Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100017**

ID профиля: **327403**

Вариант 21

Чистовик Лист 1 Вариант-21

Задача №1 $\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = S = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)7$

$7(a_1+a_7)=2S$

$a_8\cdot a_{17} > S+27$ $a_{11}\cdot a_{14} < S+60$

$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d) > S+27\\(a_1+10d)(a_1+13d) < S+60\end{cases}$ сложим

$\cancel{a_1^2}+(7+16)a_1d+16\cdot 7d^2+\cancel{S}+60 > \cancel{S}+27+\cancel{a_1^2}+23a_1d+13\cdot 10d^2$

$(130-112)d^2 < 33$

$\times\frac{16}{7}$ 112

$d^2 < \frac{33}{18}$, по условию $a_1, a_2 \ldots \in \mathbb{Z}$

значит $d\in\mathbb{Z}$, при этом прогрессия

возрастающая $\Leftrightarrow$ $d\ \cancel{\geq 1} > 0$ $d\in\mathbb{Z}$, $\Rightarrow d\geq 1$

$d^2<\frac{33}{18}$, $d^2\leq 1$ $d\leq 1$, значит $d=1$

---

1) $a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27$

$\underset{48}{}$

$-\frac{112}{48}$ 64

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0$, $\Rightarrow a_1\neq -8$

Лист №2 Чистовик (В - 21)

5 град. 3№ 1

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

$\frac{+81}{\frac{49}{130}}$

~~$a_1^2 + 16a_1 + 70 < 0$ $D = 256 -$~~

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$ $D = 256 - 49 \cdot 4$

$a_1 = \frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}$

$a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15})$

при этом $a_1 \in Z$

$-8 - \sqrt{15} \leq -12$

$4 \leq \sqrt{15}$

$16 \leq 15$ – неверно

$a_1 \neq -8$

$a_1 \in [-11; -5]$

$\boxed{-8-\sqrt{15} \leq -11 \quad -8+\sqrt{15} \geq -5}$

~~Ответ: [-13; -8) ∪ (-8; -3]~~

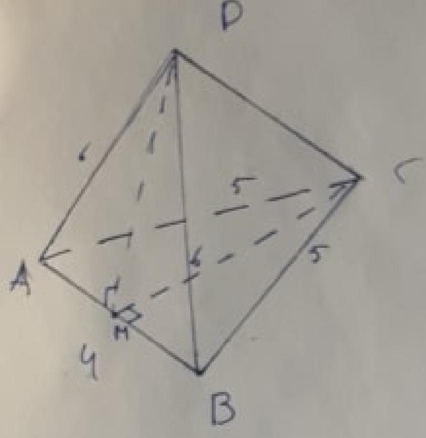
Ответ $[-11; -8) \cup (-8; -5]$

$-11, -10, -9, -7, -6, -5$

21100017 (U327403 M1298253)

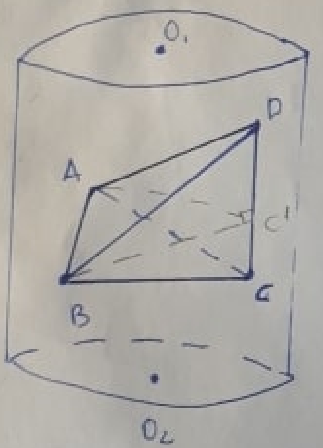
Задача №2 Лист №3 Чистовик

(В-21)

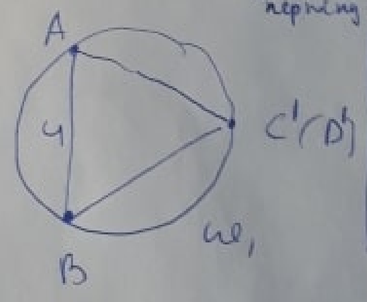


1) Пусть M - середина AB тогда $DM \perp AB$ и $CM \perp AB$ т.к. Δ-ки равнобедренные. значит AB перпенд плоскости (CMD) по признаку $AB \perp CD$, при этом $CD \parallel$ оси цилиндра, значит $AB \perp$ оси цилиндра

CD лежит на боковой поверхности



2) „вид сверху" сечение цилиндра перпенд-ное оси



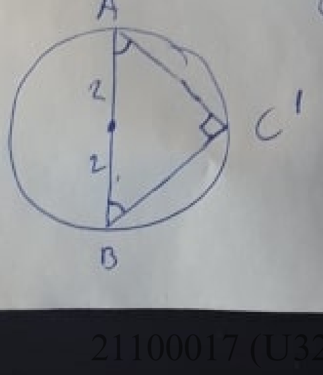
AB - хорда для окружности ω_1, а хорда $\leq D$

$AB \leq 2R$

$R \geq \frac{AB}{2} = 2$

минимальный радиус = 2

в таком случае: $\angle AC^1B = 90^\circ$,



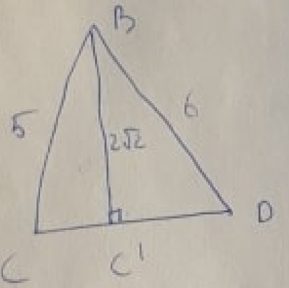
при этом $AC^1 = BC^1$,

т.к. $\Delta BDC = \Delta ADC$

Зад № 2 Прод-ние **Лист № 4** Чистовик

а значит и соответс. высота равна AC' и BC'

3) $AC' = BC' = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

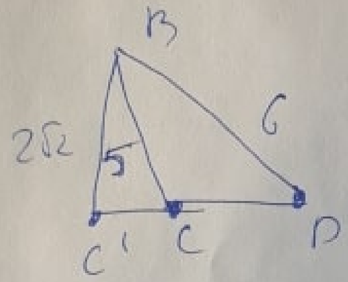


$CC_1 = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

$C'D = \sqrt{36-8} = 2\sqrt{7}$

$CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

$28 | 4$
$-28 | 7$



$CC' = \sqrt{17}$

$DC' = 2\sqrt{7}$

$CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

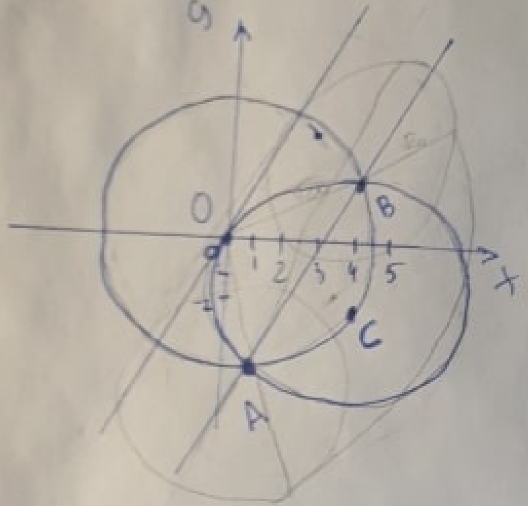
Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{17}$; $2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

Задача №3 Лист № 5 Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20\\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

1) $a^2+b^2=R^2$ - ур. окруж-ти. $R^2 \le 20$ по второму условию

т.к. если $8a-4b \ge 20$, $a^2+b^2 \le 20$



значит (a, b) лежит внутри этой окруж-ти

при этом

$8a-4b \ge 20$

$2a \ge b$

Рассмотрим случай

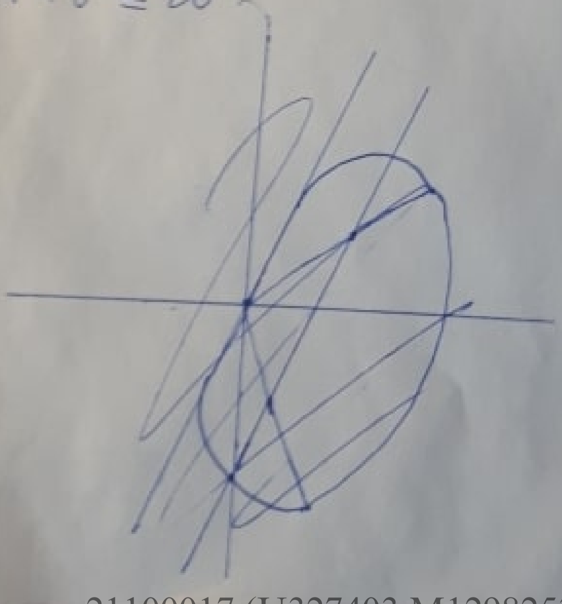
когда $8a-4b \le 20$

$b \ge 2a-5$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le 20$



$-8a+4b+20=0$

$b=2a-5$

$a^2+4a^2-20a+25=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0 \quad D=12$

$a=\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ -

- точки пересечения

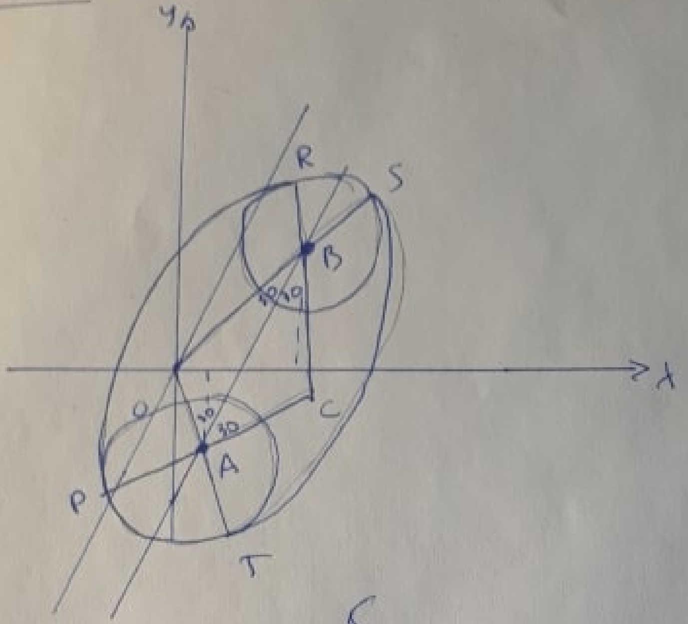
$b = \pm 2\sqrt{3} - 1$

Зад. № 3. Продолжение

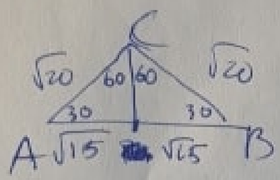
Лист № 6

Чистовик

фигура M – это ~~двух~~ части окружностей



$\angle ACB$:



$AB = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{15}$

$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0$

AOBC – ромб

$S_{CPR} = S_{OTS} = \pi \cdot (2\sqrt{20})^2 \cdot \frac{120}{360} = \frac{80\pi}{3}$

$S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$S_{PAT} = S_{RBS} = \pi (\sqrt{20})^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{10\pi}{3}$

$S_M = 2S_{CPR} - 2S_{ACB} + 2S_{PAT} = \frac{160\pi}{3} - 10\sqrt{3} + \frac{20\pi}{3} =$

$21 \cdot 15 =$

21100017 (U327403 M1298253)

Зад № 3 Продол. <u>лист № 7</u> Чистовик

$$S_м = \frac{180}{3}\pi - 10\sqrt{3} = 60\pi - 10\sqrt{3}$$

Черновик

Черновик

$\frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 = S \quad 7a_1+21d=S \quad :7$

$(a_1+7d)(a_1+16d) > S+27 = 7a_1+21d+27$

$a_1^2+23da_1+7\cdot16d^2-7a_1-21d-27>0$

$a_1^2+23da_1+7\cdot16d^2 > S+27$

$(a_1+10d)(a_1+13d) < S+60$

$a_1^2+23a_1d+13\cdot10d^2 < S+60$

$a_1 \quad S+60+\cancel{a_1^2}+\cancel{23da_1}+7\cdot\overset{112}{16}d^2 > S+27+\cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+13\cdot10d^2$

$112d^2-130d^2>-33$

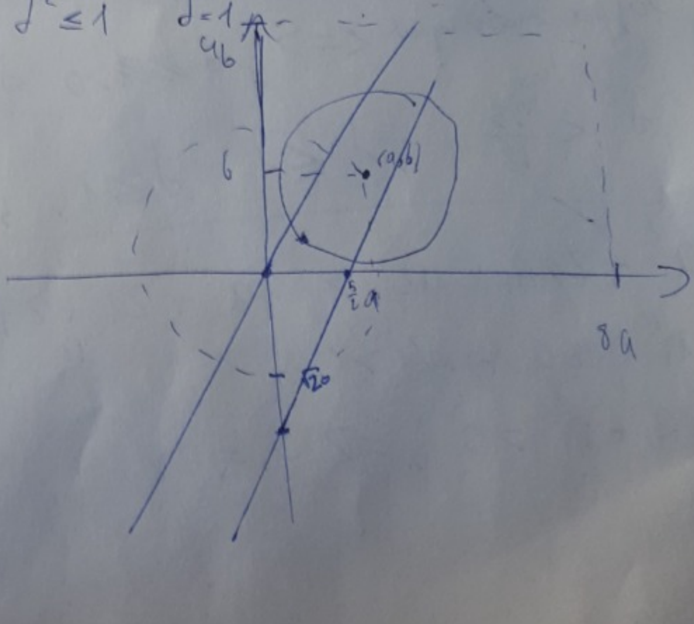
28

$28d^2<33 \quad d<\sqrt{\frac{33}{28}} \quad d$

$d^2<\frac{33}{28} \quad d^2\le1 \quad d=1$

$a=1 \quad b=1$

$8a=4b$



21100017 (U327403 M1298253)

Черновик

Черновик

$-8+\sqrt{15} \vee -4 \ , -5$

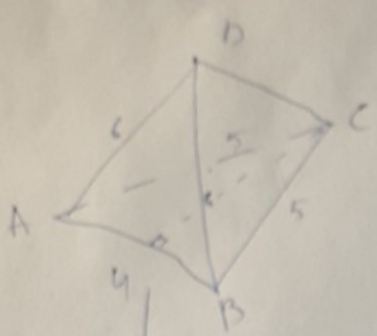
$\sqrt{15} < 4$

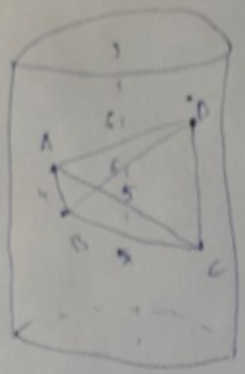
$\sqrt{15} > 3$

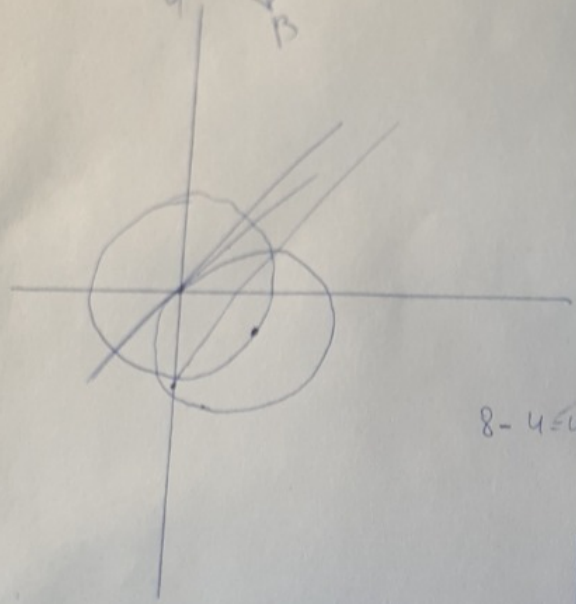
$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\, 16 \\ \hline 96 \\ +\,16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$28-17:0$

Черновик







$CD \perp AB$

$-8+\sqrt{15} \not< -3$

$\sqrt{15} \not< 5$

для $a =$

$-8+\sqrt{15} \vee -4$

$8-4=4$

$\sqrt{15} \not< 4$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \leq 20$

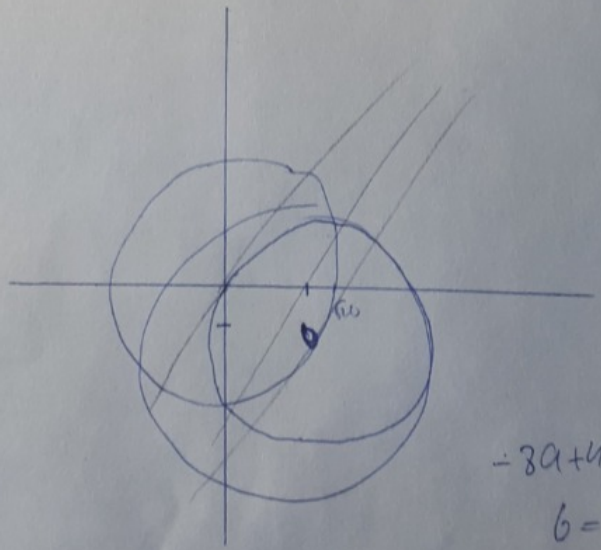
$b = 2a-5$

$-8-3,5=-11,5$

$-8+3,5=-4,5$

$-8+\sqrt{15} \geq -4$

$\sqrt{15} \geq 4.$



$-8a+4b=0$

$b=2a$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100017**

ID профиля: **327403**

Вариант 21

Чистовик Лист №1 Задача №4 В-21

1) т.к. НОК: a, b, c знаешь

числа a b c представляются в виде $5^i \cdot 7^j$

$a = 5^{a_1} \cdot 7^{b_1}$ $b = 5^{a_2} \cdot 7^{b_2}$ $c = 5^{a_3} \cdot 7^{b_3}$

$a_i, b_i \geq 1$ т.к. $НОD = 5^1 \cdot 7^1$

2) наибольшая степень пятерки это 18

т. е. a_1, a_2 или $a_3 = 18$

и b_1, b_2 или $b_3 = 16$

3) выберем способы чтобы $b_1, b_2, b_3 = 16$

$a_1\ a_2\ a_3 = 18$

~~3 · 3 — кол-во способов расставить числа 16 и 18, а остальные числа $b_2\ b_3\ a_2\ a_3$ выбираем любым способом~~

~~$S_1 = 3 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 18$~~

$b_i \in [1; 16]$

$a_i \in [1; 18]$

4) числа вида $5^{18} \cdot 7^k$, $5^{18} \cdot 7^l$ … посчитали дважды

Чистовик Лист №2 Продол-ние 3№4

I. выбрать b_i : ~~$3 \cdot 16 \cdot 16 - 2 - 15 \cdot 3 =$~~

~~$= 768 - 2 - 45 = 721$~~ ~~способами~~

II. выбрать a_i : ~~$3 \cdot 18 \cdot 18 - 2 - 17 \cdot 3 =$~~

~~$= 972 - 2 - 51 = 919$~~ способами

~~$721 \cdot 919 = 662599$~~

~~можно по считать другим способом~~ ~~$16 \cdot 16 \cdot 16 - 15 \cdot 15 \cdot 15 =$~~

~~$= 721$~~

~~$18 \cdot 18 \cdot 18 - 17 \cdot 17 \cdot 17 = 919$~~

~~Ответ: 662599~~

не учел, что $a_i \; b_i = 1$ обязательно

$16 \cdot 16 \cdot 16 - 14 \cdot 14 \cdot 14 = S_1$, $S_2 = 18 \cdot 18 \cdot 18 - 16 \cdot 16 \cdot 16$

$(16^3 - 14^3)(18^3 - 16^3) = S$.

Ответ: $(16^3 - 14^3)(18^3 - 16^3)$

$256 \times 3 = 768$

$18 \times 18 = 144 + 18 \cdot$ ... $= 324$; $324 \times 3 = 972$

721×919: 6489, 721, 6489; 662599

21100017 (U327403 M1298254)

Чистовик Задача №5 Лист №3

$$2\log_{2x-3}(x+1),\ 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3),\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$2x^2-3x+5$

$D=9-5\cdot 8<0$

$2x^2-3x+1=0$

$D=9-8=1$

$x=\frac{3\pm 1}{4}=1;\frac{1}{2}$

$(2x-3)\ x+5$

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3\neq 1 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \\ \quad >0 \\ x+1\neq 1 \\ x+1>0 \end{cases}$$

1) $2x^2-3x+5 \overset{>}{\vee} x+1$

$2x^2-4x+4 \vee 0$

$D=16-4\cdot 4\cdot 2<0$

$x+1>1$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)>1$

2) при $x\in(\frac{3}{2};2)$

$\log_{2x-3}(x+1)^2<1$

$$\begin{cases} x^2+2x+1>2x-3 \\ 2x-3<1 \end{cases}$$

$\log_{\underset{>1}{2x^2-3x+5}}(2x-3)^2<1$

$$\begin{cases} 4x^2-12x+9 \overset{<}{\vee} 2x^2-3x+5 \\ 2x^2-9x+4 \vee 0 \end{cases}$$

$D=81-32=49$

$x=\frac{9\pm 7}{4}=4;\frac{1}{2}$

Такого быть не может

Чистовик 3 № 5 Прод-ние Лист №4

3) при $x \in (2;4)$

$\log_{2x-3}(x+1)^2 > 1$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 < 1$ – такое возможно.

$\log_{2x-3}(x+1)^2 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

4) ~~Преобр.~~ ~~по логарифм~~ приведем к новому основанию

$$\frac{2}{\log_{(x+1)}(2x-3)}, \qquad \frac{2\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)},$$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

их произведение: $=4$

$a\ b\ c = 4 \qquad a = b = c+1$

$a^2(a-1) = 4 \qquad a^3 - a^2 - 4 = 0$

$$\begin{array}{r|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \hline -(a^3-2a^2) & a^2+a+2 \\ a^2-4 & \\ -(a^2-2a) & \\ 2a-4 & \end{array}$$

$a^2+a+2=0$
$D = 1-8 < 0$

значит $a = 2 = b$

$c = 1$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) > 1$ значит оно равно 2

21100017 (U327403 M1298254)

Чистовик   3 №5   Прод-ние   Лист №5

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$2x^2-3x+5=x^2+2x+1$

$x^2-5x+4=0$ $x=1;4$, проверка.

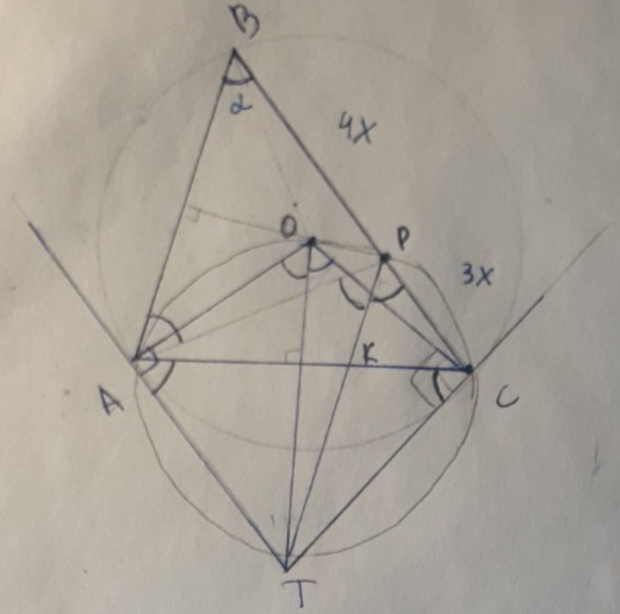
$x=1$ $\log_{\sqrt{2-3}}(1+1)$ – не существует

$x=4$ $\log_5 5^2=2$, $\log_{2\cdot16-3\cdot4+5} 5^2=$

$=1$ – верно

Ответ: 4

Задача №6 Чистовик Лист №6



$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{ABK}}{S_{KBC}} = \frac{4}{3}$$

(высоты равны)

$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC =$

$= \angle APC \cdot \frac{1}{2}$

$\angle BAP = \angle APC - \angle ABC =$

$= \angle ABC \Leftrightarrow$

$AP = BP$

$OP \perp AB$

$AO = OC, \quad AT = TC$

$$\frac{PC}{AP} = \frac{KC}{AK} = \frac{3}{4} \qquad AP = BP \quad PC = \frac{3}{4}AP$$

$$\frac{PC}{BP} = \frac{3}{4}, \quad \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{3}{7}, \text{ (т.к. основания равны)}$$

а) $S_{ABC} = \frac{7}{3}\cdot(12+9) = 49$

б) $\angle ABC = \alpha \qquad \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = R_1 = OC$

$\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\cdot AB\cdot BC = 49 \qquad AB = 2\cdot 4x\cdot\cos\alpha$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sin\alpha\cdot \overset{4}{\cancel{8x}}\cos\alpha\cdot\cancel{7}x = \overset{7}{\cancel{49}}$

$$x^2 = \frac{7}{4\sin\alpha\cos\alpha}$$

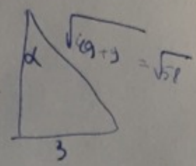
21100017 (U327403 M1298254)

З № 6 Продол-ние   Чистовик Лист № 7

$$\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AB}{\sin BCA}$$

$\cos\alpha =$

$$= \frac{7}{\sqrt{58}}$$



$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB\cdot BC\cos\alpha =$$

$$\cancel{= \frac{49^2}{16\sin^2\alpha\cos^2\alpha} + \frac{14^2}{\sin^2\alpha} - 2\cdot\frac{49\cdot 14}{4\sin^2\alpha\cos\alpha}\cdot\cos\alpha =}$$

$$\cancel{= \frac{49}{16\sin^2\alpha\cos^2\alpha} + \frac{196-363}{\sin^2\alpha} =}$$

$$\cancel{= \frac{49 - 167\cos^2\alpha\cdot 16}{16\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{49 - 167\cdot 16\cdot\frac{49}{58}}{16\cdot\frac{9}{58}\cdot\frac{49}{58}} =}$$

$$\cancel{= \frac{49\cdot 29 - 167\cdot 8\cdot 49}{\frac{36\cdot 49}{29}} =}$$

З № 6 чистовик Прод-ние Лист № 8

$x = \sqrt{\frac{7}{4\sin\alpha\cos\alpha}}$ $BC = \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{4\sin\alpha\cos\alpha}}$

$AB = 8\cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{7}{4\sin\alpha\cos\alpha}}$

по т-ме косинусов:

$$AC^2 = \frac{49\cdot 7}{4\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{64\cos^2\alpha\cdot 7}{4\sin\alpha\cos\alpha} - 2\cdot\frac{\overset{112}{56}\cos\alpha\ 7}{4\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\cos\alpha =$$

$$= \frac{49\cdot 7}{4\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{\cos^2\alpha\cdot 7}{4\sin\alpha\cos\alpha}\underbrace{(64 - 112)}_{-48}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ -\ 64 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$= \frac{7}{4\sin\alpha\cos\alpha}\underbrace{(49 - \cos^2\alpha\cdot 48)}_{\substack{\shortparallel \\ 49 - \frac{49}{58}\cdot 48}} = \frac{49\cdot 7}{4\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{10}{58} =$$

$$= \frac{49\cdot\cancel{7}\cdot 10}{4\cdot\cancel{58}\cdot\frac{3}{\cancel{\sqrt{58}}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{\sqrt{58}}}} = \frac{49\cdot 5}{6}$$

$$AC = 7\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{7\sqrt{30}}{6}$$

Черновик.

56+6=62

18
×18
144
+18
324
×18
2592
324
5832

17
×17
119
17

289

289
×17
2023
289
4913

5832
−4913
919

919
×721
919
1838
6433
662599

Черновик

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = \frac{1}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$2x-3=a$ $x+1=b$

$x^2+2x+1 > 2x-3$

$2x^2-3x+5 \vee x+1$

$2x^2-4x+4>0$

$2\log_a b$ $2\log_{ab-a-5} a$ $\log_b(ab-a-5)$

$a(b-1) = 2x^2-3x+5$

$2x^2-3x+5 \vee x+1$

$2x^2-4x+4$

$16-48<0$

$\log_{2x-3}(x+1)^2$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5) > 1$

x $x>\frac{3}{2}$

1. $x\in(\frac{3}{2};2)$

$\log_{(2x-3)}(x+1)^2<1$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2<1$ $t>1$

~~log~~ $x\in(2;4)$

$\log_t(2x-3)^2$

$\frac{2\cdot 1}{\log_{x+1}(2x-3)}$

$\frac{2\log_{x+1}(2x-3)}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}$

$\frac{4}{\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)}$

>1

$324 \times 18 = 2592 + 324 = 5832$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+3)$

219×17: $2228 + 289 = 5113$

$32-12+5=$

1719

719.

Черновик

$21 \cdot (256 + 16 \cdot 14 + 196) / (324 + 256 + 18 \cdot 16)$

$kd \quad ld \quad fd \quad d = 35$

$35k \quad 35l \quad 35f \quad 5^1 \cdot 7^1$

$5 \cdot 7 \cdot k \quad 5 \cdot 7 \cdot l \quad 5 \cdot 7 \cdot f$

$921 \quad k \cdot l \cdot f \le 5^{17} \cdot 7^{15}$

$5^{a_1} \cdot 7^{b_1} \quad 5^{a_2} \cdot 7^{b_2} \quad 5^{a_3} \cdot 7^{b_3}$

$a_1\ b_1 \ldots \ge 1$

$5^{18} \quad 5^{18} \quad 5^{18}$

$2x^2 - 3x + 5 - 2x + 3 \ge 0$

$2x^2 - 5x + 8 \ge 0$

$25 - 8 \cdot 8 < 0$

$3 \cdot 16 \cdot 16 - 2$

$5^{12} \quad 24 \quad 16 \quad 16 \quad 1$

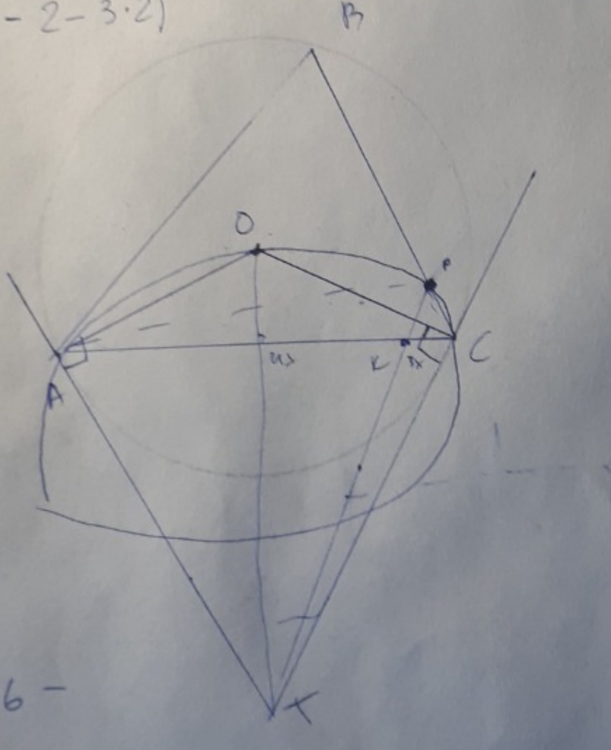
$2x^2 - 3x + 5 > 1$

$2x^2 - 3x + 4$

$5^3 \cdot 7^3 \quad 5 \cdot 7 \quad 5 \cdot 7 \quad 15 \cdot 3$

$(3 \cdot 3^{27} \cdot 3 - 2 - 3^6 \cdot 2)^2$

19^2



$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times\ 16 \\ \hline 1536 \\ 256 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$2x - 3 \vee x^2 + 3x + 1$

$-4 < x^2$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times\ 15 \\ \hline 1125 \\ +225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$4x^2 - 12x + 9 \vee 2x^2 - 3x + 5$

$2x^2 - 9x + 4 \vee 0$

$81 - 4 \cdot 8$

49

$x > \frac{3}{2}$

$x = \frac{9 \pm 7}{4} = 4;\ \frac{1}{2}$

$16 \cdot 16 \cdot 16 -$

$- 15 \cdot 15 \cdot 15$

$$\begin{array}{r} 4096 \\ -\ 3375 \\ \hline 721 \end{array}$$

21100017 (U327403 M1298254)