Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104969**

ID профиля: **101133**

Вариант 20

Чистовик ①

№ 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \text{ — круг с центром в } (a;b) \text{ и } R=\sqrt{13}\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b, 13)\end{cases}$$

① $-4a-6b\le 13$

$b\ge -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$ – ~~мн-во ф-я график – прямая~~

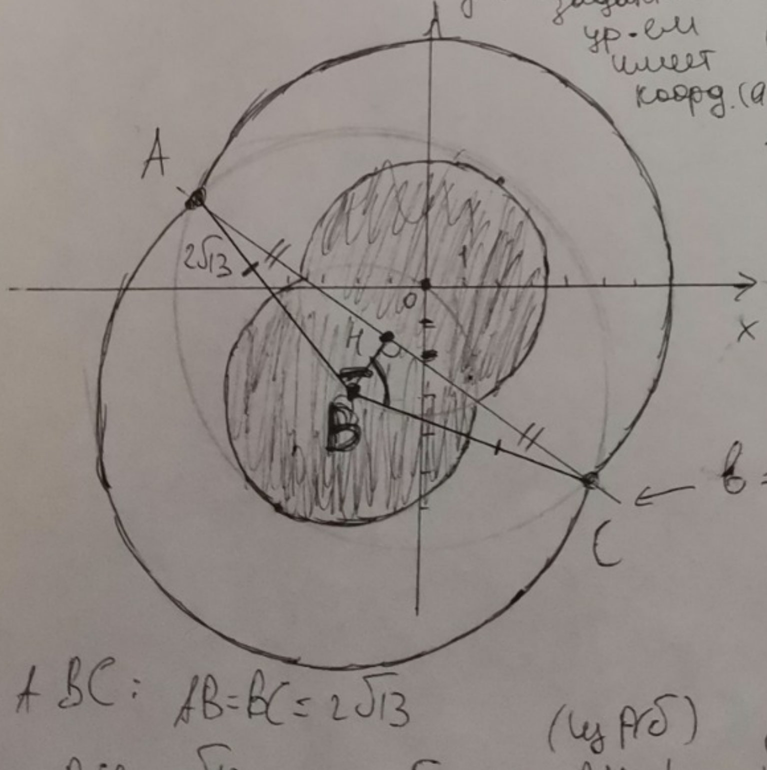
$a^2+b^2\le -4a-6b$

$(a^2+4a+4)+(b^2+6b+9)\le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$ – круг в центром $(-2;-3)$ и $R=\sqrt{13}$ в коорд. $b(a)$

② $a^2+b^2\le 13$ – круг с центром $(0;0)$ и $R=\sqrt{13}$

$b\ge -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$



т.к. центр окр. заданной 1-м ур-ем имеет коорд. (a;b)

• заштриховано мн-во центров кр. $(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$

• фигура M – мн-во точек ∈ 2-м окр. с ц. (0;0) (-2;-3) и $R=2\sqrt{13}$

52-3,25 = 48,75

$\triangle ABC$: $AB=BC=2\sqrt{13}$

выс. $BH=\frac{\sqrt{13}}{2}$

(из АгБ)

$S_{\triangle ABC}=BH\cdot AH=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{4\cdot 13-\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{48{,}75}$

$\angle ABC = 2\arcsin \dfrac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{2\sqrt{13}} = 2\arcsin\frac{1}{4}$

Продолжение №3 (2)
Чистовик

$S_1 = S$ части нижнего круга, лежащего под прямой $b=-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$ и вне $\triangle ABC = \pi R^2 \cdot \dfrac{2\pi - \angle ABC}{2\pi} = \pi\, 4\cdot 13 \cdot \dfrac{2\pi - 2\arcsin\frac{1}{4}}{2\pi} =$

$= 2\pi \cdot 26\, \dfrac{2(\pi - \arcsin 0{,}25)}{2\pi} = 52(\pi - \arcsin 0{,}25)$

$S_M = 2(S_1 + S_{\triangle ABC}) = 104(\pi - \arcsin 0{,}25) +$

из симм. отн $b=-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$

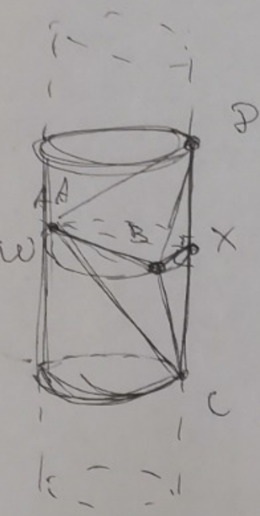
$+\sqrt{13\cdot 48{,}75} =$

$= \boxed{104(\pi - \arcsin(0{,}25)) + \dfrac{\sqrt{\cancel{}\,2533}}{50}}$

Ответ:

Чистовик (3)

№2



1) Из цилиндра вырежем часть, осн-я которой ⊥ осн-ям большого цилиндра и на осн-ях которой лежат С и Д.

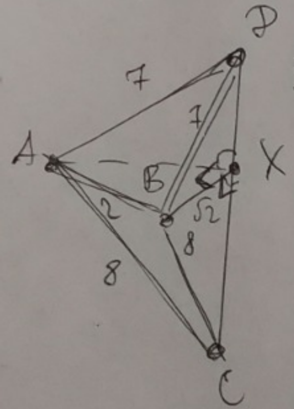
2) СД ∥ оси; ось ⊥ осн. => СД => осн. маленького цилиндра.

3) AX и BX ⊥ CД => (ABX) ⊥ CД; около △ABX опишем окр. ω

ω = осн-ю цилиндра.

4) Т. sin для △ABX: $2R_\omega = \frac{AB}{\sin\angle X}$. для min R надо

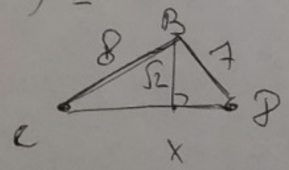
max sin∠X т.е. ∠X = 90°



5) BX = AX как выс. в равных △ => △ABX р/б и прям.

$BX = AX = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

6) △CBД: CД = CX + ДX = $\sqrt{64-2} + \sqrt{49-2} =$



$= \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

Чистовик 4

№1

$$S = \frac{(a_1 + (a_1+4d))}{2}\cdot 5 = 5a_1+10d$$

все члены прогр. целые => a_1 и d тоже целые

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15 \\ a_8 a_9 < S+39 \end{cases};\quad \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1^2+15a_1d-5a_1-10d-15+50d^2) > 0 \\ (a_1^2+15a_1d-5a_1-10d-15+50d^2)+(6d^2-24) < 0 \end{cases}$$

$6d^2-24<0$

$d^2-4<0$

$d \in \{-1;0;1\}$

$\boxed{d>0 => d=1}$ по усл-ю

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+25 \\ a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+49 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2>0 \\ (a_1+5)^2-18<0 \end{cases} \quad | \ a_1 \neq -5$$

$-\sqrt{18} < a_1+5 < \sqrt{18}$

$-\sqrt{18}-5 < a_1 < \sqrt{18}-5$

$\sqrt{18}\in(4;5) \longrightarrow => a_1 \in (-10;0)$

$a_1 \in \{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Ответ: $-9;-8;-7;-6$
$-4;-3;-2;-1$

21104969 (U101133 M1303226)

Черновик

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15 \\ a_8 a_9 < S+39 \end{cases}$$

$$S_5 = \frac{(a_1+(a_1+4d))\,5}{2} = 5(a_1+2d) = 5a_1+10d$$

$a_1 \in Z$, $d>0$, $a_1 \in Z$, $d \in Z$

1, 2, 3, 4, 5

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) \leq 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$10x^2-2x-3=0$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

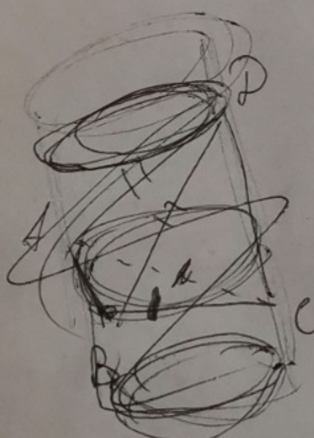
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+30}}{}$

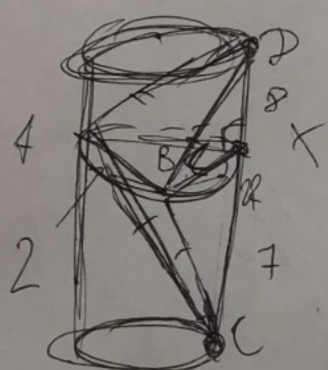
$$\begin{cases} a_1^2+a_1(15d-5)+(50d^2-10d-15) > 0 \\ a_1^2+a_1(15d-5)+(56d^2-10d-39) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ -15 \\ \hline 24 \end{array}$$

$50d^2+d(15a_1-10)+(a_1^2-5a_1-15) > 0$

$0>$





№3 Черновик

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)^*\end{cases}$ — круг с центром в $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$

* ① $-4a-6b<13$

$a<\frac{13+6b}{-4}$

$a<-\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$

$a<-1{,}5b-3{,}25$

$1{,}5b<-a-3{,}25$

$b<-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$

≤ 0

$\begin{cases}a^2+b^2\le -4a-6b \\ a<-1{,}5b-\frac{13}{4}\end{cases}$ * $\begin{cases}a^2+4a+(b^2+6b)\le 0 \\ a<-1{,}5b-\frac{13}{4}\end{cases}$ $\begin{cases}b^2+6b+(a^2+4a) \\ b<-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}\end{cases}$

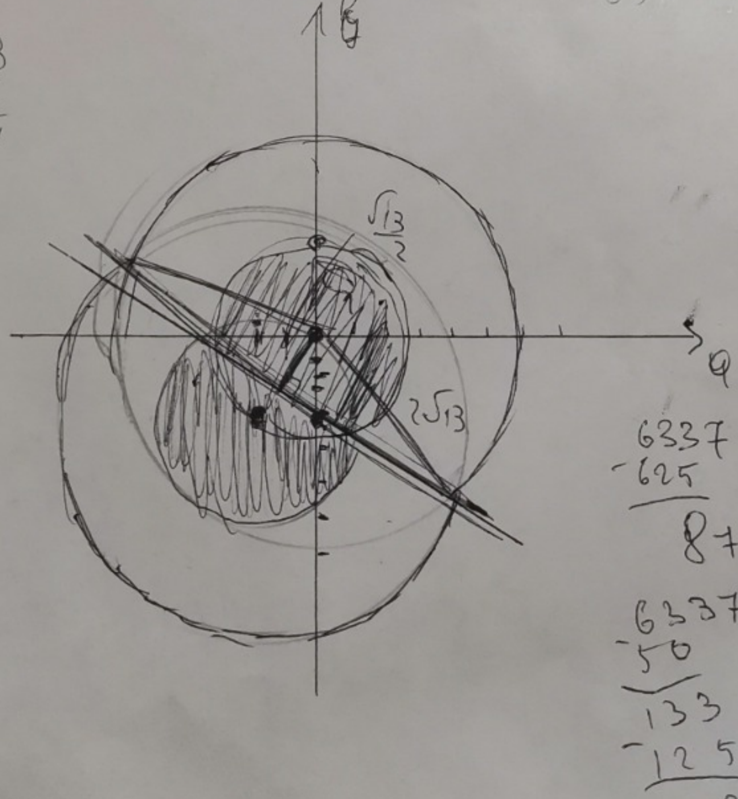
* $b^2+6b+(a^2+4a)\le 0$

$(b^2+6b+9)+(a^2+4a+4)\le 13$

$(b+3)^2+(a+2)^2\le 13$ — круг с ц. $(-2;-3)$ и $R=\sqrt{13}$

$4875 : 13 = 37$
-39
97
91
65

$73 \cdot 7 = 91$



$4875 \cdot 13 = 14625 + 4875 = 63375$

$63375 : 625$
-625
875

$63375 : 25 = 2533$
-50
133
-125
87
-75
126

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104969**

ID профиля: **101133**

Вариант 20

Чистовик

1

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{16} \end{cases}$$

=> есть число, в разложении которого на простые множители есть 2^1 и есть число в разложении которого на простые множители есть 5^1

наиб. степень 2 среди разложений чисел на простые множители — 17

наиб. степень 5 среди разложений чисел на простые множители 16

среди простых множителей a, b и c только 2 и 5

~~все вари~~

всего вариантов распределений степеней 2 по разложениям a, b и c:

$$\underbrace{3\cdot2\cdot15}_{\text{для вар. } 1;17;[2;16]}+\underbrace{3}_{\text{для } 1;17;1}+\underbrace{3}_{\text{для вар. } 17;1;17}=6\cdot16$$

для вар. 1;17;[2;16]
3 вар. поставить (1)
2 вар. поставить (17)
1 вар поставить число от 2 до 16 (15 вар.) 15·1=15

для 1;17;1
3 вар поставить (17)

для вар. 17;1;17
3 вар. поставить (1)

всего вариантов распределения степеней 5 по a, b и c:

$$\underbrace{3\cdot2\cdot14+3+3}=6\cdot15$$

объясняется ан-но но в случае 1; 16; [2;15] выбирается ∀ число от 2 до 15 (14 вар; 14·1=14)

Всего ~~вар.~~ троек (a;b;c):

$6\cdot16\cdot6\cdot15=36\cdot16\cdot15=$

$=$ ~~8...~~ 8640

Ответ: 8640

Чистовик (2)

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ: $\begin{cases} x-4>0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ 2x-8>0 \\ \sqrt{2x-8} \neq 1 \\ 5x-26>0 \\ \sqrt{5x-26} \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x-4 \neq \pm 1 \\ 2x-8 \neq 1 \\ x>5,2 \\ 5x-26 \neq 1 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} x>5,2 \\ x \neq 5,4 \end{matrix}}$

$x-4=a$

$\sqrt{5x-26}=b$

$\sqrt{2x-8}=c$

Имеем:

$\log_c a$

$\log_{a^2} b^2 = \log_a b$

$\log_b c^2 = 2\log_b c$

~~① $\log_c a = \log_a b$~~ ~~разберём все случаи~~

~~$\frac{1}{\log_a c} - \log_a b = 0$~~

~~$\frac{1-\log_a(b+c)}{\log_a c} = 0$~~

~~$b+c=a$ или $a=1$, но тогда $x=5 \notin$ ОДЗ~~

~~$x-4=\sqrt{5x-26}+\sqrt{2x-8}$~~

~~$x^2-8x+16=7x-34+2\sqrt{5x-26}\sqrt{2x-8}$~~

~~$x^2-15x+50=2\sqrt{5x-26}\sqrt{2x-8}$~~

заметим, что их произв-е $=2$ → пусть тот логарифм, у которого есть равный будет $=m$

$m^2(m+1)=2$

$m^3+m^2-2=0$

$$\begin{array}{r|l} m^3+m^2-2 & m-1 \\ \underline{m^3-m^2} & m^2+2m+2 \\ 2m^2-2 & \\ \underline{2m^2-2m} & \\ 2m-2 & \\ \underline{2m-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$(m-1)(\underbrace{m^2+2m+2}_{D<0})=0$

$m=1$

① $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1$

$x-4=\sqrt{2x-8}$

$x^2-8x+16=2x-8$

$x^2-10x+24=0$

$(x^2-10x+25)=1$

$x-5=\pm 1$

$\left[\begin{matrix} x=6 \\ x=4 \notin \text{ОДЗ} \end{matrix}\right.$

$x=6$: $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$

$=$ ~~$\log_2 \ldots$~~ ~~не $\log x$~~

$=\log_2 4 = 2 = 1+1$

$3m^2+2m = m(3m+2)$

№ 5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\boxed{\begin{matrix} x-4=a \\ \sqrt{5x-26}=b \\ \sqrt{2x-8}=c \end{matrix}}$

ОДЗ: $\begin{cases} x-4>0 \\ (x-4)^2\neq 1 \\ 2x-8>0 \\ \sqrt{2x-8}\neq 1 \\ 5x-26>0 \\ \sqrt{5x-26}\neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>4 \\ x-4\neq \pm 1 \\ x>4 \\ 2x-8\neq 1 \\ x>\frac{26}{5} \\ 5x-26\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x>5,2 \\ x\neq 4,5 \\ x\neq 3 \\ x\neq 5 \\ x\neq \frac{27}{5} \end{cases}$

$\boxed{x>5,2}$

$\boxed{x\neq 5,4}$

① $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \end{cases}$

$\begin{cases} \log_c a = \log_{a^2} b^2 \\ \cancel{\log_{a^2} b^2 + 1 = 2\log_b c^2} \end{cases}$ $\begin{cases} \log_c a = \log_a b \\ \cancel{\log_a b + 1 = 2\log_b c} \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{\frac{1}{\log_a c} - \log_a b = 0} \\ \cancel{\log_a(ab) = \frac{2\log_a c}{\log_a b}} \end{cases}$

$\cancel{\frac{\log_a a - \log_a(b+c)}{\log_a c} = 0}$

$\cancel{\frac{2\log_a c - \log_a b}{\log_a b}}$

$2\log_b c \cdot \log_c a \cdot \log_a b = \boxed{2}$

$a(a+1) = a^3 + a^2 = 2$

$\frac{1}{\log_a c} - \log_a b = 0$

$\frac{1-\log_a(b+c)}{\log_a c} = 0$

$a^3 + a^2 = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$a^3 + a^2 + 2a - 2a - 2 = 0$

$a = 1$

$a = b + c$;

$x-4 = \sqrt{5x-26} + \sqrt{2x-8}$

$x^2 - 8x + 16 = 7x - 34 + 2\sqrt{5x-26}\sqrt{2x-8}$

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

→ есть число, где 2' и есть число, где 5'

↓

прост. множ. только 2 и 5;

наиб. степень 2 − 17; 5 − 16

степ. 2: 1; 17; [1; 17] 17 вар

степ. 5: 1; 16; [1; 16] 16 вар

$3\cdot 2\cdot 16\cdot 17$ $3\cdot 2\cdot 16+3$

$3\cdot 2\cdot 16$ $3\cdot 2$

разн: 14 15 16 $3\cdot 2\cdot 14+3+3$

$3\cdot 2\cdot 15+3+3$

$6^2\cdot 16\cdot 17$

или $\underline{6^2\cdot 16\cdot 17}$

$36\cdot 98+405$

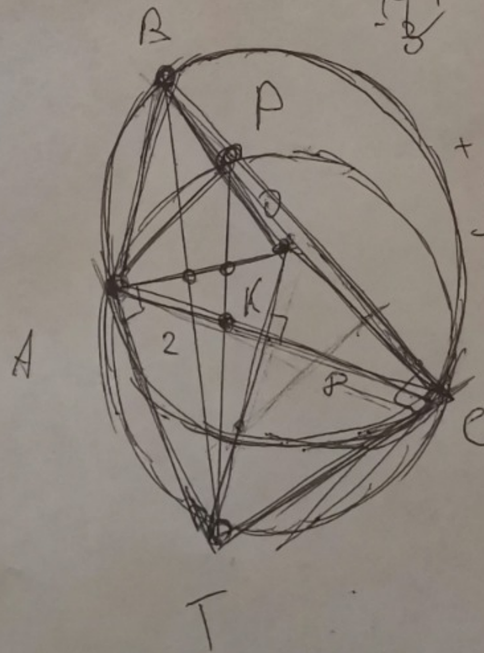
=

$$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot\ 8 \\ \hline 98 \end{array}$$

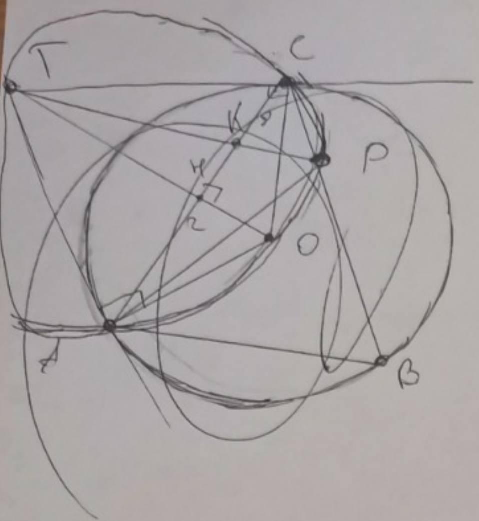
$$\begin{array}{r} 16 \\ \cdot\ 15 \\ \hline +\ 80 \\ 16\ \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \cdot\ 240 \\ \hline +\ 144\ \\ 72\ \ \\ \hline 8640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \cdot\ 37 \\ \hline +\ 231 \\ 111\ \\ \hline 1341 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 90 \\ 16 \\ \cdot\ 90 \\ \hline 1440 \end{array}$$

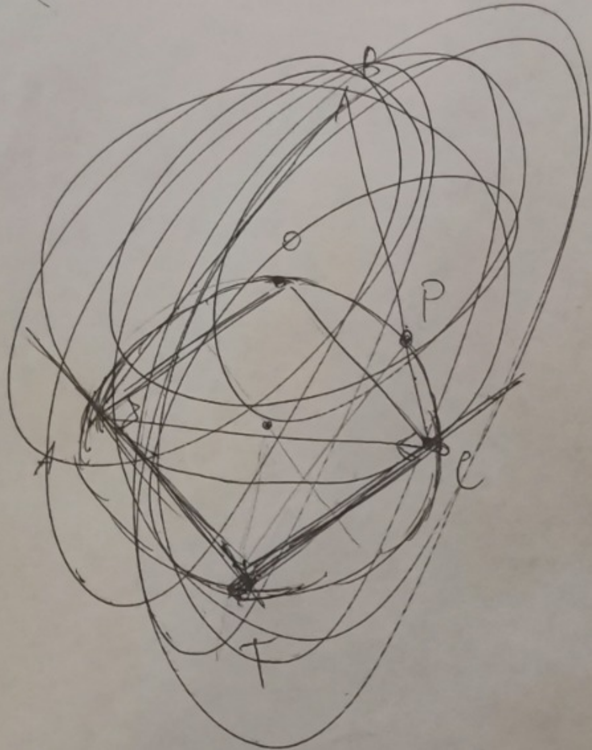


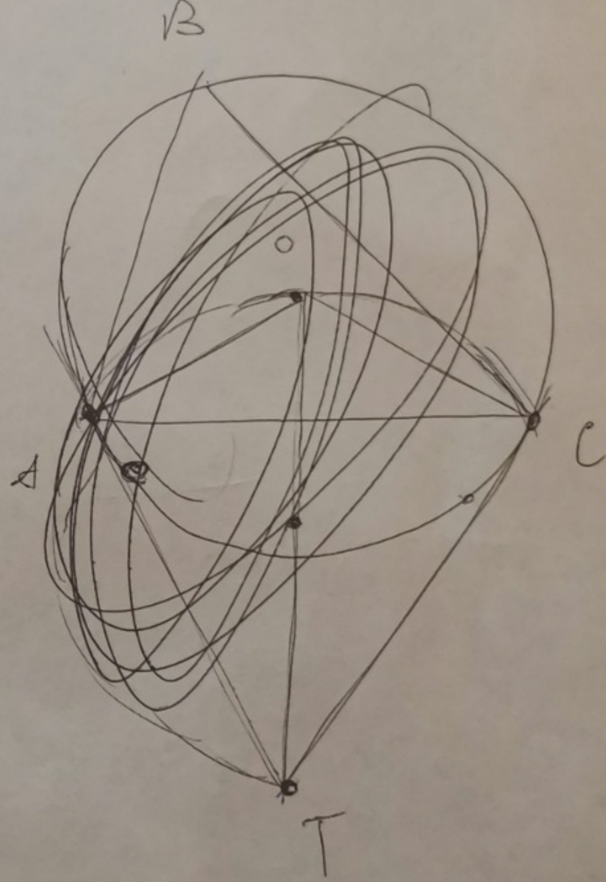
$S_{\triangle APC} = 10$; $S_{\triangle CPK} = 8$; $S_{\triangle AKP} = 2$

$S_{\triangle ABC}$

$\frac{CK}{KA} = \frac{8}{2} = 4$

$AH = HC = 5$





Чистовик 3

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_4 4 = 1$

т.е. $x=6$ подходит. $\in$ ОДЗ

2 $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$

продолжение 5

$2x-8=\sqrt{5x-26}$

$4x^2-32x+64=5x-26$

$4x^2-37x+90=0$ $D<0$ Ш

~~$x=\frac{37\pm\sqrt{37^2-90\cdot16}}{8}$~~

3 $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$

$(x-4)^2=5x-26$

~~$x^2-8x+16=5x-26$~~

~~$x^2-13x+40=0$~~

~~$x=\frac{13\pm\sqrt{169-160}}{2}$~~

~~$x=\frac{13\pm3}{2}$~~ ~~$x\neq8$, $x\neq5$~~

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=7 \end{array}\right.$

$x=7:\ \log_{\sqrt{14-8}}3 = \log_{\sqrt6}3 \neq 1$
$\neq 2$

Ш

Ответ: 6