Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104964**

ID профиля: **321294**

Вариант 20

2

Чистовик

Чистовик

№1

$$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d) \cdot 5$$

$a_6 = a_1 + 5d$
$a_8 = a_1 + 7d$
$a_9 = a_1 + 8d$
$a_{11} = a_1 + 10d$

т.к. прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$a_6 \cdot a_{11} > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$(a_8 - 2d)(a_9 + 2d) > S + 15$
$a_8 \cdot a_9 - 2d a_9 + 2d \cdot a_8 - 4d^2 > S + 15$
$a_8 \cdot a_9 + 2d(a_8 - a_9) - 4d^2 > S + 15$
$a_8 \cdot a_9 + 2d(-d) - 4d^2 > S + 15$
$a_8 \cdot a_9 - 6d^2 - 4d^2 > S + 15$
$a_8 \cdot a_9 > 10d^2 + S + 15$

$$10d^2 + S + 15 < a_8 a_9 < S + 39$$

$$\begin{cases} a_8 a_9 > 10d^2 + 5a_1 + 10d + 15 & \star \\ a_8 a_9 < 5a_1 + 10d + 39 & \triangle \end{cases}$$

$\star$ $(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) > 10d^2 + 5a_1 + 10d + 15$
$a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 > 10d^2 + 5a_1 + 10d + 15$
$a_1^2 + a_1(15d - 5) + 46d^2 - 10d - 15 > 0$
$D = 25(3d-1)^2 - 4 \cdot (46d^2 - 10d - 15) =$
$= 25(9d^2 - 6d + 1) - 184d^2 + 40d + 60 =$
$= 225d^2 - 150d + 25 - 184d^2 + 40d + 60 =$
$= 41d^2 - 110d + 85$
$$a_1 = \frac{-5(3d-1) \pm \sqrt{41d^2 - 110d + 85}}{2}$$

$\triangle$ $(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39$
$a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$
$a_1^2 + a_1(15d - 5) + 56d^2 - 10d - 39 < 0$
$D = 25(3d-1)^2 - 4(56d^2 - 10d - 39) =$
$= 225d^2 - 150d + 25 - 224d^2 + 40d + 156 =$
$= d^2 - 110d + 181$
$$a_1 = \frac{-5(3d-1) \pm \sqrt{d^2 - 110d + 181}}{2}$$

если a_1 существ. $\Rightarrow a_1 \in \left(\frac{-5(3d-1) - \sqrt{d^2 - 110d + 181}}{2}; \frac{-5(3d-1) - \sqrt{41d^2 - 110d + 85}}{2}\right) \cup$
$\cup \left(\frac{-5(3d-1) + \sqrt{41d^2 - 110d + 85}}{2}; \frac{-5(3d-1) + \sqrt{d^2 - 110d + 181}}{2}\right)$ ①

№1 Чистовик

$$\frac{-5(3d-1)+\sqrt{41d^2-110d+85}}{2} < \frac{-5(3d-1)+\sqrt{d^2-110d+181}}{2}$$

$$\sqrt{41d^2-110d+85} < \sqrt{d^2-110d+181}$$

$$\begin{cases} 41d^2-110d+85 < d^2-110d+181 \\ 41d^2-110d+85 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40d^2 < 96 \\ 41d^2-110d+85 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2 < 2{,}4 \\ 41d^2-110d+85 \geq 0 \; * \end{cases}$$

$* \; D = 12100 - 4 \cdot 41 \cdot 85 < 0$

$\rightarrow (d-\sqrt{2{,}4})(d+\sqrt{2{,}4}) < 0$

$d \in (-\sqrt{2{,}4}; \sqrt{2{,}4})$ т.к. $d \in \mathbb{Z}$ $d > 0$

$\Rightarrow d = 1$

Расм. часть решений a_1

$$a_1 \in \left(\frac{-5(3-1)+\sqrt{41-110+85}}{2}; \frac{-5(3-1)+\sqrt{1-110+181}}{2} \right)$$

$$a_1 \in \left(\frac{-10+4}{2}; \frac{-10+\sqrt{72}}{2} \right); \; a_1 \in (-3; -5+\sqrt{18})$$

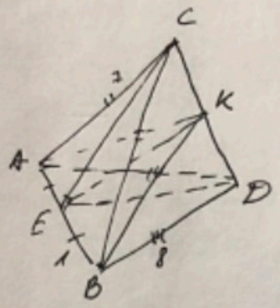
т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ $\quad a_1 = -2; -1;$

Аналогично

Ответ: $a_1 = -2; -1$.

[redacted] №2

Чистовик



Т.к. $\triangle CAB$ и ADB р/бедр. $CE \perp AB$ и $DE \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow (CED) \perp AB \Rightarrow AB \perp CD$

Т.к. $CD \parallel$ оси, то $AB \parallel$ плоскости основания цилиндра

$KE = 1$

$DE = \sqrt{DB^2 - BE^2} = \sqrt{63}$

$CE = \sqrt{CA^2 - AE^2} = \sqrt{48}$

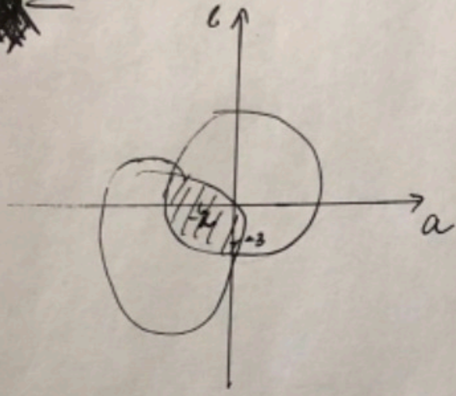
$CK = \sqrt{CE^2 - EK^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

$KD = \sqrt{DE^2 - EK^2} = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$

$CD = CK + KD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$ Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$

Чистовик

№3



Расм. $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+b^2+6b \le 0 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$$

M - множество окружностей с центрами в точках этого множества и $R=\sqrt{13}$

$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$

Черновик

$\frac{24}{36}$ $\frac{40}{10}$

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \\ a_{11} = a_1 + 10d \\ a_8 = a_1 + 7d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{cases}$$

$56 \times 4 = 224$ $39 \times 4 = 156$ $25 \times 9 = 225$ $25 \times 9 = 225$ $25 \times 4 = 1230$ $25 \times 6 = 150$ $156 + 25 = 181$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 + 15$

$a_1^2 + 5a_1d + 10da_1 + 50d^2 > (a_1 + 2d) \cdot 5 + 15$

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$106 \times 106 = 636$ 106 11236 $19 \times 19 = 171$ 19 361 $181 \times 4 = 724$ $12100 - 724 = 11376$

$(a_1^2 + 7d)(a_1 + 8d) < 5 + 39$

$(a_1^2 + 15a_1d + 56d^2) < (a_1 + 2d) \cdot 5 + 39$

$104 \times 104 = 416$ 104 10816

$(a_1^2 + 15a_1d + 56d^2) < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + a_1(15d - 5) + 56d^2 - 10d - 39 < 0$

$a_1 = \frac{-15d - 5 \pm \sqrt{d^2 + 190d + 181}}{2}$

$D = 25(3d - 1)^2 - 4(56d^2 - 10d - 39) =$

$= 25(9d^2 - 6d + 1) - 224d^2 + 40d + 156 = d^2 + 190d + 181$

$17 + 20 = 340$ $22 \times 22 = 44$ 44

$D = ~~36100 - 4 \cdot 181~~ \ 12100 - 4 \cdot 181 =$

$484 - 340 = 144$ $110 : 5 = 22$ $85 : 5 = 17$

$a_1^2 + a_1(15d - 5) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

$D = 25(3d - 1)^2 - 4(50d^2 - 10d - 15) = 25d^2 - 110d + 85 = 5(5d^2 - 22d + 17)$

$25(9d^2 - 6d + 1)$ $+60$

$a_1 = \frac{-15d + 5 \pm \sqrt{5(5d^2 - 22d + 17)}}{2}$

$D = 484 - 4 \cdot 5 \cdot 17 = 144$

$d = \frac{22 \pm 12}{10} = \left[\begin{matrix} 1 \\ 3,4 \end{matrix} \right.$

$a_1 \in \left(\frac{-15d - 5 - \sqrt{d^2 + 190d + 181}}{2} ; \frac{-15d + 5 - \sqrt{5(5d^2 - 22d + 17)}}{2} \right) \cup$

$\cup \left(\frac{-15d + 5 + \sqrt{}}{2} ; \frac{-15d - 5 + \sqrt{}}{2} \right)$

~~Церковны~~

$$a_1 = \frac{-15d+5 \pm \sqrt{25(d-1)(d-3,4)}}{2} = \frac{5(-3d+1 \pm \sqrt{(d-1)(d-3,4)})}{2}$$

$$10d^2+5+15 < a_1^2+15a_1d$$

$$(a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2+7ad+8ad+56d^2$$

$$10d^2+5+15 < a_1^2+15ad+56d^2$$

$$10d^2+5a_1+10d+15 < a_1^2+15a_1d+56d^2$$

$$a_1^2+a_1(15d-5)+46d^2-10d-15 > 0$$

$$D = 25(3d-1)^2-4\cdot(46d^2-10d-15) =$$

$$= 225d^2-150d+25-184d^2+40d+60 = 41d^2-110d+85$$

340
×41
340
1360
13940

39
×4
156

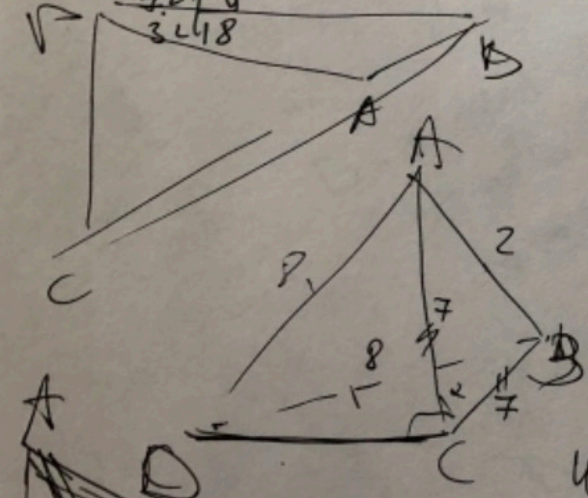
46
×4
184

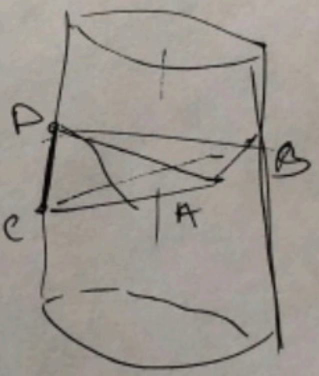
56
×4
224

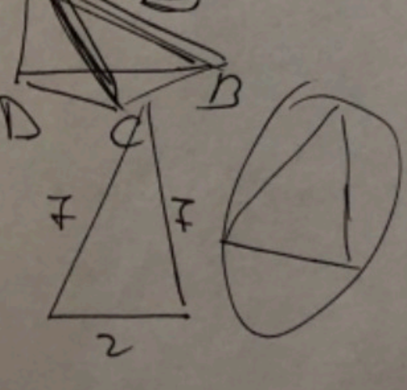
225
−184
41

85
+41
126

182
−110
72
4
3248







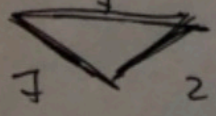
49
+47
96
×2
192

$$4 = 49+49-2\cdot 49\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 49-4}{2\cdot 49} = 1-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot 49} = \frac{49-2}{49} = \frac{47}{49}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{47}{49}\right)^2} = \sqrt{\frac{49^2-47^2}{49^2}} =$$

$$= \frac{1}{49}\sqrt{(49-47)(49+47)} = \frac{1}{49}\sqrt{2(96)} = \frac{\sqrt{192}}{48}$$



$$\frac{A}{\sin a} = 2R \qquad R = \frac{A}{2\sin\alpha}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104964**

ID профиля: **321294**

Вариант 20

№4 Чистовик

№4 Чистовик

Тк НОК в каноническом виде содержит только множители 2 и 5 в разных степенях ⇒ a, b и c являются произведением только 2 и 5 в различных степенях.

Тогда $a = 2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ $b = 2^{k}\cdot 5^{m}$ $c = 2^{t}\cdot 5^{p}$

Тк НОД $= 10 \Rightarrow 10 = 2^{1}\cdot 5^{1}$

либо α, либо k, либо t равно 1

либо β, либо m, либо p равно 1

Тк. НОК $= 2^{17}\cdot 5^{16} \Rightarrow$

либо α, либо k, либо t равно 17

либо β, либо m, либо p равно 16

Тогда можно составить таблицу случаев: если $\alpha = 1$, $k = 17 \Rightarrow t$ может принимать любое целое значение от 2 до 16 включительно (обозначим 2–16)

1)

α	k	t
1	17	2–16
17	1	2–16
17	2–16	1
1	2–16	17
2–16	1	17
2–16	17	1

Аналогично для $\alpha = 17$, $k = 1 \Rightarrow t \in [2;16]$, $t \in \mathbb{Z}$ и т.д ⇒ 15 вариантов t в первой строчке 15 вар. во второй, 15 вар k в третей и т.д

Аналогичную таблицу можно записать для β, m, p: если $\beta = 1$, $m = 16 \Rightarrow t \in [2;15]$, $t \in \mathbb{Z}$ и т. д

2)

β	m	p
1	16	2–15
16	1	2–15
16	2–15	1
1	2–15	16
2–15	1	16
2–15	16	1

Аналогично в первой строчке есть 14 вар. для p, 14 вар во второй p, 14 вар для m в 3ей и т.д.

Итого: в первой табл. $6\cdot 15$ разл. вариантов во второй – $6\cdot 14$ разл. вариантов.

№ 4 Чистовик

Продолжение

Но возможны варианты $\alpha=k=1$ и $t=17$ и т.д. составим таблицу. Всего их 6.

α	k	t
1	1	17
1	17	1
17	1	1
17	17	1
17	1	17
1	17	17

Аналогично для β, m, p

β	m	p
1	1	16
1	16	1
16	1	1
16	16	1
16	1	16
1	16	16

возможен вариант $\beta=1$, $m=1$, $p=16$ и т.д. Всего 6 вар.

Всего вариантов троек: ~~[illegible]~~)

$(6\cdot 15+6)(6\cdot 14+6) = 6\cdot 16\cdot 6\cdot 15 = 8840$

Ответ: 8840

№5 **Чистовик**

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=A$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=B$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=C$

ОДЗ: $\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4\neq \pm 1 \\ 5x-26\neq \pm 1 \\ 2x-8>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x\neq 4{,}5 \\ x\neq 5 \\ x\neq 5{,}4 \end{cases}$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2\frac{\log_{(x-4)}(x-4)}{\log_{(x-4)}2(x-4)}=\frac{2}{\log_{(x-4)}(2x-8)}$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$$

$$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2\frac{\log_{(x-4)}(2x-8)}{\log_{(x-4)}(5x-26)}$$

$$A\cdot B\cdot C=\frac{\cancel{2}}{\cancel{\log_{(x-4)}(2x-8)}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\log_{(x-4)}(5x-26)}\cdot\frac{2\,\cancel{\log_{(x-4)}(2x-8)}}{\cancel{\log_{(x-4)}(5x-26)}}=2$$

1) $\begin{cases} A\cdot B\cdot C=2 \\ A=B \\ C=A+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} A\cdot B\cdot C=2 \\ A=C \\ B=A+1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} A\cdot B\cdot C=2 \\ B=C \\ A=B+1 \end{cases}$

1) $A^2(A+1)=2$

$A^3+A^2-2=0$

$(A-1)(A^2+2A+2)=0$

$D<0$

$A=1$

$A=1\ \ B=1\ \ C=2.$

2) $A=C=1$

$B=2.$

3) $B=C=1$

$A=2$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x-4=\sqrt{2x-8} \\ 5x-26=(x-4)^2 \\ 5x-26=2x-8 \end{cases}$

$x=6$ подх по ОДЗ

Ответ: $x=6$.

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=2 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \end{cases}$

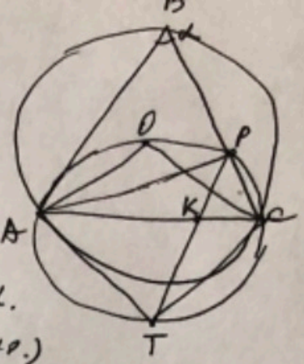
$\begin{cases} x-4=\sqrt{2x-8} \\ (x-4)^4=5x-26 \Rightarrow \varnothing \\ \sqrt{5x-26}=2x-8 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-8=x-4 \\ (x-4)^2=5x-26 \Rightarrow \varnothing \\ \sqrt{5x-26}=2x-8 \end{cases}$

Чистовик

[redacted]



1. AOCT – вписанный (т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 180°$)

2] $\underset{\text{впис}}{\angle ABC} = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (центральный)

3 $\triangle AOC$ – р/бедр ($AO = OC = R$) $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = 90° - \alpha$.
по св-ву р/б. треуг. и теор о сумме углов треуг.)

4. $AT = TC$ (как отрезки касательных, провед. из т. T) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle TAC = \angle TCA$.

5. $\angle TAC = OAT - \angle CAO = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.
$\angle OAT = 90°$ по св-ву касательной)
$\angle ACT = \alpha$ – аналогично

6 $\angle APT = \angle ACT = \alpha$ (вписанный, опир. на дугу AT)
$\angle TPC = \angle TAC = \alpha$ (аналогично)
$\angle APK = \angle CPK \Rightarrow PK$ – бисс-са

7. $\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} - \frac{5}{4}$

$AP = 5y \quad PC = 4y$

8 $\angle BPA = 180° - \angle APC = 180° - 2\alpha$ (св-во смежных углов)
$\triangle ABP$: $\angle BAP = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha) = \alpha$
$\Rightarrow \triangle ABP$ р/бед. по признаку $\Rightarrow AP = 5y = BP$ (по опр)

9. $\frac{S_{BPA}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC}$ (общ ст. AP) $= \frac{5y}{4y} = \frac{5}{4} \Rightarrow S_{BPA} = 18 \cdot \frac{5}{4} = 22{,}5$

10. $S_{\triangle ABC} = 22{,}5 + 18 = 40{,}5$

~~№~~6 Продолжение **чистовик**

11. а) $\angle ABC = arctg\frac{1}{2} \Rightarrow tg\angle ABC = \frac{1}{2}$

$tg\alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha < 90°$

б) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$ $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos^2 = \frac{4}{5}$ $\alpha < 90°$

в) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 2\cdot\frac{4}{5} - 1 = 3/5$

г) $\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha.$

$\sin^2 2\alpha = 1 - 9/25 = \frac{16}{25}$ $\sin 2\alpha = 4/5$

$2\alpha < 180° \Rightarrow \sin 2\alpha > 0$

12. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 5y \cdot 4y \cdot \sin 2\alpha$

$18 = 10y^2 \cdot \frac{4}{5}$

$9 = 10y^2 \cdot \frac{2}{5}$ $y = 3/2.$

13. $\triangle ABC: AC^2 = (5y)^2 + (4y)^2 - 2\cdot 5y \cdot 4y \cdot \cos 2\alpha$ (теор cos)

$AC^2 = 25y^2 + 16y^2 - 40y^2 \cdot 3/5$

$AC^2 = 17y^2$ $AC = y\sqrt{17} = 3/2\sqrt{17}$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 40,5$, $AC = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$

Черновик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ | $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ | $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$$\frac{\log_2(x-4)}{\log_2(2x-8)}=\frac{\log_2(2x-8)}{\log_2(5x-26)}$$

$2\log_{(2x-8)}(x-4)$ | $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$ | $2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\log_{(2x-8)}(x-4)=\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$2\log_{(2(x-4))}(x-4)$ | $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5b-26)$ | $2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$2\log_{2t}t$ $\frac{1}{2}\log$

~~$x^2-8x+16=5$~~

$x-4=\sqrt{2x-8}$ g^2

$\begin{cases}(x-4)^2=2x-8\\ x\neq4\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-8x+16=2x-8\\ x\neq4\end{cases}$

$x-4=-1$

$x\neq3$

$x-4=1$

$x=5$

$5x-26=1$

$5x=27$

$x\neq\frac{26}{5}$

$4x^2-32x+64=5x-26$

$4x^2-37x+90=0$ $D=37^2-4\cdot4\cdot90$

$\begin{cases}x^2-10x+24=0\\ x\neq4\end{cases}$

$D=100-4\cdot\ =4$

$x=\frac{10\pm2}{2}=5\pm1$

$\boxed{x=6}$

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$2x-8=x-4$ $D=169-4\cdot42=1$

$x=4$ $x=\frac{13\pm1}{2}=$ 6, 7

$a \vdots 10$ $b \vdots 10$ $c \vdots 10$ Черновик

$a = a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \cdot a_3^{\gamma}$ $b = b_1^{k} b_2^{l} \cdot b_3^{m}$ $c =$

$a = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ $b = 2^{k} \cdot 5^{m}$ $c = 2^{t} \cdot 5^{p}$

либо α, либо k, либо t $= 1$

либо β, либо m, либо p $= 1$

либо α, либо k, либо $t = 17$

либо β, либо m, либо p $= 16$

$\alpha = 1$ $k = 17$ $t \in [1; 17]$

α	k	t
1	17	2–16
17	1	2–16
2–16	17	1
2–16	1	17
1	2–16	17
17	2–16	1

β	m	p
1	16	2–15
16	1	2–15
2–15	1	16
2–15	16	1
1	2–15	16
16	2–15	1

$$\begin{array}{r} 190 \\ \times 36 \\ \hline 1140 \\ 570 \\ \hline 6840 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times 15 \\ \hline 50 \\ 14 \\ \hline 190 \end{array}$$

$$36 \cdot \begin{array}{r} 16 \\ \times 15 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 240 \\ \times 36 \\ \hline 1440 \\ 720 \\ \hline 8840 \end{array}$$

$a = 2 \cdot 5^{16}$ $b = 2^{2} \cdot 5^{1\text{[illegible]}}$ $c = 2^{17} \cdot 5^{3}$