 \\ \hline 441 \end{array}$

$\sin 2\beta = \frac{42}{58}$

$\alpha = 180^\circ - 2\beta$

$S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 16y^2 \cdot \sin\alpha = 8y^2 \frac{42}{58}$

$28 = 8y^2 \cdot \frac{7 \cdot 6}{58}$

$\cancel{4} = \cancel{8}^{2} y^2 \cdot \frac{6}{58}$

$y^2 = \frac{58}{12} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{29}{6}}$

$AC = \sqrt{}$

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - 2\beta) = \sin 180^\circ 2\beta - \cos 180^\circ \sin 2\beta =$

$= \sin 2\beta = \frac{21}{29}$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{20}{29}$

$AC = \sqrt{16 \cdot \frac{29}{6} + 9 \cdot \frac{29}{6} - 24 \cdot \frac{29}{6} \cdot \frac{20}{29}} =$

5

21100336 (U165316 M1296610)

Черновик.

$$\sqrt{\frac{8\cdot 29}{3}+\frac{3\cdot 29}{2}-80}$$

$$\frac{8}{3}+\frac{3}{2}=\frac{16+9}{6}=\frac{25}{6}\cdot 29$$

$$\sqrt{\frac{25\cdot 29-80\cdot 6}{6}}=$$

$=$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 25 \\ 29 \\ \hline 225 \\ +\ 50 \\ \hline 725 \\ -\ 480 \\ \hline 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 80 \\ 6 \\ \hline 480 \end{array}$$

6

Чистовик.

21 вариант.

№5.

$$\left.\begin{array}{l} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{(2x-3)}(x+1) \\ \log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2 = 2\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3) \\ \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) \end{array}\right\} \text{ ОДЗ: } x > \tfrac{3}{2} \text{ и } x \neq 2$$

$2x-3 = t \cancel{>0}$

$x+1 = m$

$2x^2-3x+5 = n$

$(2\log_t m)\cdot(2\log_n t)\cdot(\log_m n) = 4\log_n m \cdot \log_m n = 4$

$4 = 2\cdot 2\cdot 1$, по другому разложить число 4 на множители мы не можем, т.к. по усл. два числа равны между собой, а третье меньше их на 1 (строго этот факт доказан на чистовике 5)

1) $2\log_{(2x-3)}(x+1) = 2$

$2x-3 = x+1 \Rightarrow x = 4$ (по ОДЗ подходит)

Проверка:

- $\left.\begin{array}{l} 2\cdot(4)^2-3\cdot 4+5 = 25 \\ 2\cdot 4-3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\log_{25} 5 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

- $\left.\begin{array}{l} 4+1 = 5 \\ 2\cdot(4)^2-3\cdot 4+5 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_5 25 = 2 \Rightarrow \boxed{x=4}$ - подходит.

2) $2\log(2x-3)(x+1) = 1$

$\sqrt{2x-3} = x+1$

$2x-3 = x^2+2x+1$

$x^2 = -4 \Rightarrow$ нет решений.

Ответ: $x = 4$.

Чистовик.

№6.

Дано:

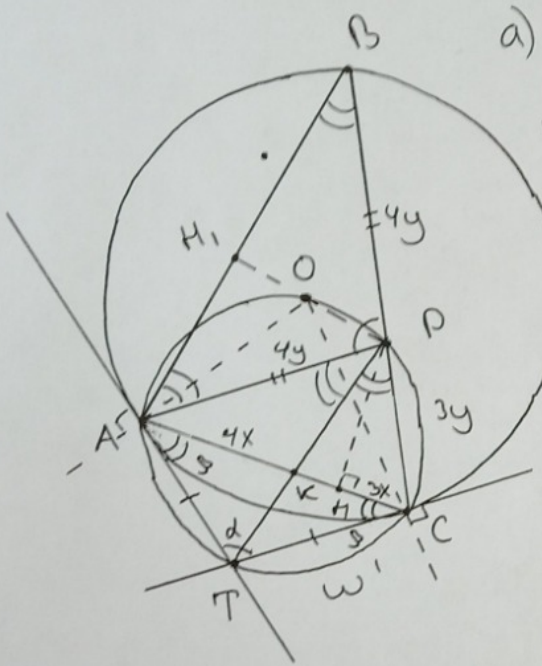
а) $\begin{cases} S_{APK} = 12 \\ S_{CPK} = 9 \end{cases}$

б) $\angle ABC = \operatorname{arcctg} \frac{3}{7}$

Найти:

а) S_{ABC} - ?

б) AC - ?



Решение:

а) 1) т.к. $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту PH, то $\frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ $AK = 4x$, $CK = 3x$.

2) $\angle PAT = \angle OAT - \angle OAP$

$\angle PCT = \angle OCT + \angle OCP$

$\angle OCP = \angle OAP$ (опир. на одну дугу)

$\angle OAT = \angle OCT = 90°$

$\angle PAT + \angle PCT = 180° \Rightarrow \angle APC + \angle ATC = 180°$

(т.к. в четырехугольнике сумма углов должна быть равна 360°) => четырехугольник $APCT$ - вписан в окр. ω'.

Чистовик.

3) $TA = TC$ (как отрезки касат. из одной точки) $\Rightarrow \triangle ACT$ - равнобедренный. Тогда $\angle ATC = \alpha$ и $\angle TAC = \angle TCA = \beta$.

4) $\angle ABP = \angle TAC = \beta$ (по тр. об угле между касательной и хордой, проведенной в точку касания).

5) $\angle APC = 180° - \angle ATC = 180° - \alpha \Rightarrow \angle APB =$
$= 180° - \angle APC = \angle ATC = \alpha$.

6) $\triangle ATC$:
$2\beta + \alpha = 180°$
$\triangle APB$:
$\beta + \alpha + \angle BAP = 180°$
$\Rightarrow \angle BAP = \beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAP = \angle ABP = \beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle APB$ - равнобедренный и $AP = PB$.

7) $\begin{cases} \angle TPC = \angle TAC = \beta \\ \angle TPA = \angle TCA = \beta \end{cases}$ (как углы опирающиеся на одну дугу)

PK - биссектриса $\Rightarrow \dfrac{AP}{AK} = \dfrac{PC}{CK} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow AP = PB = 4y$ и $CP = 3y$

8) $\dfrac{S_{APB}}{S_{APC}} = \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow S_{APB} = \dfrac{4}{3}(S_{APK} + S_{CPK}) =$
$= \dfrac{4}{3}(12 + 9) = 28$.

9) $S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = 28 + 21 = 49$

Ответ: $S_{ABC} = 49$.

Чистовик.

б) 1) $\angle ABC = \angle ABP = \beta = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{7}$

$\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \sqrt{\frac{49}{49+9}} = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{58}}$

2) $S_{APH_1} = \frac{1}{2} S_{APB} = \frac{1}{2}\cdot(4y\cos\beta)\cdot(4y\sin\beta)$

$S_{APB} = 16y^2 \cdot \frac{7\cdot 3}{58}$

$28 = 16y^2 \cdot \frac{7\cdot 3}{58}$

$58 = 12y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{29}{6}}$

3) $\alpha = 180° - 2\beta \Rightarrow \cancel{\cos\alpha}\ \cos(180° - \alpha) =$

$= \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{49}{29} - 1 = \frac{20}{29}$

4) $AC = \sqrt{16y^2 + 9y^2 - 2\cdot 4y\cdot 3y\cdot\cos(180°-\alpha)} =$

$= \sqrt{\frac{8\cdot 29}{3} + \frac{3\cdot 29}{2} - \overset{4}{\cancel{24}}\cdot\frac{\cancel{29}}{\cancel{6}}\cdot\frac{20}{\cancel{29}}} =$

$= \sqrt{\frac{16+9}{6}\cdot 29 - 80} = \sqrt{\frac{245}{6}}\ \cancel{= \sqrt{\frac{218}{2}}}$

Ответ: $AC = \sqrt{\frac{245}{2}}$.

Чистовик.

$4 = x \cdot x \cdot (x-1)$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$\boxed{x=2}$ - корень (можно убедиться подстановкой)

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 - 4 & x-2 \\
\cline{2-2}
-\underline{x^3 - 2x^2} & x^2 + x + 2 \\
\quad -x^2 - 4 & \\
\quad \underline{x^2 - 2x} & \\
\qquad -2x - 4 & \\
\qquad \underline{2x - 4} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$(x^2 + x + 2) = 0$

$D = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow$ больше корней нет.