Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100153**

ID профиля: **157120**

Вариант 21

-8 $\quad a_1 = 1 \quad -1 \quad -8$

-5

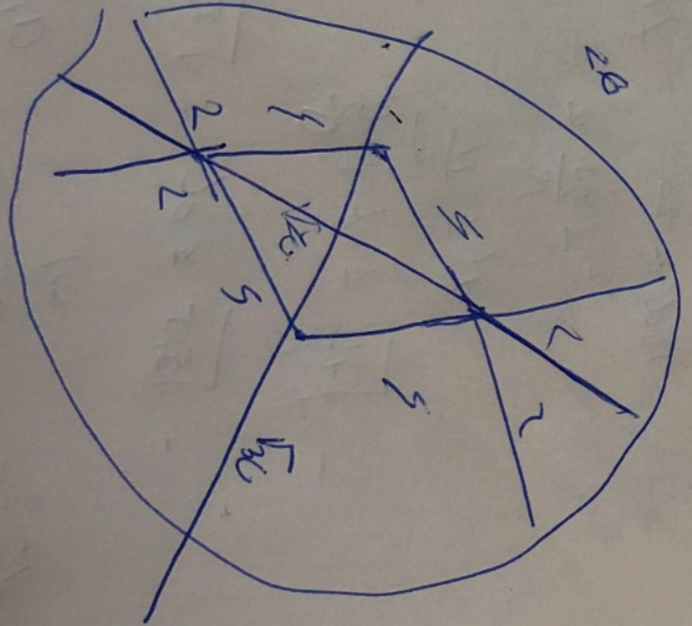
a_1 $\quad a = -4$

$a = -5$

$a = -6$

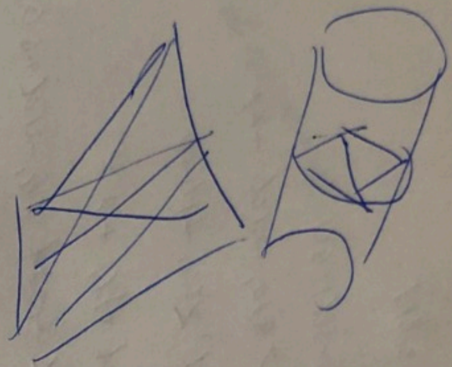
$a = -7$

a



$5+$

-4



$MN = 4$

$CN = \sqrt{11} - 5$

$-\sqrt{10} < a < \sqrt{11}$

$= \sqrt{16}$

$a = -10 \qquad a < \sqrt{11}$

$t = (a_1 + 8)^2$

$0 < t < 10$

$0 < f < 16$

$a_1 + 8 = 3$

$a_1 -$

$(a_1 + 8 = 5$

$a = 4$

$a_1 + 8 = 2$

$a_1 = -6$

$a_1 + 8 = 4$

$a_1 = -4$

$(a_1 + 8) =$

$(a_1 + 1$

$a^2 - b^2 = (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(4a + 8b) =$

a

$b = 5$

$(b - a)$

21100153 (U157120 M1305086)

5 $S-7$ 15 125

Черновик

$a_1\ a_2\ a_3$

$S=\frac{a_1+a_4}{2}\cdot 7=\frac{a_1+a_1+6d}{2}=(a_1+3d)\cdot 7$

$a_8\cdot a_{17}>S+27$

$16\cdot 7=112$

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d)>(a_1+3d)7\\(a_1+10d)(a_1+13d)>(a_1+3d)+60\end{cases}$$

1.

$$\begin{cases}a_1^2+7da_1+16da_1+112d^2>7a_1+21d+27\\a_1^2+10da_1+13da_1+130d^2<7a_1+21d+60\end{cases}$$

$x>3$

$x<5$

$-x>-5$

$$\begin{cases}a_1^2+23da_1+112d^2>21d+7a_1+27\\a_1^2+23da_1+130d^2<7a_1+21d+60\end{cases}$$

$4+5$

a_1^2 $\cancel{a_1^2+23da_1}+$ $a_1^2>7a_1+27$

$23\cdot 23=529$

$112\cdot 4=448$

$529-448=81$

$$\begin{cases}-a_1^2-23da_1-112d^2<-21d-7a-27\\a_1^2+23da_1+130d^2<7a_1+21d+60\end{cases}$$

$18d^2<33$

$7(a_1+3d)=12$

$d^2<\frac{33}{18}$

$a_1+3d=\frac{12}{7}$

$d^2\le\frac{11}{2}$

$a_1+3d\in\mathbb{Z}$

$-\sqrt{\frac{11}{2}}\le d\le\sqrt{\frac{11}{2}}$

$a_2=a_1+d$

$a_8=a_1+7d$

$-\sqrt{5,5}\le d\le\sqrt{5,5}$

$68-49=11\cdot 7$

$D=44$

$a_1=$

$a_2=a_1+d$

$d^2\le 5,5$

$6d$

-2

$a_1^2-7a-27>0$

$a_1^2-7a-60<0$

$d=44+240$

284

$d=-2$

$d=-1$

$d=0$

$d=1$

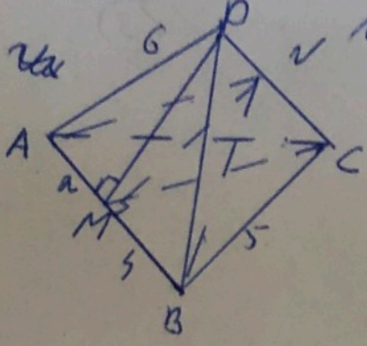
$d=2$

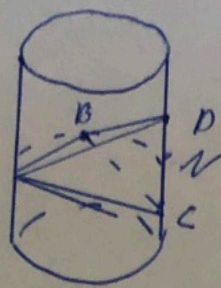
$a=\frac{7+17}{2}=12$

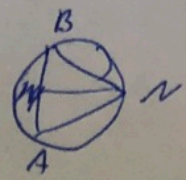
$a=\frac{7-17}{2}=-5$

21100153 (U157120 M1305086)

N2 Чистовик (3)







Т.к CD параллелен оси симметрии, то значит CD - лежит на образующей

$DM \perp AB$, $AM = MB$

т.к $\triangle ADM$ - равнобедренный, $\triangle ABC$ - равносторонний, то $CM \perp AB \Rightarrow AB \perp (CDM)$

из $\triangle ADM$ $DM = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $CM = \sqrt{21}$

а так DC принадлежит плоскости $(CDM) \Rightarrow AB \perp CD$

Рассмотрим плоскость (ABN), $MN \perp DC$, ~~$NC \perp (ABN)$, т.к $AB \perp DC$~~

$DC \perp (ABN)$ т.к $AB \perp DC$, $DC \perp MN$ значит $(ABN) \parallel$ плоскости основания цилиндра.

$\triangle ABN$ - вписан в окружность основания цилиндра. Значит радиус $\Rightarrow AB$ - диаметр.

M - центр окружности.

$MN = 4$

$DN = \sqrt{DM^2 - MN^2} = \sqrt{32 - 16} = 4$ $NC = \sqrt{CM^2 - NM^2} = \sqrt{21 - 16} = \sqrt{5}$

$CD = 4 + \sqrt{5}$

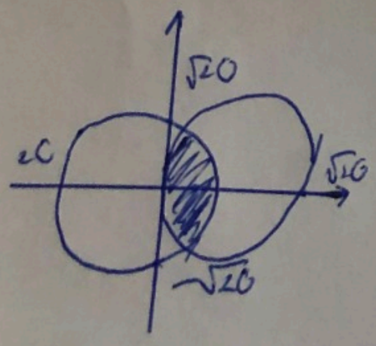
Ответ: $4 + \sqrt{5}$

N3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b, 20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le 8a - 4b \\ a^2 + b^2 \le 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ (a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le 20 \end{cases}$$



$(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$ - окружность с центром $(4;-2)$ $R = \sqrt{20}$

$a^2 + b^2 \le 20$ - окружность с центром $(0;0)$

окружность с центром в т. (x, y) и $R = \sqrt{20}$

x, y - удалены на расстояние $\le \sqrt{20}$

Чистовик

2

$(a_1+8)^2=t$, $t\in\mathbb{Z}$ $\qquad a_1\neq -8$

$0<t<15$

1) $(a_1+8)^2=9$ $\qquad a_1+8=-3$

$a_1+8=3$ $\qquad a_1=-11$

$a_1=-5$

2) $(a_1+8)^2=4$ $\qquad a_1+8=-2$

$a_1=-6$ $\qquad a_1=-10$

3) $(a_1+8)^2=1$

$a_1=-7$ $\qquad a_1=-9$

Ответ: ~~-8~~ $-5;\ -6;\ -7;\ -\ ;\ -9;\ -10;\ -11$

5

6

Чистовик В-21

№1

$S=S_7$, d - разность арифм. прогрессии.

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$S=S_7=\frac{a_1+a_7}{2}=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)\cdot 7=7a_1+21d$ (1)

По условию:

$\begin{cases} a_8\cdot a_{17}>S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14}<S+60 \end{cases}$ (☆) $a_8=a_1+7d$; $a_{17}=a_1+16d$ (2) $a_{11}=a_1+10d$ $a_{14}=a_1+13d$ (3)

(1), (2) и (3) в (☆)

$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d)>7a_1+21d+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d)>7a_1+21d+60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1+23da_1+112d^2>21d+7a_1+27 \\ a_1^2+23da_1+130d^2<7a_1+21d+60 \end{cases}$ (*)

$\begin{cases} a_1+23da_1+130d^2>7a_1+21d+27+18d^2 \\ a_1^2+23da_1+130d^2<7a_1+21d+60 \end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$7a_1$~~ $7a_1+21d+27+18d^2<7a_1+21d+60$

$18d^2<33$

$d^2<\frac{33}{18}$

$-\sqrt{\frac{11}{6}}<d<\sqrt{\frac{11}{6}}$

Т.к. $a_1, a_2 \dots a_7\in\mathbb{Z}$, значит $a_2=a_1+d\Rightarrow d\in\mathbb{Z}$, + "d. прогрессия возрастающая, значит подходит только $d=1$ (4)

(4) в (*)

$\begin{cases} a_1+27a_1+112<21+7a+27 \\ a+23a+130<7a+21+60 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+23a_1+112<48+7a \\ a_1^2+23a+130a<7a+81 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ (a_1+8)^2<15 \end{cases}$ $\Rightarrow$ выбираем целые числа.

$(a_1\neq-8)$

~~$a_1=-4; a=-5; a=-6; a=-7$~~

~~$a=-12; a=-11; a=-10; a=-9$~~

~~Ответ: -4; -5; -6; -7~~

~~$(a_1+8)^2=t$~~

~~$0<t<15$~~

1) $(a_1+8)^2=16$ ~~$a_1=-4$~~ ~~$a_1+8=-4$~~ $a_1=-12$

2) $(a_1+8)^2=9$ ~~$a_1=-5$~~ ~~$a_1+8=-3$~~ $a_1=-11$

3) $(a_1+8)^2=4$ ~~$a_1=-6$~~ $a_1+8=-2$ $a_1=-10$

4) $(a_1+8)^2=1$ $a_1+8=-1$

~~Ответ: -6; -5; -4; -7; -9; -10; -11; -12~~

-78 [illegible]

21100153 (U157120 M1305086)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100153**

ID профиля: **157120**

Вариант 21

№5 (5)

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1), \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2; \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x-3>0 \\ x+1\neq 1 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \\ 2x-3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 0 \\ x\in R \\ x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$$ ОДЗ

$2x-3=a \quad 2x^2-3x+5=b, \quad x+1=c$

~~Заметим все~~

$\log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = 2\log_a c, \ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_b a, \ \log_{x+1}(2x^2-3x+5) =$
$= \log_c b$

Заметим что

$$2\log_a c \cdot 2\log_c b \cdot \log_b a = 4$$

Если два из них равны, а одно меньше на 1

$y(y-1)\cdot y=4$

$y^3-y^2-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

Два из них равны 2, и третье равно 1

1) $2\log_{2x-3}(x+1)=1$

$\sqrt{2x-3}=x+1$

~~$(2x-3)^2$~~ $2x-3=(x+1)^2$

$x^2+2x+1=2x-3$

$x^2=4$

$x=\pm 2 \in \varnothing$

2) $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1$

~~$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$~~ $= 4x^2-12x+9=2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4=0$

$2(x-4)(x-\frac{1}{2})=0$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$ ~~$x\in 4$~~

3) ~~$2\log_{2x-3}(x+1)$~~

~~$\log_{x+1}(2x^2-3x+1)=\ldots$~~ $2\log_{2x-3}(x+1)=2$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$x+1=2x-3$

$x=4$

4) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=1$

$2x^2-3x+5=x+1$

$2x^2-4x-4=0$

$x^2-2x+2=0$

5) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$2x^2-3x+5=x^2+2x+1$

$x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$

см ОДЗ, значит $x=4$

~~$x\in 4$~~

~~$x\in 4$~~

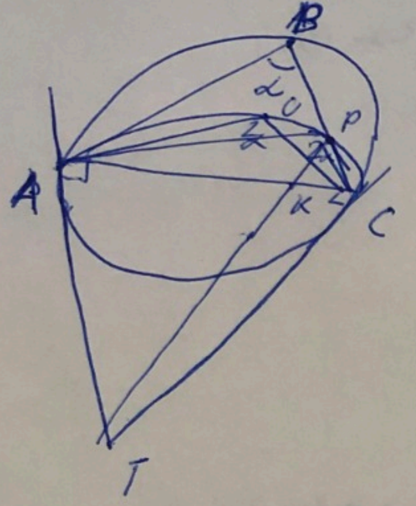
Ответ: $x=4$

21100153 (U157120 M1305087)

Чистовик

⑨

№6



а) $\angle B=\alpha$

$\angle AOC=2\alpha$ (центральный)

$\angle APC\alpha$

$OA\perp AT$, $OC\perp CT$, значит $\angle OAT+\angle TCO=180^\circ$

$AT=CT$ – т.к из одной т. касательные

$\angle APT=\angle KPC=\alpha \Rightarrow AB \parallel PK$ ($\angle ABC=\angle KPC=\alpha$

$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}}=\frac{AK}{KC}$ $\quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KPC}}=\left(\frac{AC}{KC}\right)^2=\left(\frac{AK+KC}{KC}\right)^2=$

$=\left(\frac{AK}{KC}+1\right)^2$

$S_{ABC}=\left(\frac{AK}{KC}+1\right)^2\cdot S_{PKC}=\left(\frac{12}{9}+1\right)^2\cdot 9=\frac{21^2}{9^2}\cdot 9=$

$=\frac{21^2}{9}=\frac{7^2\cdot 9}{9}=49$

№5

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=35 \\ НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=5^k\cdot 7^n \\ b=5^l\cdot 7^m \\ c=5^{x}\cdot 7^y \end{cases}$$, значит

НОД$(a,b,c)=5\cdot 7$

$\min(k,l,x)=5$

$\min(n,m,y)=7$

НОК$(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16}$

$\max(k,l,x)=18$

$\max(n,m,y)=16$

$1\le k;\ l;\ x\le 18$

Одно из них равно 1, а другое хотя бы 16

21100153 (U157120 M1305087)

Черновик

НОД $(a, b, c) = 35$

НОК $(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

НОД $(a b, c) = 35 = 5 \cdot 7$

~~$abc = 7 \cdot 5 \cdot 4$~~

$\log_{\sqrt{2x-3}} (x+1) = \log_{2x^2-3x+5} (2x-3)^2$

$\log_{\sqrt{2x-3}} (x+1) = 2 \log_{2x^2-3x+5} (2x-3)$

$x > \frac{3}{2}$

$\log_{\sqrt{2x-3}} (x+1) = \frac{2}{\log_{2x-3} 2x^2-3x+5}$

~~$a = 9$~~

$\log_{2x-3}$

$\log_t (x+1) = \frac{2}{\log_t 2x^2-3x-5}$

$\log_t (x+1) = \log_t (2x^2-3x+7)$

$\log_2$

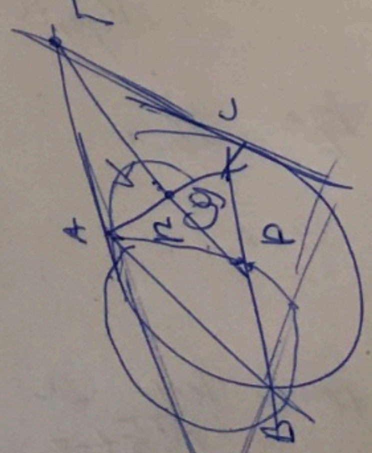
НОД $(a; b; c) = 35$

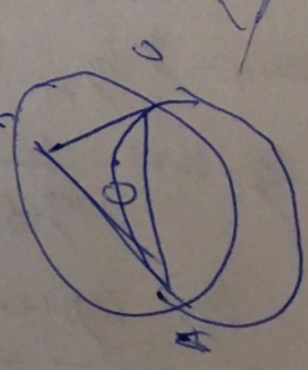
a^2+b^2

НОД $(a; b; c) = 35$

НОД $(a; b;$

НОК $($





Черновик

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)$

$\log_t(x+1) = \frac{4}{\log_t 2x^2-3x+5}$

$\log_2 4 = \frac{2}{\log_2 2}$ 2^4

$4 = \frac{4}{2}$

$\log_2 4 = \frac{1}{\log_4 2}$

$\log_2 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 2}$

$4 =$

$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 4$

$\log_2 16$

$\log_2 2$ $\log_2 4$

$1 \cdot 2$

$\log$ $\log_2 4$

$x_0 = \frac{3}{4}$

$\log$ $\frac{2 \cdot 9}{16} - \frac{3 \cdot 3}{4} + 5$

$\frac{18-27}{16} + 5$

$-\frac{9}{16} + \frac{80}{16} = +\frac{71}{16}$

$\log_t(x+1) = \log_{t-5} t^2$

$\log_t(x+1)\log_t(t \cdot 5 -)\log_t$

$\log_t(x+1) = 2\log_{t-5} t^2$

$\log_t(x+1) = \frac{2}{\log_t t-5}$

$\log_t$ $\frac{\log_t(x+1)\log_t(t-5)-2}{\log_t t-5} = 0$

21100153 (U157120 M1305087)