Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104939**

ID профиля: **141148**

Вариант 20

Чистовик Вариант 20 часть 1.

№1. Т.к. последовательность из целых чисел, шаг – k, тоже целый. Обозначим также a_1 за a. Тогда $S = 5a + 10k$, а условия можно записать так:

$$\begin{cases}(a+5k)(a+10k) > 5a+10k+15\\(a+7k)(a+8k) < 5a+10k+39\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+15ka+50k^2-5a-10k-15>0\\a^2+15ka+56k^2-5a-10k-39<0\end{cases}$$

Умножим второе неравенство на -1 и сложим

$-6k^2+24>0$

$24>6k^2$

$k^2<4$. Так как k – натуральное (прогрессия возрастает), $k=1$.

Тогда:

$$\begin{cases}a^2+15a+50-5a-10-15>0\\a^2+15a+56-5a-10-39<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+10a+25>0\\a^2+10a+7<0\end{cases}$$

Или же $a^2+10a \in (-25;-7)$.

a^2+10a – парабола с ветвями вверх и $x_0=-5$.

Проверим значения от -5 до -1 (при $a \geq 0$, $a^2+10a+7 \geq 0$)

$a=-5$ $\quad 0>0$, $-18<0$ $\quad$ (–)

$a=-4$ $\quad 1>0$, $-17<0$ $\quad$ (+)

$a=-3$ $\quad 4>0$, $-14<0$ $\quad$ (+)

$a=-2$ $\quad 9>0$, $-9<0$ $\quad$ (+)

$a=-1$ $\quad 14>0$, $-2<0$ $\quad$ (+)

Т.к. a^2+10a – парабола, значения $a=-6;-7;-8;-9$, тоже подойдут.

Ответ: $-1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9$.

1

Чистовик Вариант 20 часть 1

№3 Запишем условие в таком виде:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq -4a-6b \end{cases}$$

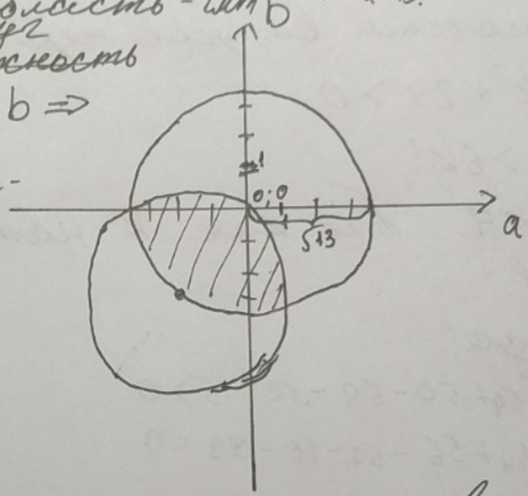
Рассмотрим 2 последних ур-ия и построим гмт a и b:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13 \end{cases}$$

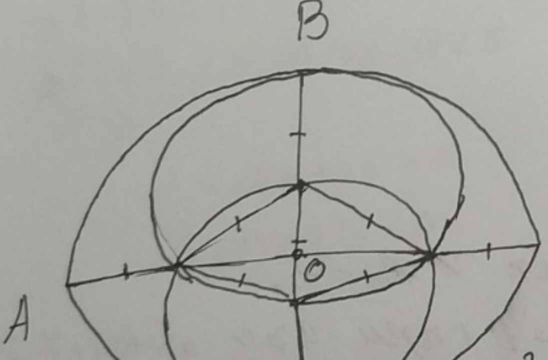
- ~~окружности~~ круги с радиусом $\sqrt{13}$, центр второй ~~окружности~~ круга лежит в точке $(-2;-3) \in$ первой ~~окружности~~ круга (расстояние до точки $(0;0) = \sqrt{13}$)

заштрихованная область - гмт a и b.

Уравнение с x и y - ~~окружность~~ круг с вершинами в точках a, b $\Rightarrow$



M - фигура полученная построением кругов радиуса $\sqrt{13}$ на всех точках заштрихованной области:



Найдём площадь верхней половины: это часть ~~ок~~ круга отсеченного хордой длиной $2\sqrt{13}$ + основание Δ ~~со ст~~ с углами $30°, 30°, 120°$ и боковыми сторонами = ~~120~~ $\sqrt{13}$ $| = 39$. R этой окружности найдём из ΔABC. ~~$2R = \frac{39}{\sin 120} = 2R$~~

21104939 (U141148 M1296897)

Черновик

$k = 2$

$\cancel{a^2 + 30a + 100 - 15 - 59 -}$

$a^2 - 5a + 15ak + 40k - 15 > 0$

$a^2 - 5a + 15ak + 46k - 39 < 0$

$a^2 - 5a + 30a + 80 - 15 > 0$

$a^2 - 5a + 30a + 92 - 39 < 0$

$a^2 + 25a + 65 > 0$

$a^2 + 25a + 53 < 0$

$a^2 + 25a \in [-54; -64]$

$a = -3$

$-75 + 9 = -66$

$k = 1$

$a^2 - 5a + 15a + 40 - 15 > 0$

$a^2 - 5a + 15a + 46 - 39 < 0$

$a^2 + 10a + 25 > 0$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

$a = -1$ $\quad a = -3$

$a = -2$ $\quad a = -4$

$-9 + 25 > 0$

$-9 + 7 < 0$

$-16 + 25 > 0$

$-16 + 7 < 0$

-21

21104939 (U141148 M1296897)

Черновик

$a_6 a_{11} > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$a_1 = -1$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	S=
-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5
~~0~~ -2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	-5
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	-10
-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	

$4 \cdot 9 > 5 + 15$ $\qquad 18 > 15$

$6 \cdot 7 < 5 + 39$ $\qquad 30 < 39$

21104939 (U141148 M1296897)

Черновик

$$\begin{cases} a^2+15ak+50k-15>5a+10k \\ a^2+15ak+56k-39<5a+10k \end{cases} \Big| -1$$

$-6k^2+24>0$

$k>4$

$k^2<4$

$k=3$ $k=2$ $k=1$

$a^2+45a+150-15>5a+30$

$a^2+40a+105>0$

$a^2+40a \in (-105;-99)$

$a^2+45a+168-39 < 5a+30$

$a^2+40a+100=0$

$a^2+40a+99<0$

$(a+35)(a+5)$

$k=5$

$a^2+75a+250-15>5a+\cancel{10k}\,50$

$a^2+75a+280-39<5a+50$

$a=-5$

$a^2+70a+185>0$

$a^2+70a+191<0$

$25-$

-20

$400-800+100=-300$

$a=-5$ · $425-200+100=-85$

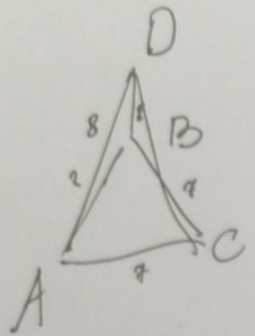
$a=\cancel{-8}$ $\cancel{36-240+}$

$a=0$

$a=-3$ $9-120a+100$

21104939 (U141148 M1296897)

Черновик



$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13\\ a^2+b^2\leq 6\end{cases}$$ min$(-4a-6b, 13)$

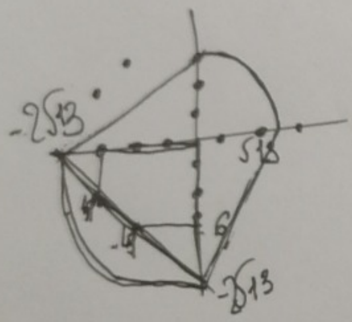
12 12

$a^2+b^2\leq 13$

$a=-3$

$b=-2$

0; 0.



-6 -6

$x=-k$ $y=0$ $b=0$

$a=-\sqrt{13}$

$a=-\sqrt{13}$

$\sqrt{13}<4$

$x<0$ $y>0$

$(-k+\sqrt{13})^2\leq 13$

$+4\sqrt{13}>13$

$|x|+|2y|=2\sqrt{13}$

$k=-2\sqrt{13}$

$a=\frac{x}{2}$

$x+y=-2\sqrt{13}$

$b=-\frac{y}{2}$

$a+b=-\sqrt{13}$

$x^2+y^2\leq 13$

$a=\frac{x}{2}$ $b=\frac{y}{2}$

$x^2+y^2=13$

$a+b=-\sqrt{13}$

$\underbrace{a^2+b^2}_{<13}=13-2ab$

21104939 (U141148 M1296897)

Черновик

$S = a_1 + a_7 + a_3 + a_4 + a_5$ $\quad$ $a_6 a_{11} > S + 15$

1 2 3 4

$a_8 a_9 < S + 39$

$a_1 = a$ $\quad k$

$(a+5k)(a+10k) > 5a + 10k + 15$

$(a+7k)(a+8k) < 5a + 10k + 39$

$a^2 + 15ak + 50k > 5a + 10k + 15$

$a^2 + \overset{15}{\cancel{56}}ak + 56k < 5a + 10k + 39$

$a^2 + 15ak + 50k - 15 > 5a + 10k > a^2 + 15ak + 56k - 39$

$6k > 24$ $\quad$ $k = 4 + c$

$k > 4$

$-15 > 6k - 39$

$a^2 + 15a(4+c) + 50(4+c) - 15 > 5a + 40 + 10c$

$a^2 + 60a + 15ac + 200 + 50c - 15 > 5a + 40 + 10c$

$5a + 40 + 10c > a^2 + 60a + 15ac + 56c + 224 - 39$

$a^2 + 55a + 15ac + 160 + 40c - 55 > 0$

$1 + 55 + 5c + 160 + 40c - 55 > 0$

$45c$

21104939 (U141148 M1296897)

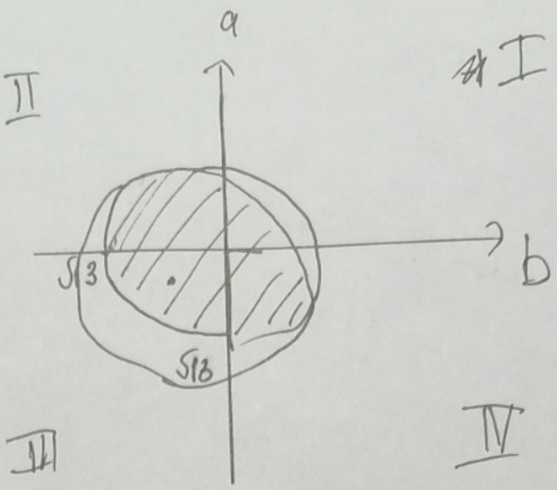
Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)$

$-4a-6b < 13$

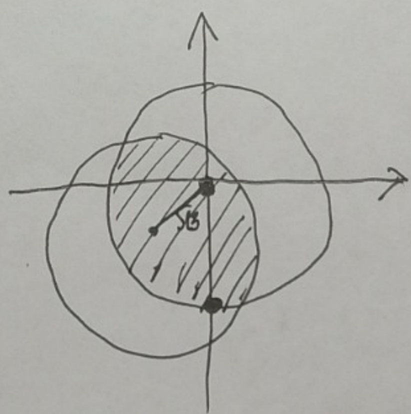
$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$



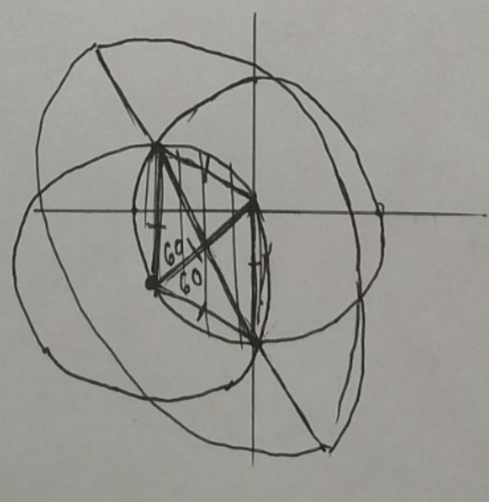
$a^2+4a+b^2+6b \le 0$

$\cancel{(a+4)a+}$

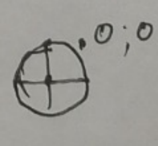
$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \end{cases}$



$a+1 \quad b+1$

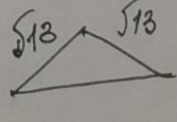


-1



$\sqrt{13}$

$26+$



21104939 (U141148 M1296897)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104939**

ID профиля: **141148**

Вариант 20

Чистовик вариант 20 2 часть

№4 a, b, c - числа вида $2^n \cdot 5^k$, $n, k \in \mathbb{N}$ причём у какого-то из чисел 2 в первой степени (иначе НОД ≠ 10), у какого-то 2 в 17 степени (иначе НОК ≠ $2^{17} \cdot 5^{16}$); аналогично есть 5 в 1 и 5 в 16. Число с неизвестной степенью 2 может иметь 17 разных значений двойки, а такое-же число с 5 - 16 значений. Тогда всего комбинаций степеней - 16 · 17. Для каждой комбинации есть 6 · 6 перестановок под числа a, b, c; однако есть некоторое число повторов если ~~одно~~ одно из чисел представлено в 1 или максимальной степени дважды. (например 2^1, 2^1, 2^{17}; 5^{16}, 5^{16}, 5^1) Посчитаем кол-во таких случаев: ~~для каждого вар~~ каждое число лишь с одним повтором мы посчитали дважды, с двумя сразу - четырежды. Чисел посчитанных четырежды $2 \cdot 2$ (максимальная или минимальная степень повторилась) $\cdot 3 \cdot 3$ (перестановки) $= 36$. Оставшихся повторов $2 \cdot 14$ (степени 5 без уже учтанных) $\cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 6$. Итого получаем число равное:

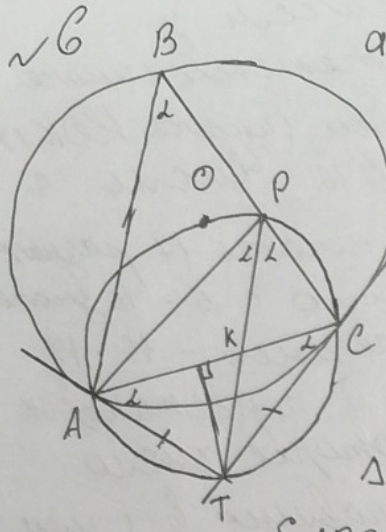
$16 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 6 - 3 \cdot 36 - 2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 6 - 2 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 6$

Ответ: $16 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 6 - 3 \cdot 36 - 2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 6 - 2 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 6$.

21104939 (U141148 M1296898)

Чистовик вариант 20 часть 2.

№6



а) Т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90$ (радиус к кас.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow OACT$ - вписанный.

Т.к. AT и TC - отрезки касательных $\Rightarrow AT = TC \Rightarrow \smile AT = \smile TC \Rightarrow \angle APT = \angle CPT =$ $= \angle CAT = \angle ACT = \alpha$. Т.к. TC - касательная $\smile AC$ (в ω) $= 2\alpha \Rightarrow \angle B = \alpha = \angle KPC$.

$S_{APK} = 10$, $S_{CPK} = 8 \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{CK}{CA} = \frac{4}{9}$. $\angle KPC = \angle ABC$, $\Rightarrow$ $\triangle CPK \sim \triangle CBA$ ($\angle C$ - общ;

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \frac{C\cancel{K}A^2}{CK^2} = \frac{81}{16} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{8}{16} \cdot 81 = \frac{81}{2} = 40{,}5.$$

б) В $\triangle ATC$ опустим высоту TH. $AT = TC = AH = HC =$ $= \frac{1}{2} AC = 9x$ (тогда $KC - 4x$, $AK - 5x$). $TH = \frac{1}{2} HC = \frac{9}{4}x$. Из теоремы

Т.к. ~~arctg~~ $\angle\alpha = \text{arctg}\,\frac{1}{2}$ $\quad S_{ATC} = \frac{81\sqrt{5}}{\cancel{8}\cancel{18}16}x^2$

Пифагора $TC = \frac{\sqrt{5}\cdot 9}{4}x \Rightarrow$

Т.к. $\angle APT = \angle B$, $\angle ATP = \angle ACB \Rightarrow \triangle APT \sim \triangle ABC$, причём

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APT}} = \frac{\cancel{40{,}5}}{\frac{\cancel{81}\sqrt{5}}{16}x^2} = \frac{AC}{AT} = \frac{\cancel{9x}}{\frac{\sqrt{5}\cdot\cancel{9}}{4}\cancel{x}}$$

$$\cancel{40{,}5}\ \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{16}x^2$$

$x^2 = 4$
$x = 2$ (x - положительное) $\Rightarrow AC = 18$

Ответ: 18

2

21104939 (U141148 M1296898)

Черновик

$НОД(a;b;c) = 10$

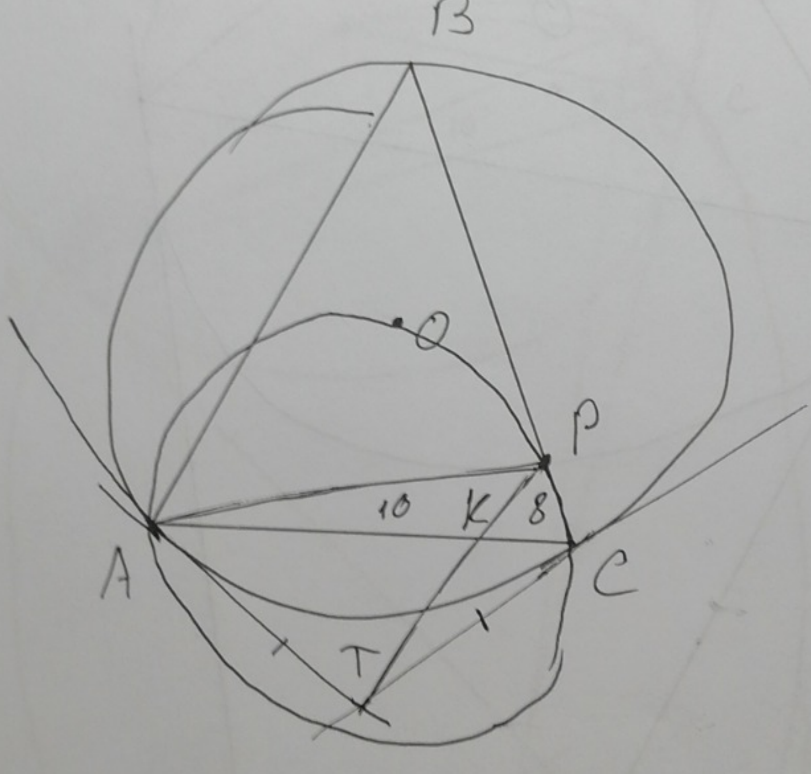
$НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$b = \cancel{5}\, 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

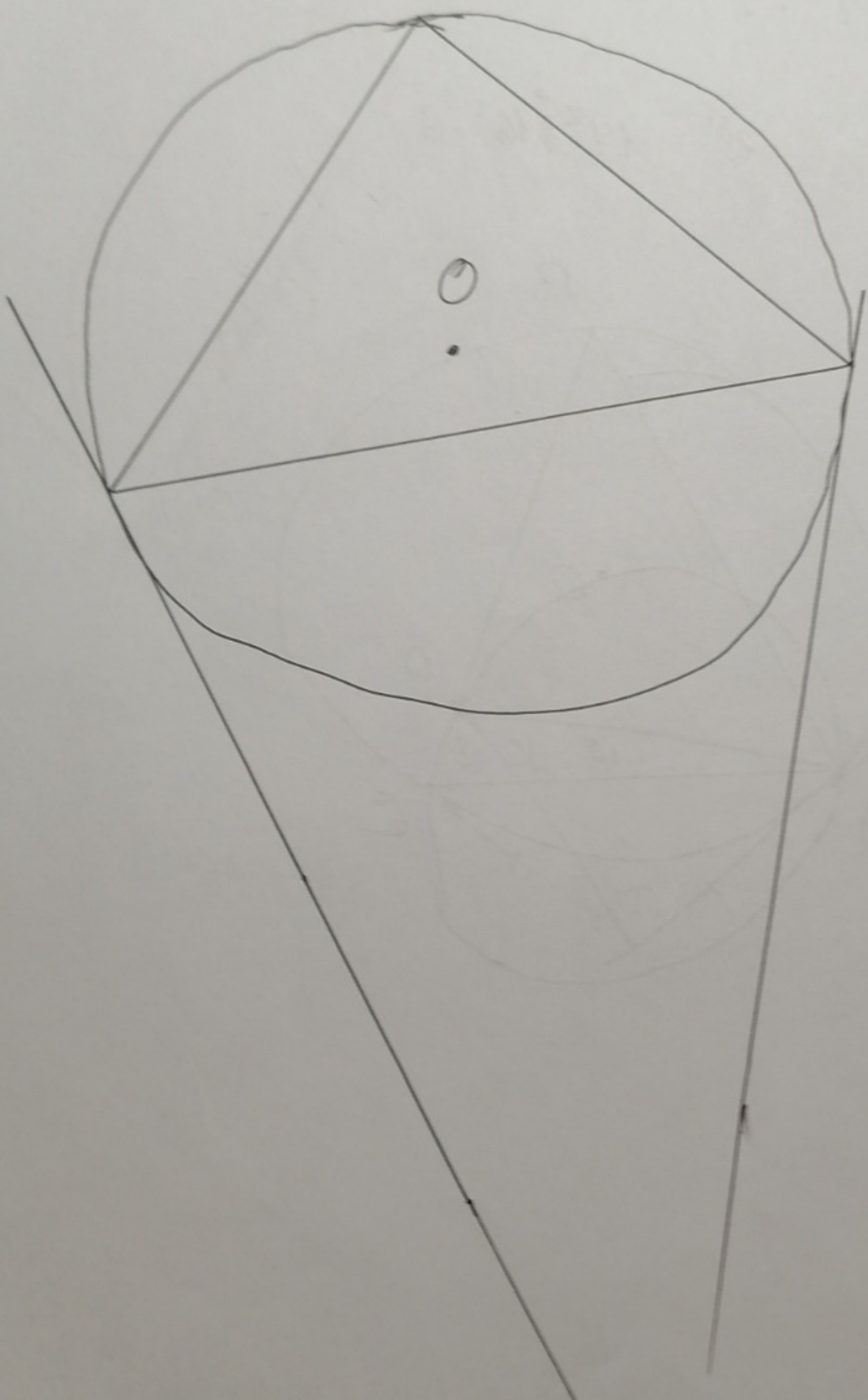
$c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

$\cancel{2^{18}} \cdot 17^2 \cdot 16^2 \cdot 6$



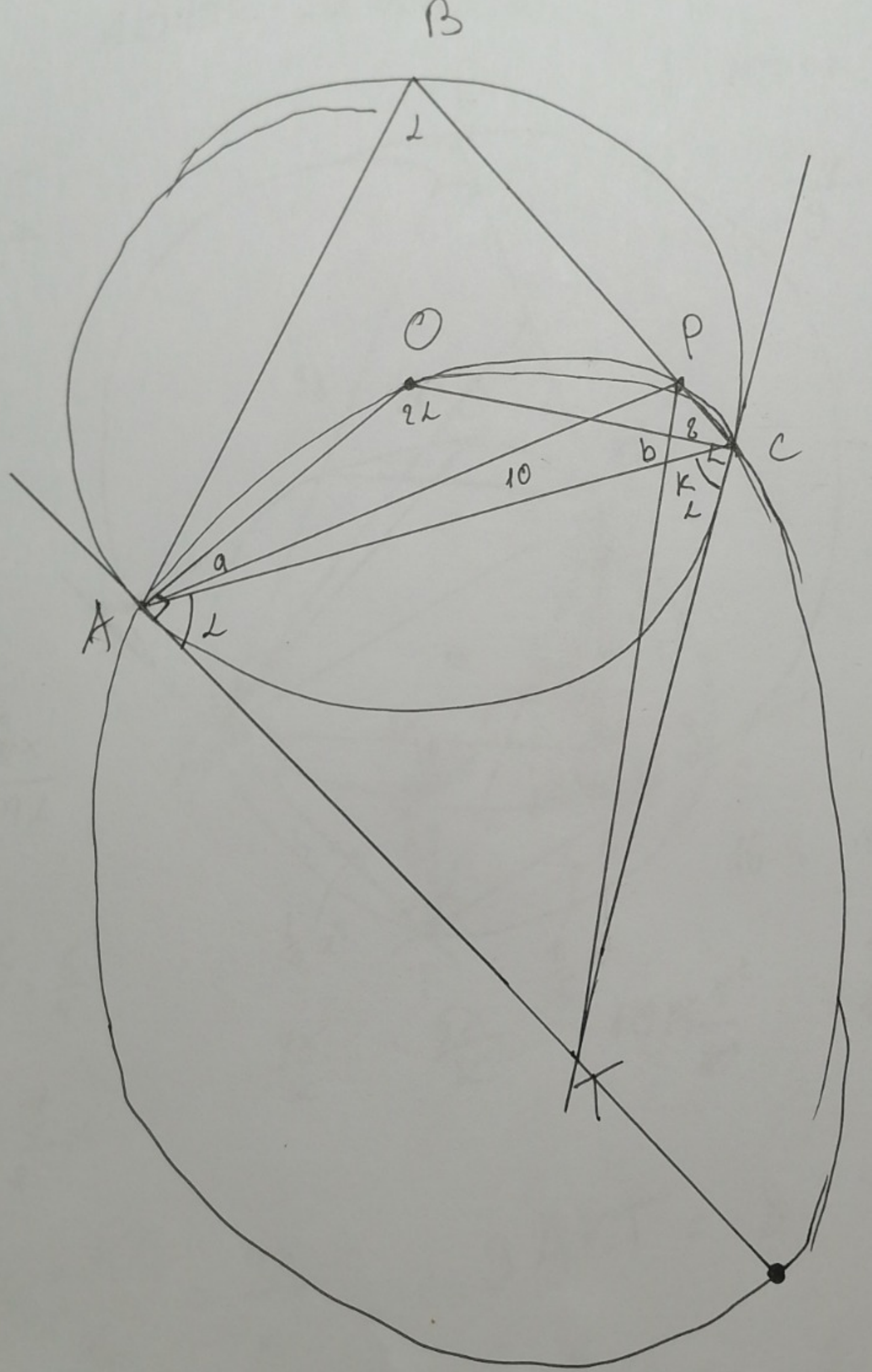
21104939 (U141148 M1296898)

Черновик



21104939 (U141148 M1296898)

Черновик



Черновик

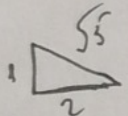
$$\frac{\sin)}{\sin))} = \frac{4}{5}$$

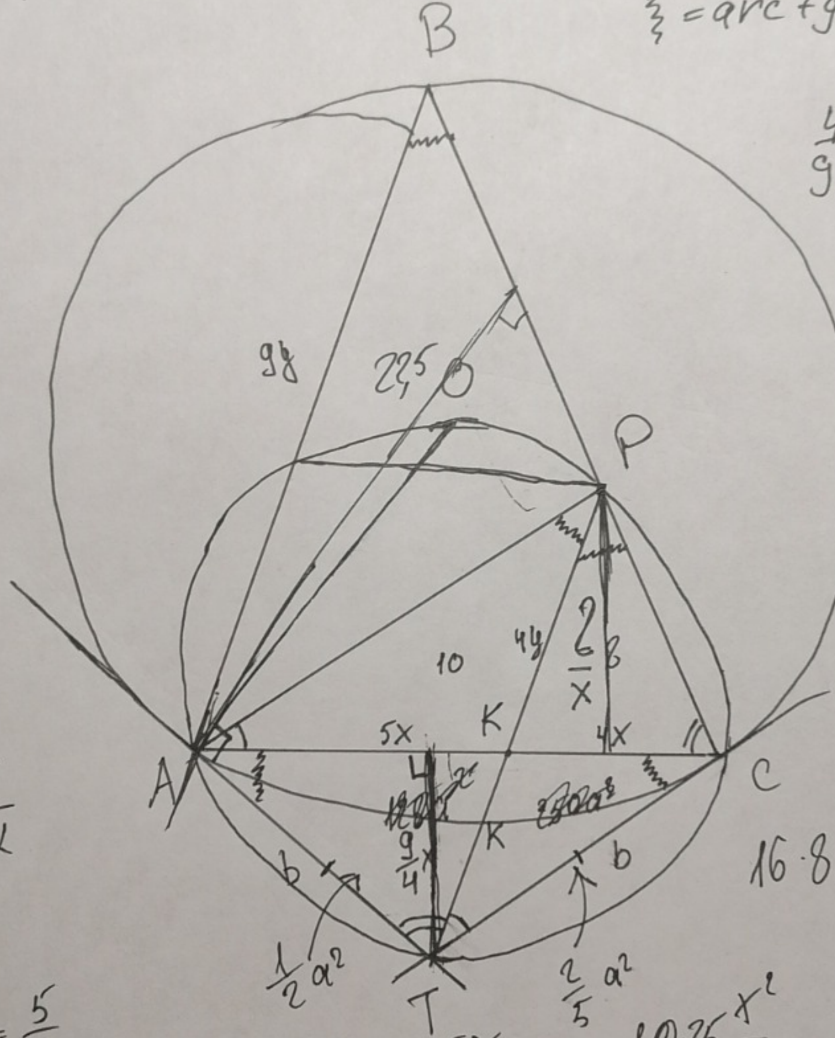
$$\frac{2}{5}a^2 = \frac{bk \sin)}{2}$$

$$\frac{1}{2}a^2 = \frac{bk \sin))}{2}$$

$$AB \cdot BC \cdot \sin \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 81$$

$$\xi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$





$$\frac{4}{9}$$

$$\frac{8 \cdot \cancel{18}}{16} \cdot 81 =$$

$$\frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{x}{k}$$

$$2R = \frac{\frac{9}{4}x}{\sin \angle}$$

$16 \cdot 8 \quad a^2$

1 1 17

1 7 17 1

$$\frac{AK}{CK} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4x}{k} \qquad \frac{5x}{k}$$

$$10 \cdot 25 \frac{x^2}{k^2}$$

$$\frac{\sqrt{5} \cdot 9}{4}x$$

$$S\,AKT = 8 \cdot 16\frac{x^2}{k^2}$$

$$\frac{R}{R} = \frac{9x}{\frac{\sqrt{5} \cdot 9}{4}x} = \frac{KC}{KT} = \frac{4x}{k}$$

$$8 \cdot \frac{k^2}{16x^2} \qquad \frac{1}{2}a^2$$

$$10 \cdot \frac{k^2}{25} \qquad \frac{2}{5}a^2$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

21104939 (U141148 M1296898)