Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100086**

ID профиля: **128852**

Вариант 21

N1 (1)

$a_1 \quad a_2 = a_1 + d \quad a_2 = a_1 + 2d \quad \ldots \quad a_7 = a_1 + 6d$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 7a_1 + 21d$

$a_8 \cdot a_{17} = (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > \overbrace{7a_1 + 21d}^{S} + 27$

$a_{10} \cdot a_{14} = (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + 23da_1 + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \quad (1)$

$a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60. \quad (2).$

(2) $\quad a_1^2 + 23da_1 + 112d^2 < 7a_1 + 21d + 60 - 18d^2 \Rightarrow.$

$7a_1 + 21d + 27 < a_1 + 23da_1 + 112d^2 < 7a_1 + 21d + 60 - 18d^2$

Т.к. все члены прогресси целые числа $\Rightarrow$

$a_1, d \in \mathbb{Z}$

$\cancel{7a_1 + 21d} + 27 < \cancel{7a_1 + 21d} + 60 - 18d^2$

$18d^2 < 33 \Rightarrow \underline{d = \pm 1} \quad d = -1$ не подходит. т.к прогрессия возрастающая

$d = 1$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0.$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

1

21100086 (U128852 M1298029)

№ 1 (2)

$(a_1+8)^2 > 0 \quad => \quad a_1 \neq -8$

$a_1 + 16a_1 + 49 < 0.$

$$\frac{-16 \pm \sqrt{256-196}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} \approx \frac{-16 \pm 7{,}7}{2}.$$

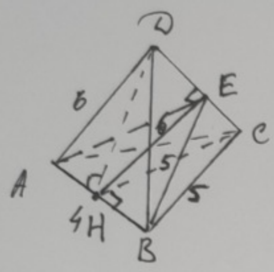
$a_1 \in \left(\frac{-16-7{,}7}{2}; \frac{-16+7{,}7}{2}\right) \setminus \{8\} \qquad a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 \in (-11{,}85; -4{,}15) \setminus \{8\}$

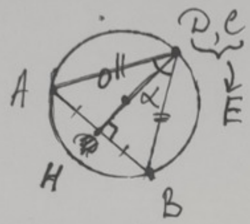
$a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Ответ: $a_1 = \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

№2.



Т.к. $DC \parallel$ оси цилиндра, то вид с верху будет иметь вид.



DC – превратиться в одну точку

При этом, т.к. ABD и ABC – равнобедренне, то и треугольник ABE будет равнобедренным, где E – Висота из т. H на сторону DC.

* В этой проекции длина $AB = 4$, т.е. ничего не изменяется, тогда

$$R = \frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{4}{2\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha} \quad \text{т.к. } \sin\alpha \le 1 \Rightarrow$$

R_{min} будет при $\sin\alpha = 1$ $R = 2$, а $\alpha = 90°$

Т.к. ΔABE – прямоугольный и равнобедренный

$$EH = HA = HB = R = 2 \Rightarrow$$

$$DC = ED + EC = \sqrt{DH^2 - EH^2} + \sqrt{CH^2 - EH^2} \, *$$

* $DH^2 = AD^2 - AH^2 \quad CH^2 = BC^2 - BH^2$

$$DC = \sqrt{36 - 4 - 4} + \sqrt{25 - 4 - 4} = \sqrt{28} + \sqrt{17}$$

Ответ: $DC = \sqrt{28} + \sqrt{17} = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$ 3

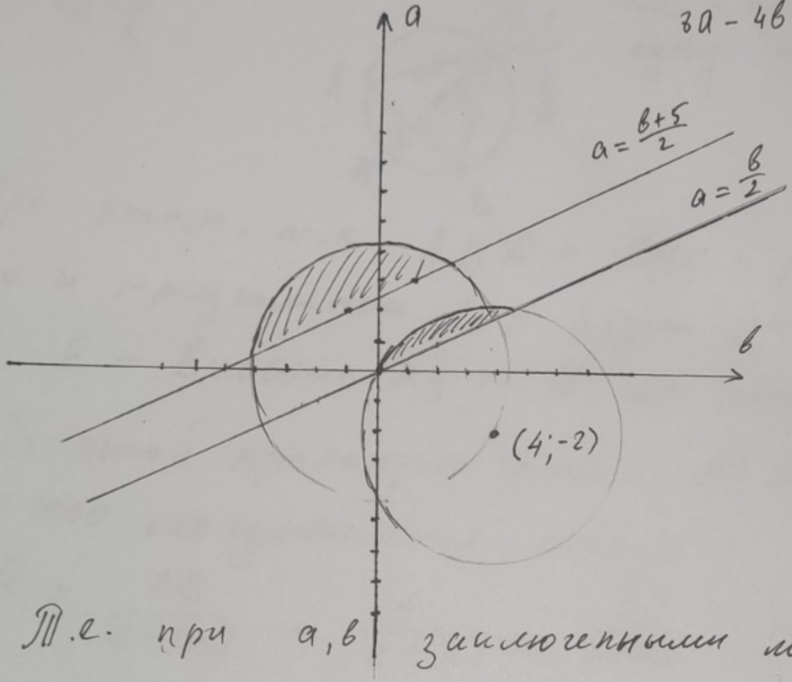
№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq \min(8a-4b, 20). \quad (2). \end{cases}$$

$8a-4b \leq 20$

$a=\frac{5+b}{2}.$

$8a-4b \geq 0$



$8\cdot 1{,}5+2\cdot 4$

4.

Т.е. при a, b заключенными между $a=\frac{b}{2}+\frac{5}{2}$ и $a=\frac{b}{2}$

(2) уравнение имеет вид

$a^2+b^2 \leq 8a-4b$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20$

При $a > \frac{b+5}{2}$ (2) имеет вид $a^2+b^2 \leq 20$

4

Черновик

$(a_1 + 8)^2 > 0$. $a_1 \neq -8$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$256 - 160 - 36 =$

$= 256 - 196 = 60$

$$\frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 49}}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 75 \\ 75 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$\frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 76 \\ 76 \\ \hline 456 \\ 532 \\ \hline 5776 \end{array}$$

$150 + 1$

$300 + 4$

$$\begin{array}{r} 7{,}7 \\ \times 7{,}7 \\ \hline 539 \\ 539 \\ \hline 5929 \end{array}$$

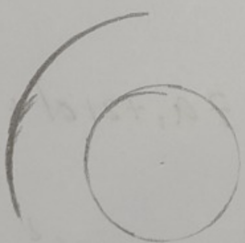
$$\frac{-16 \pm 7{,}7}{2}$$

$$\frac{-16 - 7{,}7}{2} = \frac{-23{,}7}{2} \approx -11{,}85$$

$$\frac{-16 + 7{,}7}{2} = \frac{-8{,}3}{2} = -4{,}15$$

$8 \times 1{,}5 - 4 \cdot 1{,}5$

$12 - 6 = 6$



$2(1{,}5 \times 1{,}5)$

$2 \times 2{,}25 = 4{,}5$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \le 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2$

$2{,}5^2 + 4^2$

$2{,}5^2 + 3{,}5^2$

$1{,}5 - 4 = (2{,}5)^2 + \cancel{8{,}84}^2$

16

6,25

12,25

18

~~№1~~
Черновик

№1

$a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_1 + 2d \quad a_7 = a_1 + 6d$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 7a_1 + 21d$

$a_8 \cdot a_{17} = (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27.$

$a_{11} \cdot a_{14} = (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60.$

$16 \cdot 7 = 112$

$a_1^2 + 23da_1 + 7 \cdot 16d^2 > 7a_1 + 21d + 27$ ($112d^2$)

$a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

$21 \cdot 21 = 441$

$a_1^2 + 23da_1 + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60.$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

$22 \cdot 22 = 484$

$\Delta = 18d^2 \qquad \Delta' = 33$

$112 - 48 = 64$

$d \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$7a_1 + 21d + 27 < a_1^2 + 23da_1 + 112d < 7a_1 + 21d + 60 - 18d^2$

$\cancel{7a_1 + 21d} + 27 < \cancel{7a_1 + 21d} + 60 - 18d^2$

$112 - 48 = 64 \qquad 130 - 81 = 49$

$18d^2 < 33 \Rightarrow d = \pm 1 \qquad 27 \; 3$

$\frac{30 \pm \sqrt{900 - 424}}{2}$

$a_1 - 30a_1 + 112 - 6$

$(a_1 + 7)(a_1 + 16) > 7a_1 + 21 + 27. \qquad a_1^2 - 30a_1 + 106$

$\frac{30 \pm \sqrt{476}}{2}$

$53 \quad 27 \quad 2 \quad 3 \quad 81$

$(a_1 + 10)(a_1 + 13) < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 - 30a_1 + 130 - 39$

$\frac{51}{2} = 25,5 \qquad \frac{30 - 21}{2} = \frac{9}{2} = 4$

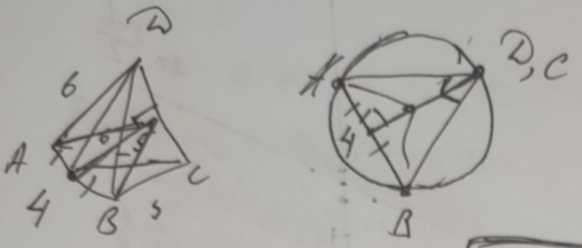
$\frac{30 \pm \approx 21}{2}$

$a_1^2 + 23a_1 - 7a_1 + 112 - 48 > 0 \qquad a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$a_1^2 + 23a_1 - 7a_1 + 130 - 81 < 0 \qquad a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

21100086 (U128852 M1298029)

Черновик



$R = \frac{4}{2\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

$R_{min} = \frac{2}{1} = 2$

$\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$

$\sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$h = 2 = R$

$32 - 4 = \sqrt{28}$

$\sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$\sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$\sqrt{28} + \sqrt{17}$

№ 3.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20$

$a^2 + b^2 \le \min(8a-4b, 20)$.

$a^2 + b^2 \le 20$

$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \le 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$

$8a - 4b \le 20$

$8a \le 20 + 4b$

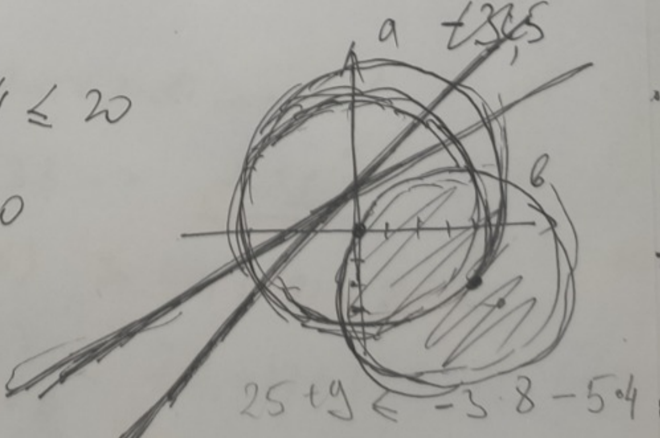
$2a \le 5 + b$

$a \le \frac{5+b}{2}$

$a^2 + b^2 \le 20$.

$25 + 9 \le 40 + 12$

$5; -3$



$25 + 9 \le -3 \cdot 8 - 5 \cdot 4$,

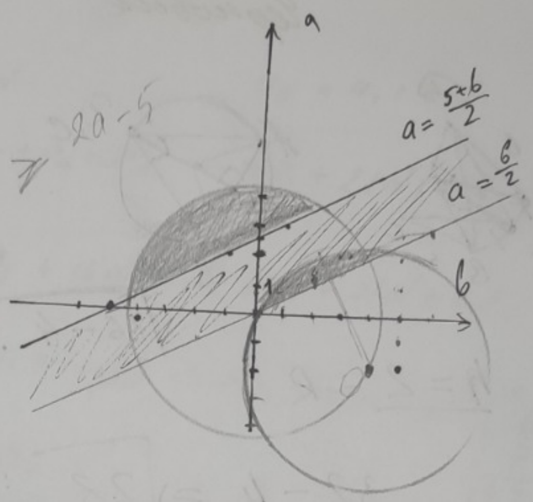
~~№1~~
Черновик

$8a - 4b \leq 20$

$8a \leq 20 + 4b.$

$a \leq \dfrac{5+b}{2}$

$b \geq 2a-5$



1 2

1 + 4   8 − 4

1 + 4

1 2,25   4

3,25

8 − 4,5
4 · 1,5

2   6

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100086**

ID профиля: **128852**

Вариант 21

Проверим подходит ли $x=4$

$\log_{\sqrt{5}}(5) = a = 2$

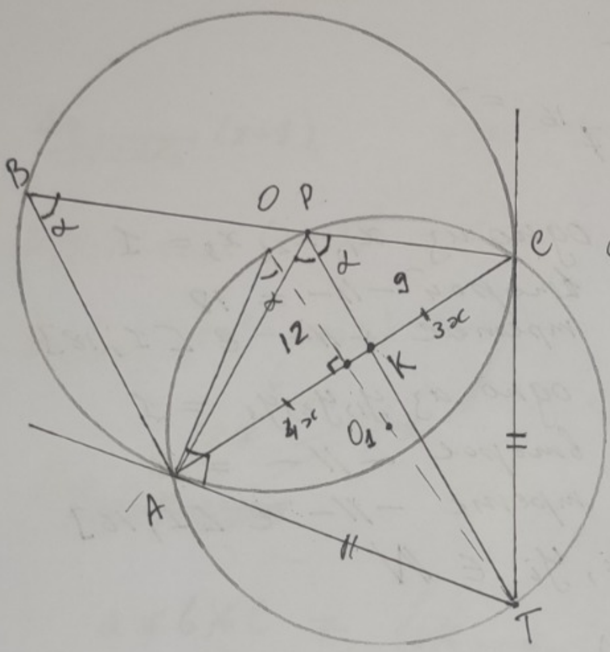
$\log_{\underbrace{16\cdot 2-12+5}_{=25}}(5^2) = b = 1$ Подходит

$\log_5(16\cdot 2-12+5) = c = 2.$

Ответ: $x=4$

2

№6.



$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$ $\Rightarrow \frac{CK}{KA} = \frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

а) $\angle AOC = 2\alpha \Rightarrow$

$\angle AOT = \angle TOC = \alpha$

Т.к $\angle TKC$ - смотрит на дугу $TC \Rightarrow$

$\angle TKC = \alpha \Rightarrow PK \parallel AB$

$\Delta CPK \sim \Delta CBA \Rightarrow$

k - коэффициент подобия

$k = \frac{CK}{CA} = \frac{3}{7} \Rightarrow$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \frac{1}{k^2} = \frac{49}{9} \Rightarrow \underbrace{S_{ABC} = 9 \cdot \frac{49}{9} = 49}$

б) $\alpha = arctg\ \frac{3}{7} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$ $\cos = \frac{7}{\sqrt{58}}$

3

21100086 (U128852 M1298030)

Исправлен

№4.

$$\begin{cases} НОД = (a;b;c) = 35 \\ НОК = (a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases} \Rightarrow$$

$a = 5^{x_1} \cdot 7^{y_1}$

$b = 5^{x_2} \cdot 7^{y_2}$

$c = 5^{x_3} \cdot 7^{y_3}$

- одно из $x_1, x_2, x_3 = 1$
  второй —//— $= 18$
  третье —//— $\in [1;18]$
- одно из $y_1, y_2, y_3 = 1$
  второе —//— $= 16$
  трете —//— $\in [1;16]$

$x_i, y_i \in \mathbb{N}$

$(a;b;c) \neq (b;a;c)$

4

Черновик

№5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = a$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = b$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = c.$

$a = b = c+1$
$b = c = a+1$
$c = a = b+1.$

$a^3 - a^2 - 0 - 4 \mid a-2$
$a^3 - 2a^2$
$a^2 - a$
$a^2 - 2a$
$2a - 4$

$a * b * c = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) + \log (2x-3)^2.$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3)^2 = 4$

$a * b * c = 4$

$a^3 - a^2 - 0 - 4 =$

$a^2(a-1) = 4$

$= (a-2)(a^2+a+2) = 0.$

$a^3 - a^2 - 4 = 0.$ $\quad +2 \quad 8 - 4 - 4$

$a = 2 \Rightarrow x+1 = 2x-3 \Rightarrow x = 4$

$c = 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$4x - 3$

$\log_{\sqrt{5}}(5) = a = 2 \quad x = 4 \quad \cancel{x = 1}$

$\log_{2\cdot 16 - 12 + 5}(5)^2 = b = 1$

$\frac{3}{4}$

$2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{8}$

$2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{8}$

$\log_5 (2\cdot 16 - 12 + 5) = c = 2$

$+5.$

Черновик

№ 4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b, c) = 35 = 5 \cdot 7 \\ \text{НОК}(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 5 \cdot 7 \cdot \alpha \\ b = 5 \cdot 7 \cdot \beta \\ c = 5 \cdot 7 \cdot \gamma \\ \text{НОД}(\alpha; \beta; \gamma) = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} \text{НОД}(\alpha; \beta; \gamma) = 1 \\ \text{НОК}(\alpha; \beta; \gamma) = 5^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

~~Одно из чисел α, β, γ равно 1~~

$a = 5^{x_1} \cdot 7^{y_1}$ $\quad x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \geq 1$

$b = 5^{x_2} \cdot 7^{y_2}$

$c = 5^{x_3} \cdot 7^{y_3}$

x_1, x_2, x_3 — один из них точно равен 1,
а второй равен 18,
третий $\in [1; 18]$

Аналогично для y_1, y_2, y_3 —
один равен 1,
второй равен 16
третий $\in [1; 16]$

Т.к. $(a; b; c) = (b; a; c) = \ldots$

Тогда зафиксируем значение x, т.е.

$a = 5^{1} \cdot 7^{y_1}$

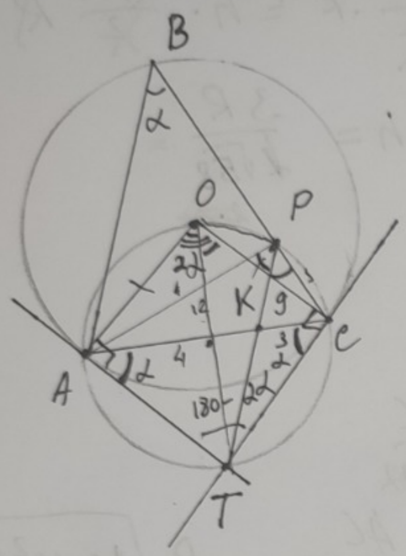
2 $b = 5^{18} \cdot 7^{y_2}$

—

1 $c = 5^{x_3} \cdot 7^{x_3}$

Черновик

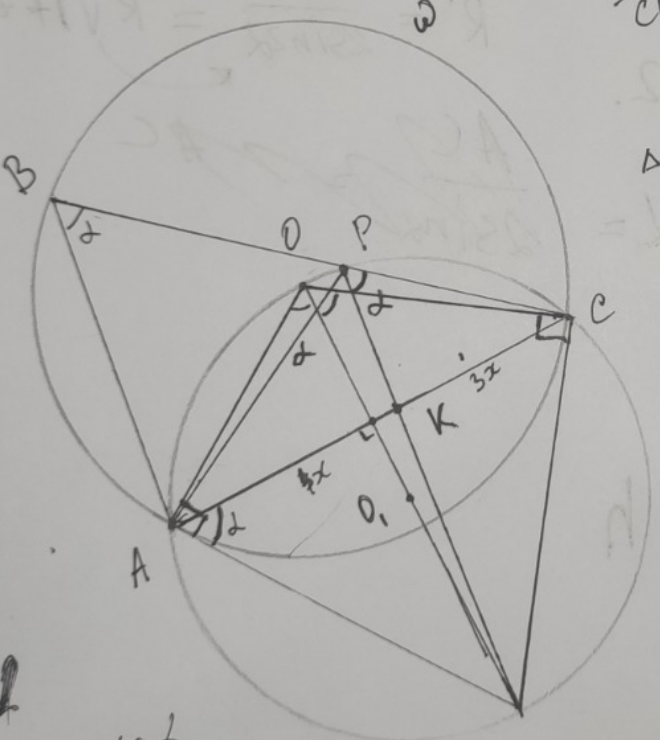
№6.



$R_{\omega} = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

$R_{\omega'} = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$

$\frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.



$\triangle CPK \sim \triangle CBA$

$PK \parallel BA$

$k = \frac{CK}{CA} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7$.

$S_{ABC} = 7 \cdot 3 = 21$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{7}$.

1

2

$\frac{2\cdot\frac{3}{7}}{1+\frac{9}{49}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\cancel{1}\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{3}{\sqrt{58}}$ $\quad \frac{7}{\sqrt{58}}$ $\quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{49+9}}$ $\quad \frac{a}{c}$ $\quad \frac{b}{c}$ $\quad = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ $\quad \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{9}{49}$

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{49+9}}$

$1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha = \cos^2\alpha\left(1+\frac{9}{49}\right) = 1$

$\frac{2\cdot 7\cdot 3}{58}$

$\sqrt{R^2+(tg\alpha\, R)^2}$ черновик $tg\alpha R^2 = S = h \cdot \cancel{2}\frac{\sqrt{58}}{7} R$

$\cancel{R}=\sqrt{R^2+\frac{9}{49}R^2} = \frac{\sqrt{58}}{7} R$ $\frac{3}{\cancel{7}} \cdot R^{\cancel{2}} = h \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{58}}{\cancel{7}} \cancel{R}$

$h = \frac{3R}{\cancel{2}\sqrt{58}} =$ $\cancel{2 \cdot 29}$

$16 = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \cancel{4}$

$12+9=\underline{21}$

$R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

$h \cdot AC = 49 \cdot 2$

$R' = \frac{AC}{2\sin 2\alpha} = R\sqrt{1+tg^2\alpha}$

$\frac{3h}{7} \cdot AC = 21 \cdot 2.$

$R \cdot \sin\alpha = \cancel{\frac{AC}{2\sin\alpha} = AC}$

$= \frac{AC}{2}$

$2R\sin\alpha$ h

№5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=a$ ОДЗ $x+1>0$ $x+1\neq 1$

$2x-3>0$ $2x-3\neq 1$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=b$ $2x^2-3x+5>0$ $2x^2-3x+5\neq 1$

$\Downarrow$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=c$ $x>\frac{3}{2}$ $x\neq 2$

Заметим, что $a*b*c=$

$=\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)*\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2*\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$=\log_{\sqrt{2x+3}}(2x+3)^2=4$

$a\cdot b\cdot c=4$ Теперь ~~рассмотрим~~ применим условие задачи, т.е.

I $a=b=c+1$

II $a=c=b+1$ $\Rightarrow a^2(a-1)=4$ $\Rightarrow$

III $c=b=a+1$ $\rightarrow c^2(c-1)=4$

I-II $a^3-a^2-4=(a-2)(a^2+a+2)=0 \Rightarrow a=2$ (1)

III-II $c^3-c^2-4=(c-2)(c^2+c+2)=0 \Rightarrow c=2$ (2).

(1) $x+1=\sqrt{2x-3}^{\,2}=2x-3$

$x=4$ - по ОДЗ подходит

(2) $2x^2-3x+5=x^2+2x+1$

$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1$ $x=4$

не подходит по ОДЗ.

1