Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100306**

ID профиля: **823819**

Вариант 21

№1 Чистовик. Математика 11кл (1)

$$S_7 = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{2a_1+d(7-1)}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7.$$

Из условия следует, что

$$\begin{cases} a_8\cdot a_{17} > S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14} < S+60 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a_1+21d < a^2+23da_1+112d^2-27 \\ 7a_1+21d > a^2+23da_1+130d^2-60 \end{cases}$$

$$a^2+23da_1+130d^2-60 < a^2+23da_1+112d^2-27.$$

$$18d^2 < 33$$

$d^2 < \frac{11}{6}$, а так как по условию

все члены ариф прог сост из целых чисел.

$d=1. \Rightarrow$

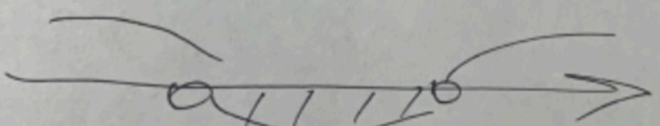
$a^2+23a_1+130<7a_1+21+60$ и $a^2+23a_1+112>7a_1+21+27$

$a^2+16a_1+49<0$ $\qquad a^2+16a_1+64>0$

$$\begin{cases} (a+8)^2>0 \\ a^2+16a+49<0 \end{cases} \qquad a\neq -8$$

$$a=\frac{-16\pm\sqrt{256-196}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{60}}{2}=$$

$=-8\pm\sqrt{15}$



$-8-\sqrt{15}\approx -12$

$-8+\sqrt{15}\approx -4$

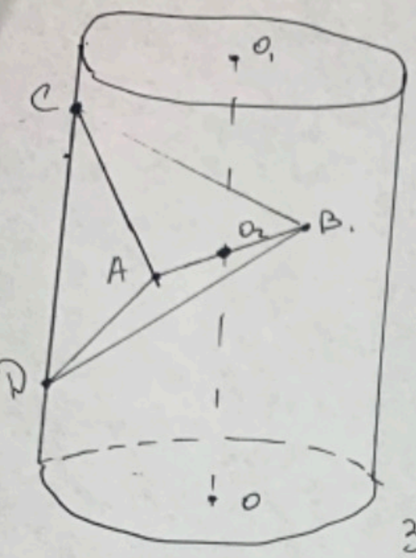
$a\in[-5;-11]\setminus\{-8\}$

Ответ: $a\in\{-5;-6;-7;-9;-10;-11\}$

б2 Чистовик Математика 11"Б" (2)

Дано: $AB=4$ $AC=CB=5$

$AD=BD=6$



1) По усл $CD \parallel OO_1$ и точки C, D лежат на боковой поверхности, значит $CD \perp$ основанию.

2) По усл радиус цилиндра должен быть минимальным, значит радиус равен $\frac{1}{2}AB$, так как $AB \perp CD$;

3) По условию ~~Δ~~ треугольники ACB и ADB - равнобедр, проведем высоты в этих треугольниках к ребру AB, O_2 - середина AB (лежит на O_1O_2), а так как ΔABC и ΔADB - равнобед, то CO_2 и $DO_2 \perp AB$.

4) Найдем эти высоты $CO_2=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

$DO_2=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$;

5) Проведем высоту в ΔDCO_2 к DC, заметим, что $O_2H \perp DC$, а так как $DC \parallel O_1O$, то $DC \parallel$ основанию и равно радиусу цилиндра

6) $CH=\sqrt{21-4}=\sqrt{17}$ $HD=\sqrt{32-4}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$CD=\sqrt{17}+2\sqrt{7}$!

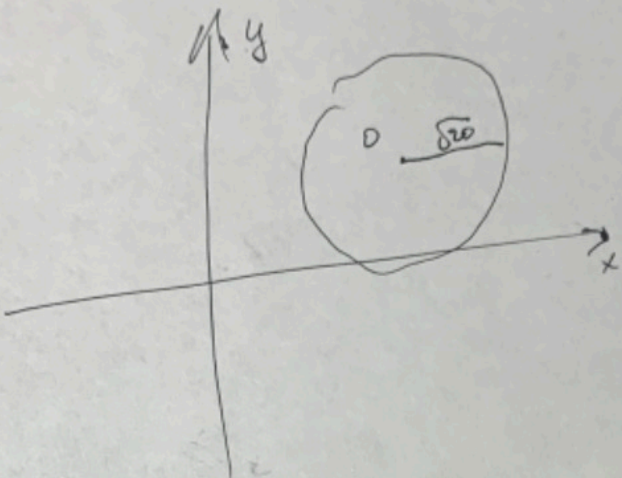
Ответ: $\sqrt{17}+2\sqrt{7}$

№3. Чистовик. Математика 11кл

3

1) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20) \end{cases}$

a^2+b^2 - расстояние от (0;0) до (a;b).



2) Так получаем, что это окружность с плавающим центром, площадь окружности равна πr^2 =>

$S = \pi 20$

Ответ: 20π

51. черновик

$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7.$

$16 \cdot 7 = 112$

$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27. \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60. \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 + 27. \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 + 60. \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 23d a_1 + 112 d^2 > 7a_1 + 21d + 27. \\ a^2 + 23d a_1 + 130 d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$

$\frac{a_8 + a_{17}}{2} = a_{12,5}$

$\cancel{18d^2}$

$\begin{cases} a^2 + 23da_1 + 112d^2 - 27 > 7a_1 + 21d & (1) \\ a^2 + 23da_1 + 130d^2 - 60 < 7a_1 + 21d & (2) \end{cases}$

$\cancel{a^2} + 23da_1 + 130d^2 - 60 < \cancel{a^2} + 23da_1 + 112d^2 - 27.$

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{33}{18} = \frac{11}{6}$

$30 \cdot 2$

$15 \cdot 4$

Пусть $d = 1.$

$\cancel{a_1^2 + 23a_1 + 112 - 27 > 7a_1 + 21}$

-6

$+106$

$\cancel{a_1^2 + 16a_1 + 106 > 0.}$

$23 - 7 = 16$

$130 - 81 = 49$

60

(1) $a^2 + 23a_1 + 130 - 81 > 7a_1 + 21$

$a^2 + 16a_1 + 49 > 0$

$a = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} =$

$= -8 \pm \sqrt{15};$

21100306 (U823819 M1298881)

5 1 (прод). черновик

$\cancel{a^2} + \cancel{23c}a_1 + 130 \cancel{d}d^2 - 60 < \cancel{7a_1} + \cancel{21d}$

$\cancel{-a^2} + \cancel{23c}a - 112\ d^2 + 27 \quad \cancel{-7a_1} - \cancel{21d}$

$18d^2 - 33 < 0.$

$d = 1$, так как по усл все члены прогр целые, значит и разность прогр должна быть целой.

$a^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + \underline{21 + 60}$
81

$a^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$a^2 + 23a_1 + \overset{4}{112} > 7a_1 + \underline{21 + 27}.$
48. 36

$a^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a+8)^2 > 0 \qquad a \neq -8$

$$\begin{cases} (a+8)^2 > 0 \\ a^2 + 16a_1 + 49 < 0. \end{cases} \qquad a = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \sqrt{15};$$

12 $\quad -8-\sqrt{15} \quad -8+\sqrt{15} \quad -4. \quad a$

$\cancel{-8-\sqrt{15}} \approx -12$

$-8 + \sqrt{15} \approx -4$

$a \in [-5; -1\cancel{2}] \setminus \{-8\}.$

Ответ: $a \in \{-5; -6; -7, -9; -10; -11\}$

№2 Черновик.

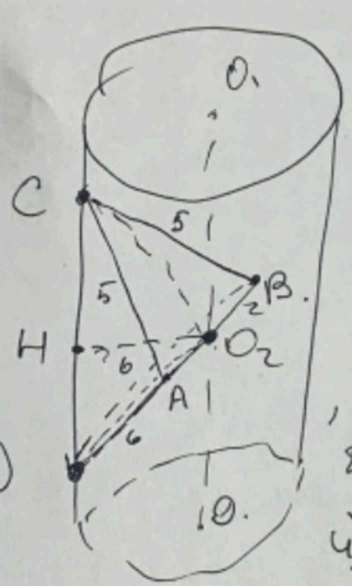
1) CD лежит·на на боковой пов и CD $\perp$ основан, так как CD $\parallel$ оси. на бок пов

2) Все верш ~~лежат~~ на бок пов

4 по. усл радиус являются / это возможно при ~~минимальном~~ R половине стороны AB

R = 2;

3) По условию $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ – равнобедр, проведем высоты в этих $\triangle$ к ребру AB, O_2 – середина AB (лежит на O_1O_2), так как $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ – равнобедр, то CO_2 и $DO_2 \perp AB$;



4) Найдем эти высоты $CO_2 = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$.

$DO_2 = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$;

5) Проведем высоту в $\triangle DCO_2$ к DC. Заметим, что $O_2H \perp DC$, а так как $DC \parallel O_1O$, то DC $\parallel$ основанию и равно радиусу цилиндра.

6) $CH = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$ $HD = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

$CD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

Ответ: $\sqrt{17} + 2\sqrt{7}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100306**

ID профиля: **823819**

Вариант 21

Чистовик

Б4 (1)

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$ наибольший общ дел. наименьшее общ кратное.

1) Числа a; b; c состоят только из 5 и 7, об этом говорит НОК и наименьшим будет из чисел будет 35.

Поэтому рассмотрим случаи

(1) $a = 35$

(2) $b = 35$

(3) $c = 35$

(1) $a=35$ $b=5^{18} \cdot 7^{16}$, „c" может быть равно любой комбинации 5 и 7, кроме чисел, которые больше $5^{18} \cdot 7^{16}$ и меньше 35, то есть $c \in [35; 5^{18} \cdot 7^{16}]$, но может сост только из произведения 5 и 7. Значит есть $18 \cdot 16$ вариантов c, кроме того можно поменя b и c, тогда при $a=35$. количество вариантов равно $18 \cdot 16 \cdot 2 = 18 \cdot 32 = 576$,

(2) при $b=35$ будет 576 вариантов объяснение в пункте (1), то есть идентично пункту (1).

(3) при $c=35$ будет тоже 576 идентично пункту 1 и 2. [illegible]

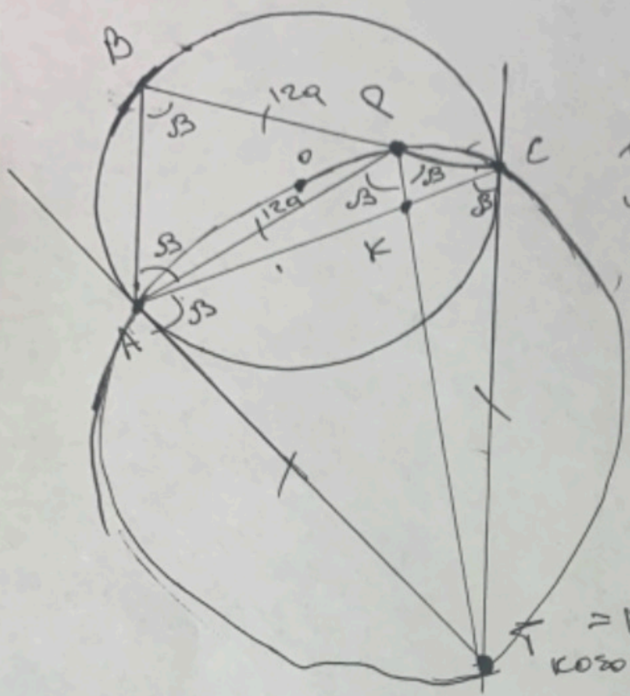
Значит всего будет $576 \cdot 3$ вариантов троек

Ответ: 1728 троек.

21100306 (U823819 M1298882)

№6. Чистовик ~~Черновик~~

(2)



Дано: $S_{APK} = 12$ $S_{CPK} = 9$.

$S_{APC} = 21$.

1) $AK : KC = \frac{12}{9}$, так как у них общая высота;

2) TA и TC — касат из одной точки, значит $AT = CT$ и $OC \perp TC$ и $OA \perp AT \Rightarrow$ Рассм $OATC$ $\angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow T$ лежит на окр, которая проходит через AOC.

3). Пусть дуга AC равна 2β, то $\angle ABC = \beta$, так как вписанный.

4) $\angle ACT = ABT$ и $TAB = TBC$ и $TAC = ACT$ угол между кордой и касат равен половине дуги, а дуга у них общая.

5). $\angle BAB = \angle ABC - \angle ABP = 2\beta - \beta = \beta$

6) PK — биссек, значит $AB : BC = AK : KC = 12 : 9$ Пусть $AP = 12a \Rightarrow BC = 9a \Rightarrow$

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cancel{AP \cdot BC}^{\,12a \cdot 9a} \cdot \sin 2\beta = 21$

$a^2 = \frac{21 \cdot 2}{12 \cdot 9 \sin 2\beta}$

21100306 (U823819 M1298882)

№6 (прод) чистовик. 38

7) $S_{BPA} = \frac{1}{2} 12^2 a^2 \cdot \sin BPA = \frac{1}{2} 12^2 a^2 \sin 2\beta \Rightarrow$

$S_{BPA} = \frac{1}{2} \frac{12 \cdot 12 \cdot 21 \cdot 2}{12 \cdot 9 \sin 2\beta} \sin 2\beta = 28$

8) $S_{ABC} = 28 + 12 + 9 = 49.$

Ответ: 49.

б) ~~$\sin(\text{arctg} ABC) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$~~

$\beta = \text{arc tg} \frac{3}{7}.$

$\cos(\text{arctg} \frac{3}{7}) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3}{7})^2}} = \frac{7\sqrt{58}}{58}$

~~Ac~~ 1) ~~по теореме косинусов.~~

~~тогда~~ мы доказали, что $\angle ABC = \beta \Rightarrow$

$\angle ABC = 2\beta$

По теореме косинусов находим когда a.

$AC^2 = 12^2 a^2 + 9^2 a^2 - 2 \cdot 12 \cdot 9 a^2 \cos(2 \text{arctg} \frac{3}{7}).$

2) ~~Мы~~ используем теорему косинусов и находим сторону AC. (не успеваю посчитать)

$\cos\beta = \frac{7\sqrt{58}}{58}$ $\quad \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \left(\frac{7\sqrt{58}}{58}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{58}}{58}\right)^2$

$= \frac{49}{58} - \frac{9}{58} = \frac{40}{58}.$ ~~через~~ через площадь

$\sqrt{5}$ Черновик $2x^2-3x+5$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) =$

Рассмотрим 3 случая.

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

① $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) + 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) + 1 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5). \end{cases}$

③ $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 + 1. \end{cases}$

21100306 (U823819 M1298882)

~ 56 черновик

$$S_{BPA} = \frac{1}{2} 12^2 a^2 \cdot \sin BPA = \frac{1}{2} 12^2 a^2 \sin 2\beta \Rightarrow$$

$$S_{BPA} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{12}\cdot\cancel{12}^{4} \cdot \cancel{21}^{7} \cdot \cancel{2}}{\cancel{12}\cdot\cancel{9} \cdot \cancel{\sin 2\beta}} \cancel{\sin 2\beta} = 28.$$

$$S_{ABC} = 28 + 12 + 9 = 49.$$

Ответ: 49.

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{\frac{9+49}{49}}} = \frac{7}{\sqrt{58}} = \frac{7\cdot\sqrt{58}}{58};$$

$$1 - \frac{49}{58} = \frac{9}{58}.$$

54 Черновик.

$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 35 & \text{- наибольш. о.д.} \\ \text{НОК}(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} & \text{- наименьш. о.к.} \end{cases}$

числа a в с состоят только из 5 и 7, об этом говорит НОК. и следовательно ~~на~~ одно из них равно $5^{18} \cdot 7^{16}$, а одно из них 35.

Поэтому рассмотрим три случая

1) $a = 35$

2) $b = 35$

3) $c = 35$

(1) $a=35$ $b = 5^{18} \cdot 7^{16}$ С может быть равная любой комбинации 5 и 7, кроме чисел, которые больше $5^{18} \cdot 7^{16}$ и меньше 35, то есть $c \in [35; 5^{18} \cdot 7^{16}]$, но может сост только из произведения 5 и 7. Есть 18·16 вариантов с, но еще можно поменять местам в и с, тогда при $a=35$ количество вариантов равно $18 \cdot 16 \cdot 2 = 18 \cdot 32 = 576$.

$$\begin{array}{r} \times\ 32 \\ 18 \\ \hline 256 \\ 32\ \ \\ \hline 576 \end{array}$$

(2) при $b=35$ будет 576 вариантов

объяснение в пункте (1). идентично пункту 1.

(3) при $c=35$ будет тоже 576 идентично пункту 1 и 2.

Значит всего будет 576·3 вариантов

$$\begin{array}{r} \times\ 576 \\ 3 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Ответ: ~~576·3~~ 1728 троек.

21100306 (U823819 M1298882)