Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104908**

ID профиля: **325588**

Вариант 20

Черновик (1)

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

№1. $\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases}$

$a_6 = a_1 + d \cdot 5$

$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$

$\begin{cases} a_6 a_{11} > \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 + 15 \\ a_8 a_9 < \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 + 39 \end{cases}$

$39 \cdot 2 = 78$

$56 \cdot 2 = 112$

$a_1^2 + 10a_1 d + 5a_1 d + 50d^2$

$2a_1 + 4d$

$a_1^2 + 8a_1 d + 7a_1 d + 56d^2$

$\begin{cases} 2(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > (a_1 + a_1 + 4d)5 + 30 \\ 2(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5(a_1 + a_1 + 4d) + 78 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a_1^2 + 30a_1 d + 100d^2 > 10a_1 + 20d + 30 \\ 2a_1^2 + 30a_1 d + 112d^2 < 10a_1 + 20d + 78 \end{cases}$

~~$4a_1 \ 10a_1 \ 20d$~~

$x = \frac{-10 \mp 6 \cdot 1{,}41}{2} = \frac{-18{,}46}{2}$; $\frac{2}{-1{,}54}$

$18{,}46 \,|\, 2$ — $9{,}23$

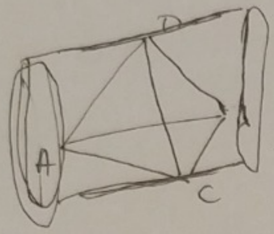
$10{,}00 - 8{,}46 = 1{,}54$

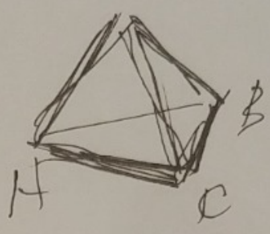
$1{,}54 + 8{,}46$

$9 \cdot 8{,}46$

$7 \cdot 1{,}41$

Черновик (2)





$DA = DB = 8$

$AC = CB = 7$

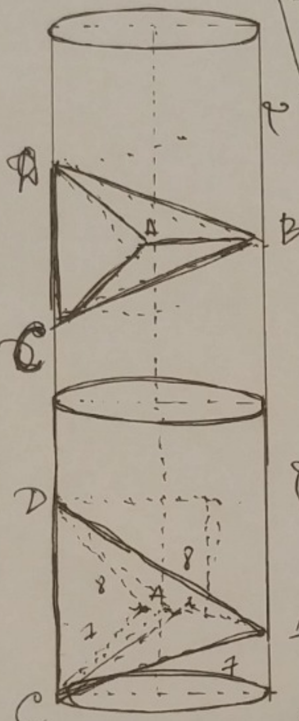
$AB = 2.$

$CD = ?$ $r = \min$

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h.$

$V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

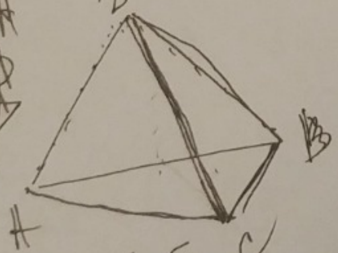


$t^2 + 11t \cdot (-2) + 30(-2)^2 < 5t + 39 - 120$

$t^2 - 27t + 81 < 0$

$D = 27^2 - 81 \cdot 4 = 729 -$

$x = 100 - 28 = 72 = 8 \cdot 9 = 4 \cdot 9 \cdot 2$

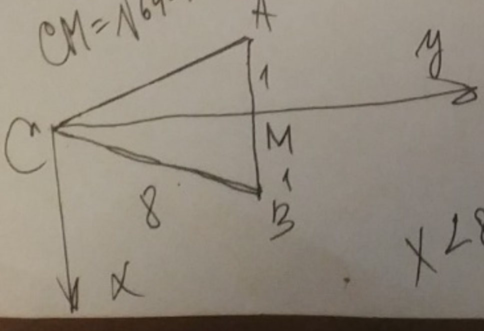


$C(0;0;0)$

$M(0; \sqrt{63}; 0)$

$D($

$CM = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$



Черновик (3)

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases}$$

1) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

2) $a_n = a_1 + d(n-1)$

$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5$

$S_5 = (a_1 + 2d) \cdot 5$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > (a_1 + 2d)5 + 15 \\ (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < (a_1 + 2d)5 + 39 \end{cases}$$

$a_1 + 2d = t$

$x_1 \cdot x_2 = c$

$x_1 + x_2 = -6$

$\cancel{t + 3d}$

$t^2 + 11td + 24d^2$

$$\begin{cases} (t + 3d)(t + 8d) > 5t + 15 \\ (t + 5d)(t + 6d) < 5t + 39 \end{cases}$$

$t^2 + 11td + 30d^2$

$39 - 24$

5

$39 - 15 = 24$

$\cancel{-5t - 39}\ -t^2 - 11td - 30d^2 > -5t - 39$

$\cancel{6d^2 <}\ -6d^2 > -24$

$a_1^2 + 15a_1(-2) + (-2)^2 < (a_1 + 2(-2))5 + 39$

$d^2 < 4$

$D = 35^2 - 9 \cdot 4$

$a_1^2 - 30a_1 + 4 - 5a_1 + 20 - 39$

$d \in (-2; 2)$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > (a_1 + 2d)5 + 15$

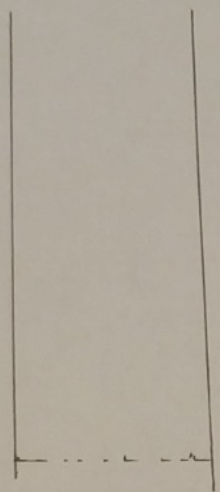
a_1

$a_1^2 + 15a_1(-2) + 4 > (a_1 - 2 \cdot 2)5 + 15$

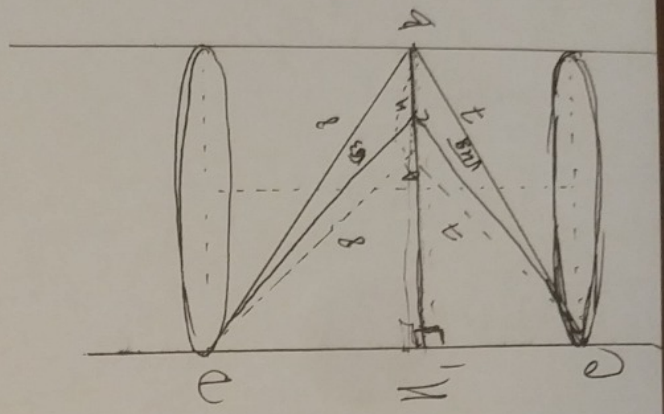
$a_1^2 - 30a_1 + 4 - 5a_1 + 20 - 15 > 0$

$a_1^2 - 35a_1 + 9 > 0$

21104908 (U325588 M1299351)



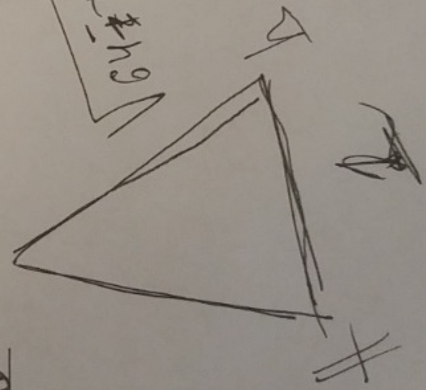
$63+48=$



Черновик(4)

$h = CD$

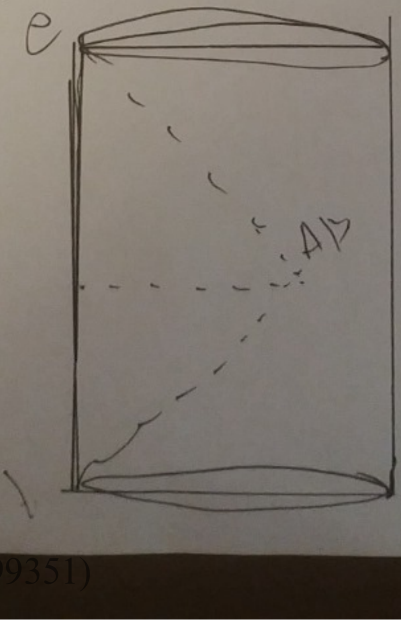
$\sqrt{64-DH_1^2} = \sqrt{49-CH_1^2}$



$r = \frac{AB}{2}$

$CD = CE+ED$

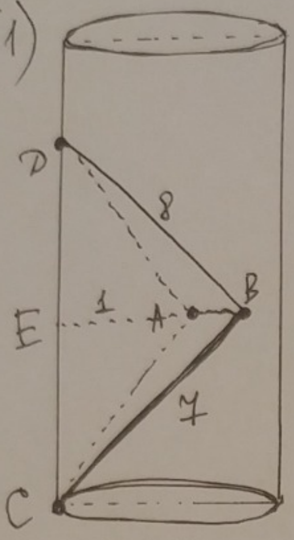
$CE-ED$

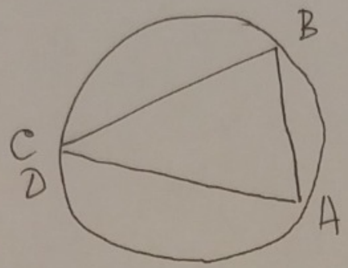


ЧИСТОВИК	ВАРИАНТ 20

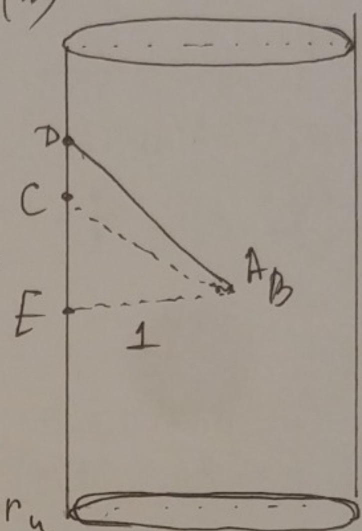
№2

(1)





(2)



чтобы радиус был наименьшим $\Rightarrow$

$r_{min} = \frac{AB}{2} = 1 \Rightarrow$

$CE \perp CD$, т.к. $CD \parallel$ оси, а $CE = r_ц$

$CE \parallel r \Rightarrow$ по т. Пифагора $CE = \sqrt{63}$,

а $ED = \sqrt{48} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} CD = CE + ED & (1) \\ CD = DE - CE & (2) \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} CD = \overset{<8}{\sqrt{63}} + \overset{<7}{\sqrt{48}} \approx 14,9 \\ CD = \sqrt{63} - \sqrt{48} \approx 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} CD = \sqrt{63} + \sqrt{48} \\ CD = \sqrt{63} - \sqrt{48} \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} CD \approx 15 \\ CD \approx 1 \end{array}\right.$

ЧИСТОВИК	ВАРИАНТ 20

№1

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S+15 \\ a_8 \cdot a_9 < S+39 \end{cases} \qquad S = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1+2d)5$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > (a_1+2d)5+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < (a_1+2d)5+39 \end{cases} \qquad a_1+2d = t \Rightarrow$$

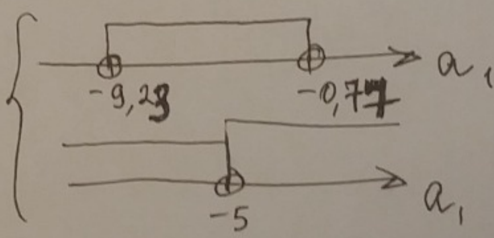
$$\begin{cases} (t+3d)(t+8d) > 5t+15 \\ (t+5d)(t+6d) < 5t+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+11td+24d^2 > 5t+15 \\ t^2+11dt+30d^2 < 5t+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t^2-11td-24d^2 < -5t-15 \\ t^2+11td+30d^2 < 5t+39 \end{cases} \Rightarrow 6d^2 < 24 \Rightarrow d^2 < 4$$

$$\Rightarrow d \in (-2;2),$$

т.к. последов состоит из целых $\Rightarrow$ d тоже целое $\Rightarrow$ $d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39 \\ a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$

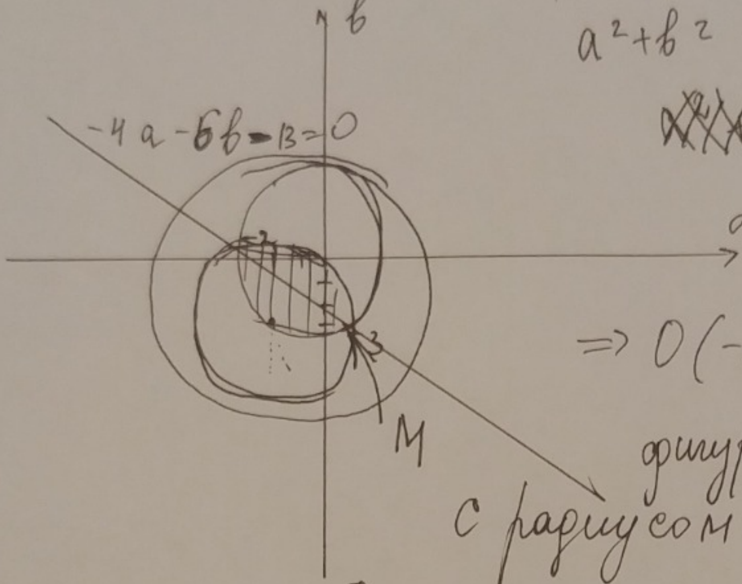
т.к. a_1 – целое : $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Ответ: $\{-9\}; \{-8\}; \{-7\}; \{-6\}; \{-4\}; \{-3\}; \{-2\}; \{-1\}$

ЧИСТОВИК | ВАРИАНТ 20

$O(x;y)$ ...

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) \end{cases}$ – окружность, где $O(a;b)$, а $r=\sqrt{13}$



$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ -4a-6b \le 13 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$\Rightarrow O(-2;-3)$, $r=\sqrt{13}$

фигура M – окружность с радиусом $2\sqrt{13}$ $\Rightarrow$

$S=\pi r^2 = 4\cdot 13\cdot\pi = 52\pi$

Ответ: 52π

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104908**

ID профиля: **325588**

Вариант 20

$\cancel{2\log}$ $\log$ $\cancel{2\log}$ $\log_{2x-8}(x-4)^2 > 1$

$\begin{array}{r} 24 \\ \cdot 4 \\ \hline 76 \end{array}$

$\mathcal{D} = 100 - 76 = 24$

$(2x-8-1)(x^2-8x+16-2x+8) > 0$

$(2x-9)(x^2-10x+24) > 0$

$(x-\frac{9}{2})($

(1) $\log_{\sqrt{2\cdot 6-8}}(6-4) = \log_{\sqrt{4}}(2) = \log_2 2$

при $x=6$

$(1) = (3)$

$\log_{\sqrt{30-26}}(26-8) = \log_{\sqrt{4}}(4) = \log_2 4$

$\log_{(6-4)^2}(5\cdot 6-26) = \log_4(4) = \log_4 4$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) \neq \log_{2x-8}(x-4)^2+1$

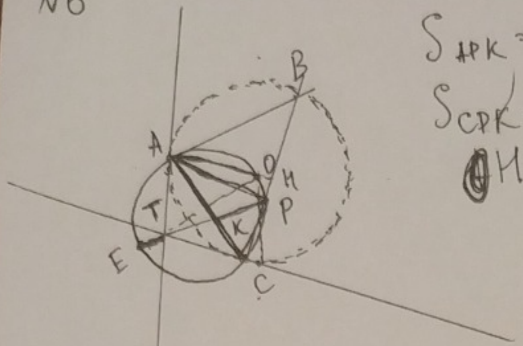
$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 2\log_{2x-8}(x-4) + \cancel{\log}\ 1$

$\log_{x-4}(5x-26) =$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) - \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)^2 = 1$

$\log_4(4) - \log_4(4) = 1$

N6



$S_{APK} = 18$

$S_{CPK} = 8$

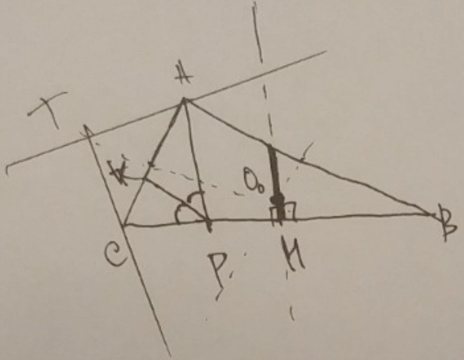
OH - сред. перпендик.

CH = HB

$\Delta OAT = \Delta OCT$ - прямоуг

ACB - р/б.

PK - биссек.



$$\frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{CP}{AP} = \frac{8}{18}$$

$$\frac{CP}{CK} = \frac{AP}{AK}$$

$$\frac{CP}{CK \cdot AP} = \frac{1}{AK}$$

$$\frac{CP}{AP} = \frac{CK}{AK} = \frac{8}{18}$$

$D = 64 - 60 = 4$

$x = \frac{8 \pm 2}{2} = 5; 3$

$x^2 - 8x + 16 - 1 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x \neq 5$

$5x - 26 \neq 1$

$5x = 27$

$x \neq \frac{27}{5} = 5{,}4$

$2x - 8 = 1$

$2x = 9$

$x \neq 4{,}5$

$2x > 8$

$x > 4$

$x > \frac{26}{5} = 5{,}2$

21104908 (U325588 M1299352)

ЧИСТОВИК | ВАРИАНТ 20

№4 разложим на простые множители

кол-во$_{min}$ 2 = 1 кол-во$_{max}$ 2 = 17

кол-во$_{min}$ 5 = 1 кол-во$_{max}$ 5 = 16 =>

$a = 2^x \cdot 5^x$; $b = 2^y \cdot 5^y$; $c = 2^z \cdot 5^z$ => для $(x; y; z)$

1) два из них = 1 ; третье ~~3~~ из = 17 ⟶ это 3

2) два из них = 17, третье = 1 ⟶ это 3

3) одно равно 1, второе 17, а последнее 2...16 =

=> 15 · 6 = 90 => в этих 3х ситуациях 96

Аналогичный вариант 3 + 3 + 14 · 6 = 90 =>

всего вариантов : 90 · 96 = 8640

Ответ : 8640 вариантов.

Чистовик | ВАРИАНТ 20

№5 ОДЗ

$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ 5x-26>0 \\ (x-4)^2>0 \\ \sqrt{2x-8}\neq 1 \\ \sqrt{5x-26}\neq 1 \\ (x-4)^2\neq 1 \end{cases}$$

3 4 4,5 5 5,2 5,4

(1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\dfrac{\lg(x-4)\cdot 2}{\lg 2+\lg(x-4)}$

(2) $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\dfrac{\lg(5x-26)}{2\lg(x-4)}$

(3) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\dfrac{(\lg 2+\lg(x-4))\cdot 2}{\lg(5x-26)}$

Пусть $\lg(x-4)=a$, $\lg(5x-26)=b \Rightarrow$

(1) $\dfrac{2a}{\lg 2+a}$; (2) $\dfrac{b}{2a}$; (3) $\dfrac{(\lg 2+a)\cdot 2}{b}$

~~Всего 3 варианта~~ $\cancel{\begin{cases}(1)=(2)\\(3)=(1)+1\end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases}(1)=(3)\\(2)=(1)+1\end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases}(2)=(3)\\(1)=(2)+1\end{cases}}$

$2\cdot\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_{5x-26}(2x-8)\cdot 2\cdot\log_{x-4}(5x-26)=2$

т.к. произведение этих чисел $=2 \Rightarrow t^2(t+1)=2$

$\Rightarrow (t-1)(t^2+2t+2)=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \dfrac{b}{2a}=1 \Rightarrow$

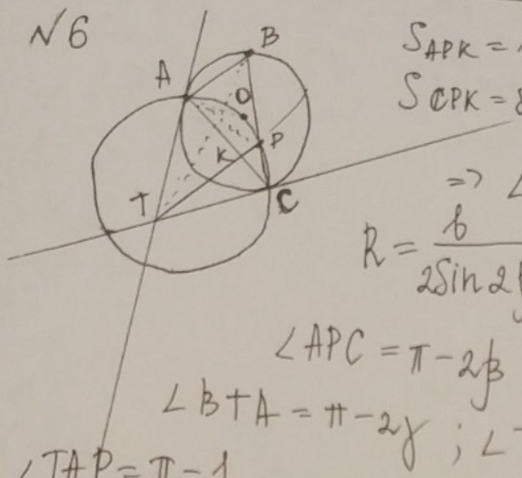
$\log_{10}(5x-26)=2\log_{10}(x-4) \Leftrightarrow x^2-13x+42=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=6 \end{array}\right.$

Подставим 6 $\Rightarrow \begin{cases} \log_{\sqrt{12-8}}(6-4)=\log_{(6-4)^2}(30-26) \\ \log_{\sqrt{30-26}}(12-8)=\log_{\sqrt{12-8}}(6-4)+1 \end{cases} \Rightarrow x=6$ подходит

Подставим 7 $\Rightarrow \begin{cases} \log_{\sqrt{14-8}}(7-4)=\log_{(7-4)^2}(35-26) \\ \log_{\sqrt{35-26}}(14-8)=\log_{\sqrt{14-8}}(7-4)+1 \end{cases}$ решений нет

$\Rightarrow$ Ответ: $x=6$

№6



$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$

$AB=c$ $\quad$ $\angle A=\alpha$

$BC=a \Rightarrow$ $\quad$ $\angle B=\beta$

$CA=b$ $\quad$ $\angle C=\gamma$

$\Rightarrow \angle AOC$ - центр $\Rightarrow \angle AOC=2\beta \Rightarrow$

$R=\dfrac{b}{2\sin 2\beta}$; $R_\omega=\dfrac{b}{2\sin\beta}$

$\angle APC=\pi-2\beta \Rightarrow \sin\angle APC=\sin 2\beta$

$\angle B+A=\pi-2\gamma$; $\angle TBP=\pi-\alpha$; $\angle TAP=2\pi-(\pi-2\gamma+\beta+\gamma+\pi-2\beta+$

$\angle TAP=\pi-\alpha$