Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104873**

ID профиля: **173634**

Вариант 20

№1 S – сумма первых 5-и членов возрастающей прогрессии.
Пусть d – разность прогрессии. Тогда $d>0$ (иначе прогрессия невозрастающая). Т.к. $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \in \mathbb{Z}$ $(a_i - a_{i+1}) \in \mathbb{Z}$ то $d \in \mathbb{N}$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{(a_1+a_5)5}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 4d)5}{2} = 5a_1 + 10d$$

Известно, что $\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases}$

$a_6 a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2$

$a_8 a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2$

$S = 5a_1 + 10d$

Тогда $\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d > 5a_1 + 10d + 15 - 50d^2 \\ a_1^2 + 15a_1 d < 5a_1 + 10d + 39 - 56d^2 \end{cases}$$

Тогда:

$$5a_1 + 10d + 15 - 50d^2 < a_1^2 + 15a_1 d < 5a_1 + 10d + 39 - 56d^2$$

Тогда тем более

$$5a_1 + 10d + 15 - 50d^2 < 5a_1 + 10d + 39 - 56d^2$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

$-2 < d < 2$ Т.к. $d \in \mathbb{N}$ $d > 0$ т.е. $\underline{d = 1}$

Мы поняли, что $d=1$

Тогда перепишем условие:

$S = 5a_1 + 10d = 5a_1 + 10$

$a_6 a_{11} = (a_1+5)(a_1+10) = a_1^2 + 15a_1 + 50$

$a_8 a_9 = (a_1+7)(a_1+8) = a_1^2 + 15a_1 + 56$

Тогда: $\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 & (1) \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 & (2) \end{cases}$

(1) $a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0$ Верно $\forall a_1$ кроме $a_1 = -5$

(2): $a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

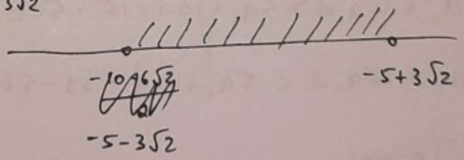
$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$D = 100 - 28 = 72 = 2 \cdot 36$

$a_{1,1}^* = \frac{-10 + 6\sqrt{2}}{2} = -5 + 3\sqrt{2}$

$a_{1,2} = \frac{-10 - 6\sqrt{2}}{2} =$

$= -5 - 3\sqrt{2}$



Оценим каждое число из $-5-3\sqrt{2}$; $-5+3\sqrt{2}$

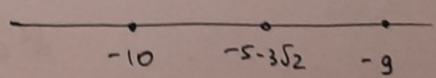
1) $-5-3\sqrt{2} \vee -9$ $\quad$ $-5-3\sqrt{2} \vee -10$

$4 \vee 3\sqrt{2}$ $\quad$ $5 \vee 3\sqrt{2}$

$16 \vee 18$ $\quad$ $25 \vee 18$

$16 < 18$ $\quad$ $25 > 18$

$-5-3\sqrt{2} < -9$ $\quad$ $-5-3\sqrt{2} > -10$



2) $-5+3\sqrt{2} \vee 0$

$3\sqrt{2} \vee 5$

$18 \vee 25$

$18 < 25$

$-5+3\sqrt{2} < 0$

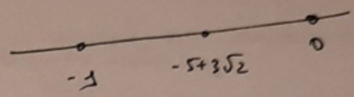
$-5+3\sqrt{2} \vee -1$

$3\sqrt{2} \vee 4$

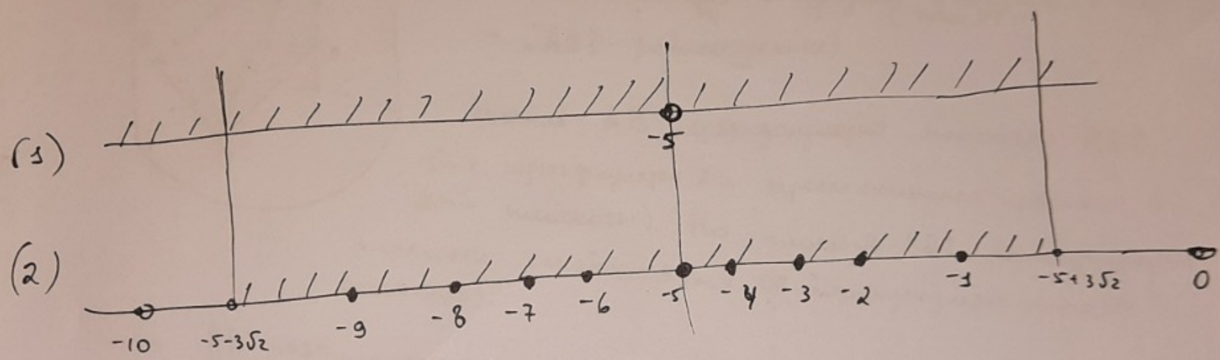
$18 \vee 16$

$18 > 16$

$-5+3\sqrt{2} > -1$



Итого объединим наши решения:

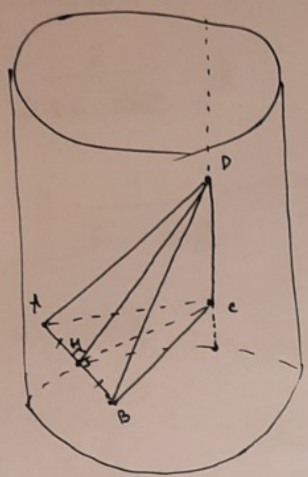


Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ получаем, что $a_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$.

№2 Тетраэдр $ABCD$, $AB=2$, $AC=CB=7$, $AD=DB=8$

R - наименьший. $CD=?$



Очевидно, что ось цилиндра перпендикулярна основанию, значит CD, тоже перпендикулярно основанию

Заметим, что $\triangle ADC = \triangle DCB$ (по 3-м сторонам)

CD перпендикулярно плоскости основания.

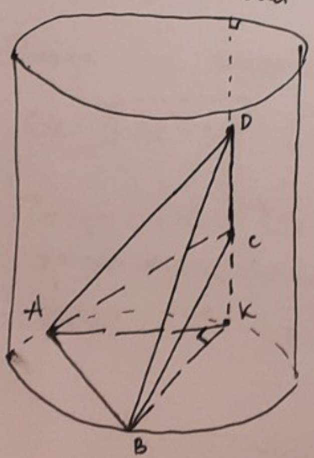
Проведем из D и C перпендикуляр на AB. Они попадут в середину AB (точка H) (т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ - равнобедренные).

Значит AB перпендикулярно плоскости HDC (т.к. перпендикулярна 2-м пересекающимся прямым в этой плоскости). Но плоскость HDC перпендикулярна плоскости основания (т.к. DC перпендикулярно плоскости основания).

Тогда AB параллельно плоскости основания.

Сделаем следующий перенос тетраэдра:

сдвинем все вниз, пока AB не попадет в плоскость основания. Заметим, что AB изначально лежит на секущей, параллельной основанию (окружности), значит AB будет лежать на окружности основания цилиндра:



Продлим DC за точку C до пересечения с плоскостью основания в точке K.

Рассмотрим $\triangle ABK$.

В нем радиус описанной окружности и есть радиус цилиндра.

По теореме синусов в $\triangle ABK$:

$$\frac{AB}{\sin\angle AKB} = 2R \qquad AB = 2$$

$$\frac{2}{2\sin\angle AKB} = R$$

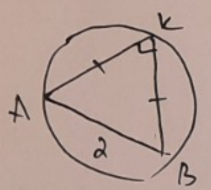
$R = \dfrac{1}{\sin\angle AKB}$ Получаем, что радиус наименьший, когда

$\sin\angle AKB$ наибольший, но $\sin\angle AKB \le 1$

Значит $\sin\angle AKB = 1 \Leftrightarrow \cancel{\angle AKB = 90^\circ}$.

$\angle AKB = 90^\circ$.

Заметим, что AK и BK – это проекции AD и BD на плоскость основания соответственно. Т.к. $AD = BD$, то $AK = BK$



$AK = KB$

$AB = 2 \quad \angle AKB = 90^\circ$ Значит $AK = KB = \sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

Треугольники BKC и BKD - прямоугольные, в которых гипотенузы равны 7 и 8 соотв. (прямоуг. т.к. $DC \perp (ABK)$)

Тогда по теореме Пифагора $DK = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

Тогда $DC = DK - CK = \sqrt{62} - \sqrt{47}$ (Все преобразования были равносильными, значит длина DC определяется однозначно).

Ответ: $DC = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

черновик

1) $d = 1$ $\qquad S = 5a_1 + 20$

$$a_6 a_{11} = \cancel{50}\ (a_1 + 5)(a_1 + 10) =$$

$$= a_1^2 + 10a_1 + 5a_1 + 50 =$$

$$= a_1^2 + 15a_1 + 50$$

$$a_8 a_9 = (a_1 + 7)(a_1 + 8) =$$

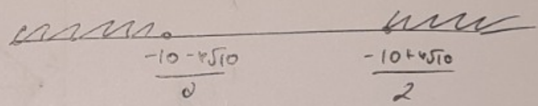
$$= a_1^2 + 15a_1 + 56$$

$$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 35$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 15 > 0$$

$$D = 100 - 60 = 40 = 4 \cdot 10$$

$$a_1 = \frac{-10 \pm 4\sqrt{10}}{2}$$



/

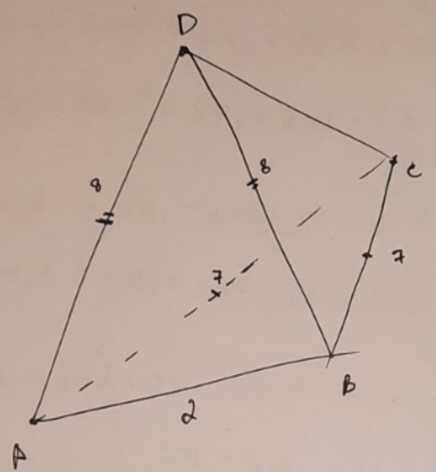
Черновик

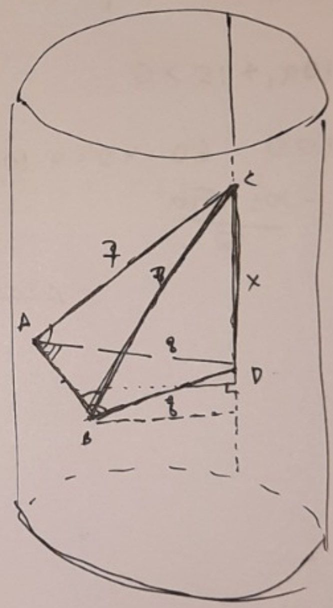
1) $d=1$ $S=5a_1+$ $1+2+3+4=$

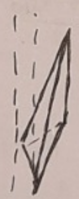
$a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=$

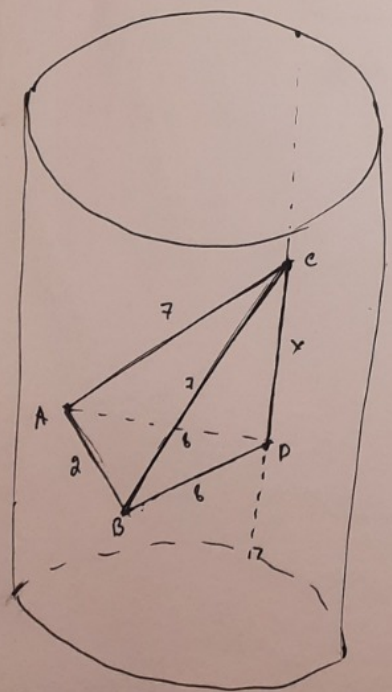
$=5a_1+$

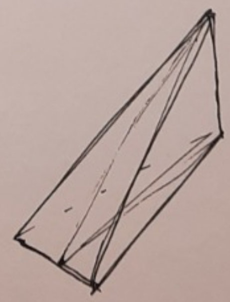
$-4a-6d, 13$











черновик

$(a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d^2 =$

$a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{Z}$

$d \in \mathbb{Z}$

$= a_1^2 + 15a_1d + 50d^2$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5+39$

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 20d + 15$

$a_1^2 + 8a_1d + 7a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 20d + 39$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 20d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 20d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ -15 \\ \hline 24 \end{array}$$

$a_1^2 + 15a_1d > 5a_1 + 20d + 15 - 50d^2$

$a_1^2 + 15a_1d < 5a_1 + 20d + 39 - 56d^2$

$5a_1 + \cancel{20d} + 39 - 56d^2 > \cancel{5a_1 + 20d} + 15 - 50d^2$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

$\boxed{-2 < d < 2}$

$\cancel{d \neq 0}$ $\quad d = 1$

$d = -1$

21104873 (U173634 M1303392)

Черновик

$a_1, a_2 \ldots a_n \in \mathbb{Z}$
$d \in \mathbb{Z}$

$(a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d^2 =$

$= a_1^2 + 15a_1d + 50d^2$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5+39$

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 20d + 15$

$a_1^2 + 8a_1d + 7a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 20d + 39$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 20d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 20d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ -15 \\ \hline 24 \end{array}$$

$a_1^2 + 15a_1d > 5a_1 + 20d + 15 - 50d^2$

$a_1^2 + 15a_1d < 5a_1 + 20d + 39 - 56d^2$

$5a_1 + \cancel{20d} + 39 - 56d^2 > 5a_1 \cancel{+ 20d} + 15 - 50d^2$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

$\boxed{-2 < d < 2}$

$\cancel{d \neq 0}$ $\quad d = 1$

$d = -1$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13)$

Черновик $1+2+3+4=10$

1) $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d$

$a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d =$

$= a_1^2 + 15a_1d + 50d^2$

$a_8 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2 + 8a_1d + 7a_1d + 56d =$

$= a_1^2 + 15a_1d + 56d^2$

(3) $\begin{cases} a_6a_{11} > S+15 \\ a_8a_9 < S+39 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d > 5a_1 + 10d + 15 - 50d^2 \\ a_1^2 + 15a_1d < 5a_1 + 10d + 39 - 56d^2 \end{cases}$

$5a_1 + 10d + 15 - 50d^2 < a_1^2 + 15a_1d < 5a_1 + 10d + 39 - 56d^2$

$5a_1 + \cancel{10d} + 15 - 50d^2 < 5a_1 \cancel{+10d} + 39 - 56d^2$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2$ $\quad d \neq 0$ т.к. арифм. прогрессия возрастающая $d > 0$ т.е. $d = 1$

Подставляем $d=1$ в систему 3.

$S = 5a_1 + 10$

$a_6a_{11} = (a_1+5)(a_1+10) = a_1^2 + 15a_1 + 50$

$a_8a_9 = (a_1+7)(a_1+8) = a_1^2 + 15a_1 + 56$

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 = a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \quad \forall a_1$

кроме $a_1 = -5$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 100 - 28 = 72$

$\begin{array}{r} -10 \\ 56 \\ -49 \\ \hline 7 \end{array}$

Черновик $1+2+3+4=10$

$a_8 a_9 = (a_1+7)(a_1+8) =$

$= a_1^2 + 15a_1 + 56$

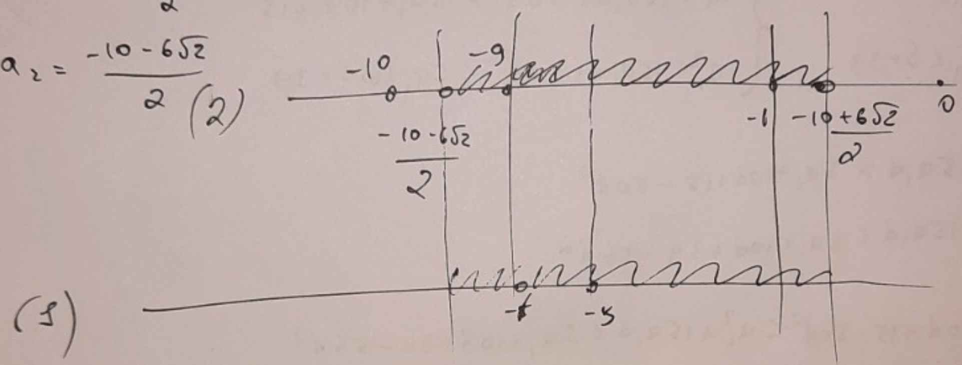
$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 100 - 4\cdot 7 = 100 - 28 = 72 = 2\cdot 36 = 2\cdot 6^2$

$a_1 = \dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2}$

$a_2 = \dfrac{-10-6\sqrt{2}}{2}$



$\dfrac{-10-6\sqrt{2}}{2} \vee -9$

$-10-6\sqrt{2} \vee -18$

$18 \vee 10+6\sqrt{2}$

$8 \vee 6\sqrt{2}$

$64 \vee 72$

$\dfrac{-10-6\sqrt{2}}{2} \vee -10$

$-10-6\sqrt{2} \vee -20$

$10 \vee 6\sqrt{2}$

$100 \vee 72$

$\dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2} \vee -1$ $>$

$-10+6\sqrt{2} \vee -2$ $>$

$6\sqrt{2} \vee 8$ $>$

$72 \vee 64$ $>$

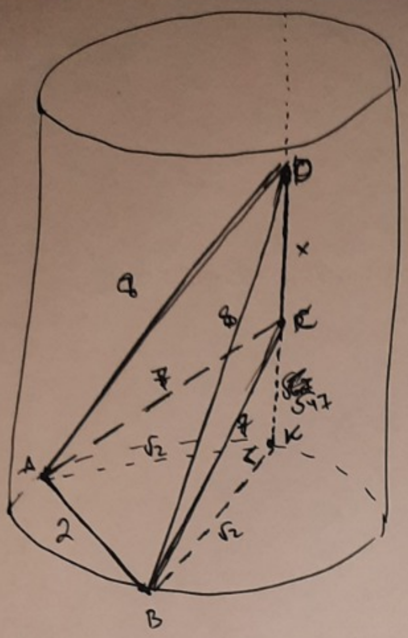
~~$a_1 \in$~~

$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

$\dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2} \vee 0$

$6\sqrt{2} \vee 10$

Чернетка.



$$R = \frac{AB}{\sin\angle AKB} = \frac{2}{\sin\angle AKB}$$

R max значить сінус найбільший

$\sin\angle AKB = 1$

$\angle AKB = 90^\circ$

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2$

$64 - 2 = \sqrt{62}$

$\sqrt{62} - \sqrt{47}$

Черновик

№1 3

№1 $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$ - ~~целые~~ числа

$a_6 a_{11} > S+15$ $\qquad a_1 = ?$

$a_8 a_9 < S+39$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{(a_1+a_5)5}{2} =$$

$$= \frac{(a_1+a_1+4d)5}{2} = \frac{(2a_1+4d)5}{2} =$$

$$= \frac{2(a_1+2d)5}{2} = 5a_1 + 20d$$

$S = 5a_1 + 20d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 20d + 15$

$a_6 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) > 5a_1 + 20d$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104873**

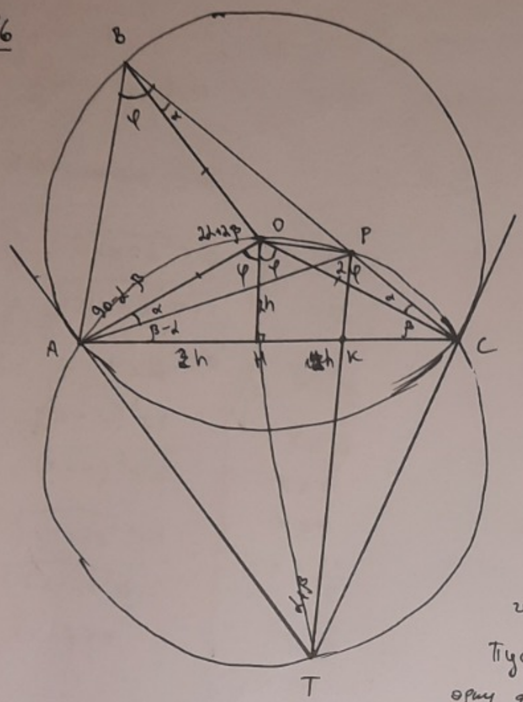
ID профиля: **173634**

Вариант 20

чистовик

Математика 11 класс Вариант 20 часть 2 стр 1

№6



$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$

а) $S_{ABC}=?$

Заметим, что $\angle OAT=90°=\angle OCT$

Значит $\angle AOC+\angle ATC=360°-\angle OAT-\angle OCT=$
$=360°-90°-90°$.

Значит T лежит на окр-и, проходящей через A, O, C.

Пусть $\angle OAP=\alpha$, тогда $\angle OCP=\alpha$ (как опир-еся на одну дугу) $OB=OC \Leftrightarrow \angle OBC=\alpha$

Пусть $\angle OCA=\beta$, т.к. $OA=OC$, $\angle OAC=\angle OCA=\beta$ $\quad \angle PAC=\angle OAC-\angle OAP=\beta-\alpha$

$\angle BOA=2\angle BCA$ (как центральный и впис-ый) $=2\alpha+2\beta$

$\angle BAO=\angle ABO=\dfrac{180-\angle BOA}{2}=90-\alpha-\beta$ (т.к. $BO=OA$)

$\angle ATP=\angle ACO+\angle OCP$ (как вписанные) $=\alpha+\beta$

$\angle OAT=90°$ (т.к. AT – касательная)

Тогда $\angle BAT=\angle BAO+\angle OAT=90-\alpha-\beta+90=180-\alpha-\beta=180-\angle ATP$

получаем, что $AB \parallel PT$.

Тогда $\triangle PCK \sim \triangle ABC$ $\quad \dfrac{S_{ABC}}{S_{PKC}}=k^2$ $\quad S_{ABC}=k^2 S_{PKC}$

Найдем k: $\dfrac{S_{APK}}{S_{PKC}}=\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$ $\quad \dfrac{AC}{KC}=\dfrac{AK+KC}{KC}=\dfrac{AK}{KC}+1=\dfrac{5}{4}+1=\dfrac{9}{4}=k$

$S_{ABC}=\left(\dfrac{9}{4}\right)^2\cdot 10=\dfrac{81\cdot\cancel{8}}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 2}=\dfrac{81}{2}$ $\quad S_{ABC}=\dfrac{81}{2}$

№5 $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

два равны, а третье больше их на 1

Напишем ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-8}>0 \\ \sqrt{2x-8}\neq 1 \\ x-4>0 \\ (x-4)^2\neq 1 \\ (x-4)^2>0 \\ \sqrt{5x-26}>0 \\ \sqrt{5x-26}\neq 1 \\ 2x-8>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>4 \\ x\neq \frac{9}{2} \\ x>4 \\ x\neq 3 \\ x\neq 5 \\ x\neq 4 \\ x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \\ x>4 \end{cases} \quad \begin{matrix} x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \end{matrix}$$

Мы можем делать любое преобразование на ОДЗ, т.к. все выражения положительны и не равны 1.

Рассмотрим несколько случаев.

Сначала перепишем наши числа

$2\log_{(2x-8)}(x-4)$, $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$, $2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

Пусть $a=2x-8$

$b=x-4$

$c=5x-26$

$2\log_a b$, $\frac{1}{2}\log_b c$, $2\log_c a$

1) $2\log_a b = \frac{1}{2}\log_b c = t$

$2\log_c a = t+1$

$t^2 = 2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_b c = \log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c = \frac{2}{2\log_c a} = \frac{2}{t+1}$

$(a \neq c)$

$t^2 = \frac{2}{t+1}$

$t^3 + t^2 - 2 = 0$

$(t-1)(t^2+2t+2) = 0$

$t = 1$ $\quad t^2+2t+2=0$

$D<0$

$t = 1$ $\quad 2\log_a b = 1$

$\log_a b = \frac{1}{2}$ $\quad \log_a b = \log_a \sqrt{a}$

$b = \sqrt{a}$

$x-4 = \sqrt{2x-8}$

$x^2 - 8x + 16 = 2x - 8$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$x_1 = 4$ (неуд ОДЗ).

$x_2 = 6$

Подставим $x = 6$

$a = 2\cdot 6 - 8 = 4$

$b = \sqrt{6-4} = 2$

$c = 5\cdot 6 - 24 = 6$

$2\log_c a = 2\log_6 4$

$2\log_a b = 2\log_4 2 = 1 = \frac{1}{2}\log_2 6$

$\log_{\sqrt{2\cdot 6-8}}(6-4) = 1$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_4 4 = 1$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_2 4 = 2$

$1 = 1$

$2 = 1+1$

Верно. Подходит

2) $2\log_a b = 2\log_c a = t$

$\frac{1}{2}\log_b c = t+1$

$t^2 = 4\log_a b \cdot \log_c a = 4\log_c b = \frac{4}{\log_b c} = \frac{4}{2(t+1)}$

$t^2 = \frac{4}{2(t+1)}$ $\quad t^2 = \frac{2}{t+1}$ $\quad t^3 + t^2 - 2 = 0$ (как в 1-м случае)

$t = 1$

$2\log_a b = 1$ $\quad x = 6$ $\quad 2\log_c a = 1$ $\quad \log_c a = \frac{1}{2}$ $\quad a = \sqrt{c}$

$2x-8=\sqrt{5x-26}$

$4x^2-32x+64=5x-26$

$4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-4\cdot4\cdot90=\cancel{...}<0$

нет корней

3) $\frac{1}{2}\log_b c=2\log_c a=t$

$2\log_a b=t+1$

$t^2=\frac{1}{2}\log_b c\cdot2\log_c a=\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\log_c a}{\log_c b}=\log_b a=\frac{2}{2\log_a b}=\frac{2}{t+1}$

$t^2=\frac{2}{t+1}$ $\quad t=1$

$\frac{1}{2}\log_b c=1$ $\quad \log_b c=2$ $\quad c=b^2$

$5x-26=(x-4)^2$

$5x-26=x^2-8x+16$

$x^2-13x+42=0$

$x=7$ $\quad x=6$

$x=6$ мы убедились, что подходит

Подставим $x=7$

$\log_{\sqrt{6}}(3)$ $\quad \log_{(3)^2}(3)$ $\quad \log_{\sqrt{9}}(6)$

$2\log_6 3$, 1, $2\log_3 6$

$\frac{2}{\log_3 3\cdot2}$, 1, $2\log_3 6$

$\frac{2}{1+\log_3 2}$, 1, $2+2\log_3 2$

$x=7$ не подходит

Итого получаем единственное значение $x=6$

Ответ: $x=6$

№4

$$\begin{cases} НОД\ (a,b,c)=10 \\ НОК\ (a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases} \quad \begin{cases} НОД\ (a,b,c)=2^1\cdot 5^1 \\ НОК\ (a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Заметим, что каждое из чисел a, b, c представимо в виде $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$, где $\alpha\geq 1$ $\beta\geq 1$ (т.к. $НОД=2^1 5^1$)

$a=2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$

$b=2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$

$c=2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

$НОД\ (a,b,c)=2^{\min(\alpha_1,\ \alpha_2\ \alpha_3)}\cdot 5^{\min(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)}$

$НОК\ (a,b,c)=2^{\max(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)}\cdot 5^{\max(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)}$

~~max~~ Получаем, что $\min(\alpha_1,\ \alpha_2\ \alpha_3)=1$

$\min(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=1$

$\max(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=17$

$\max(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=16.$

	α_1	α_2	α_3
1.	1	17	x
2.	17	1	x
3.	1	x	17
4.	17	x	1
5.	x	1	17
6.	x	17	1

$1\leq x\leq 17$

	β_1	β_2	β_3
1.	1	16	y
2.	16	1	y
3.	1	y	16
4.	16	y	1
5.	y	1	16
6.	y	16	1

$1\leq y\leq 16$

На каждый случай из 1 таблицы мы можем выбрать

x 17-10 способами.

Набор α_1 α_2 α_3 $6 \cdot 17$ способов

Аналогично набор β_1 β_2 β_3 $6 \cdot 16$ способов.

Всего $6 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 16$ способов

Но случаи $x = 1$, $x = 17$ мы учли $2 \cdot 6 \cdot 16$ раз

$y = 1$, $y = 16$ $2 \cdot 6 \cdot 17$ раз

(т.к. неважно в каком порядке α_i α_j β_i β_i если они равны)

Итого случаев $6 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 16 - 2 \cdot 6 \cdot 16 - 2 \cdot 6 \cdot 17 =$

$= 6^2 \cdot 17 \cdot 16 - 2 \cdot 6 \cdot 33 =$

$= 6^2 \cdot 17 \cdot 16 - 6 \cdot 66 = 9396$ способов

Ответ: 9396 способов

№6 б. Проведем высоту OH в $\triangle AOC$.

Тогда $\angle AOH = \angle ABC$. т.к. $\angle AOH = \frac{1}{2} \angle AOC$

$\angle AOC = 2\angle ABC$ (как центр и вписанный)

Тогда $tg \angle AOH = \frac{1}{2} = \frac{AH}{HO}$

пусть $OH = 2h$ тогда $AH = h$

$AC = OH$

$AT = TC$. Значит $\angle APT = \angle TPC$

Значит PK - биссектриса $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{10}{8}$

$\angle APC = \angle AOC = 2\varphi$

$AP = \frac{5PC}{8}$

$\angle APK = \varphi = \angle KPC$

$AC = 2h$

$S_{APC} = S_{AOC} = \frac{4h^2}{2} = 2h^2 = 18$

$h^2 = 9$ $h = 3$

$AC = 2h = 6$

Ответ: 6

Черновик

$k=\frac{9}{4}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}}=k^2$ $\quad S_{ABC}=k^2\cdot S_{KPC}=\left(\frac{9}{4}\right)^2\cdot 8=$

$=\frac{9^2\cdot \cancel{8}}{\cancel{4}\cdot 4\,2}=\frac{9^2}{2}=\frac{81}{2}$

$\frac{h\cdot AC}{2}=18$

$AC\cdot h=36$

$AC=\frac{36}{h}$

$4h=\frac{36}{h}$

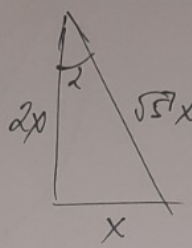
$4h^2=36$

$h^2=9$

$h=3$

$AC=4h=12$

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$



~~$\sin\angle AB$~~

$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad tg\,\varphi=$

$\frac{AC}{\sin\varphi}=2R$

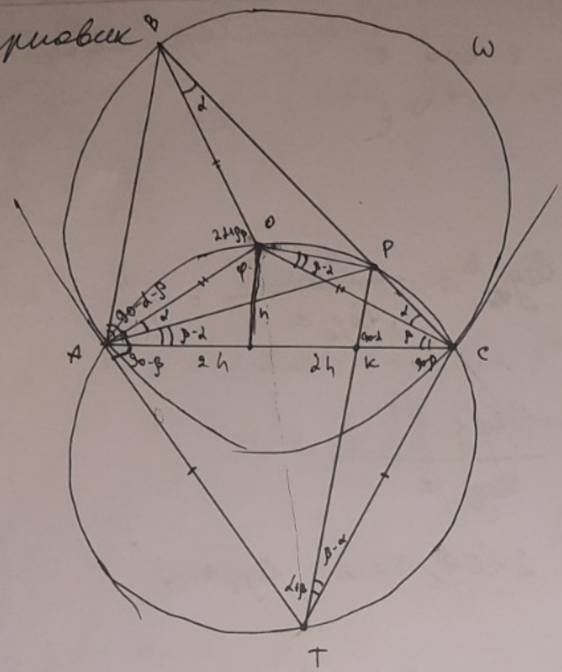
$AC=2R\sin\varphi$

из $\triangle AOC$: $AC^2=2R^2-2R^2\cos2\varphi$

$4R^2\sin^2\varphi=2R^2-2R^2\cos2\varphi$

$\boxed{\cancel{2}\cos2\varphi=\frac{2-4\sin^2\varphi}{2}=1-2\sin^2\varphi}$

черновик



Знач с-во знаем син.

$\frac{AC}{\sin} = 2R$

$AC = 2R\sin$

$\frac{180-2\alpha-2\beta}{2} =$ Теор-а косинусов

$= 90-\alpha-\beta$

$2\beta-2\alpha+\alpha =$
$= 2\beta-\alpha = 180°$

$\angle BAC = 90-\alpha$

$\angle CAT = \frac{180-2\beta}{2} = 90-\beta$

Пусть $\angle OAP = \alpha$, Тогда $\angle OCP = \alpha$

$\angle OBC = \alpha$ Пусть $\angle OCA = \beta_1 = \angle OAC$

Тогда $\angle PAC = \angle OAC - \angle OAP = \beta - \alpha$

Тогда $\angle COP = \beta - \alpha$. Тогда $\angle PTC = \beta - \alpha$

$\angle ATP = \angle ACO + \angle OCP = \alpha + \beta$

~~Тогда $\angle ATP = \alpha+\beta$~~ $\angle TAC = \angle TCA = \frac{180 - \angle ATC}{2} =$

$= \frac{180-2\beta}{2} = 90-\beta.$

$\angle BOA = 2\angle BCA = 2\alpha + 2\beta$ $\angle BAO = \frac{180 - \angle BOA}{2} = \frac{180-2\alpha-2\beta}{2} = 90-\alpha-\beta$

Тогда $\angle BAT = \angle BAO + \angle OAC + \angle CAT =$

$= 90-\alpha-\beta+\beta+90-\beta = 180-\alpha-\beta = 180 - \angle ATP.$

Значит $PT \parallel AB$

$S_{CPK} = 8$ $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{10}{8}$ $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$ ~~S_{ABC}~~

$\frac{AC}{KC} = \frac{KC+AK}{KC} =$

$= 1 + \frac{AK}{KC} =$

$= 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

черновик

2) $\underbrace{2\log_a b}_{=t}$ $\underbrace{\frac{1}{2}\log_b c}_{=t+1}$ $\underbrace{2\log_c a}_{=t}$

$t^2 = 4\log_a b \cdot \log_c a = 4\log_c b = \frac{4}{\log_b c} = \frac{4}{2(t+1)}$

$t^2 = \frac{4}{2(t+1)}$

$\cancel{\frac{4\log_a b}{\log_a c}}$

$t^2(t+1) = 2$

$t^3 + t^2 = 2$ $\quad \boxed{t = 1}$

~~Аналог. x=6~~

$2\log_c a = 2 \quad \log_c a = \frac{1}{2}$

3) $\underbrace{2\log_a b}_{=t+1}$ $\underbrace{\frac{1}{2}\log_b c}_{=t}$ $\underbrace{2\log_c a}_{=t}$

$t^2 = \log_b c \cdot \log_c a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a = \frac{2}{t+1}$

$t^2 = \frac{2}{t+1}$

$t^3 + t^2 - 2 = 0$

$(t-1)(t^2+2t+2) = 0$

$t = 1$

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 10 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases} \qquad \begin{cases} НОД(a,b,c) = 2^{1}\cdot 5^{1} \\ НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Черновик

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$ Заметим, что

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

$$НОД(a,b,c) = 2^{\min(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}\cdot 5^{\min(\beta_1 \beta_2 \beta_3)}$$

$$НОК(a,b,c) = 2^{\max(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}\cdot 5^{\max(\beta_1 \beta_2 \beta_3)}$$

Т.е. имеем систему:

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 = 1,\ 17,\ x & x \le 17 \\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 = 1\ x\ 17 & x \le 17 \\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 = x\ 17\ 1 & x \le 17 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1,\ 17,\ x \\ 17,\ 1,\ x \\ 1,\ x,\ 17 \\ 17,\ x,\ 1 \\ x,\ 1,\ 17 \\ x,\ 17,\ 1 \end{array}}$$

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 = 1,\ 16,\ y$ $y \le 16$

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 = 1,\ y,\ 16$ $y \le 16$

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 = y,\ 1,\ 16$

$1, 16, y$

$16, 1, y$

$1, y, 16$

$16, y, 1$

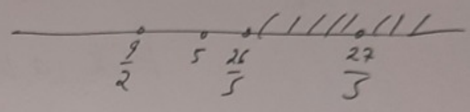
$y, 1, 16$

$y, 16, 1$

черновик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\quad$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\quad$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-8>0 & x>4 \\ 2x-8\neq 1 & x\neq \frac{9}{2} \\ x-4>0 & x>4 \\ x-4\neq 1 & x\neq 5 \\ 5x-26>0 & x>\frac{26}{5} \\ 5x-26\neq 1 & x\neq \frac{27}{5} \end{cases}$



$2\log_{2x-8}(x-4) = a$ $\quad$ $\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) = a$ $\quad$ $2\log_{5x-26}(2x-8) = a+1$

$a^2 = \cancel{\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\ \log}$

$= \frac{2\cancel{8}}{\log_{x-4} 2x-8}$

Чернови[illegible]

$2\log_{2x-8}(x-4)$ $\frac{1}{2}\log_{x-4}5x-26$ $2\log_{5x-26}2x-8$

$2x-8=a$

$x-4=b$

$5x-26=c$

1) $2\log_a b$ $\frac{1}{2}\log_b c$ $2\log_c a$

$\quad = t \quad = t \quad = t+1$

$t^2 = 2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_b c = \frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c = \frac{2}{2\log_c a} = \frac{2}{t+1}$

$t^2 = \frac{2}{t+1}$

$t^3+t^2-2=0$

$t=1$ $(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$(t-1)$ [illegible]

$t=1$ ед. корень

$2\log_a b=1$

$\log_a b = \frac{1}{2}$

$\log_a b = \frac{1}{2}\log_a a$

$b=\sqrt{a}$

$x-4=\sqrt{2x-8}$

$x^2-8x+16=2x-8$

$16 \mid 3$

$5{,}333$

$\frac{16}{3} \vee \frac{26}{5}$

$\frac{80}{15} > \frac{78}{15}$

24

$37 \times 37 = 259 + 111 = 1369$

$2x-8=5x-26$

$3x=16$

$x=\frac{16}{3}$

$x^2-10x+24=0$

$x_1=6$

$x_2=4$ - неуд ОДЗ.

$16 \times 90 = 1440$

черновик

$5x-26 = x^2-8x+16$

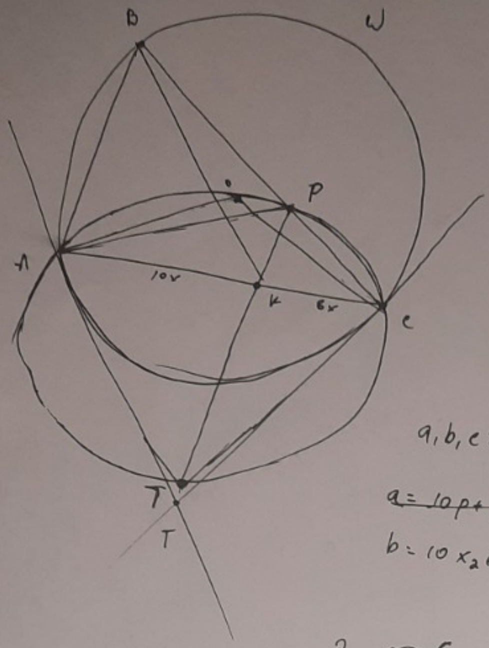
$x^2-13x+42$

$D = 169-168 = 1$

$x_1 = \frac{13+1}{2} = 7$

$x_2 = \frac{13-1}{2} = 6$

Черновик



$НОД(a,b,c) = 10$

$НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a, b, c \geq 10$

$\cancel{a = 10p+q} = 10x_1 + y_1$

$b = 10x_2 + y_2$

$2^1 \cdot 5^2$

$2^1 \cdot 5^3$

$2^2 \cdot 5^4$

~~2, 3, 6 = 1~~

~~НОК = 6~~

$НОД(a,b) = x$

$2^1 \cdot 2^3$

~~НОД~~

$a = x x_1 + y_1$

$2^3 \cdot 5^4$

$b = x x_2 + y_2$

НОК =

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$B = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$

$НОД(a,b,c) = 2^1 \cdot 5^1$

$НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$\begin{cases} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ 1, \ 17, \ x \leq 17 \end{cases}$

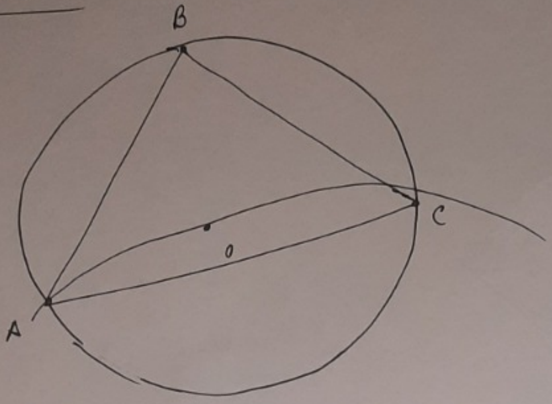
$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ $\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$

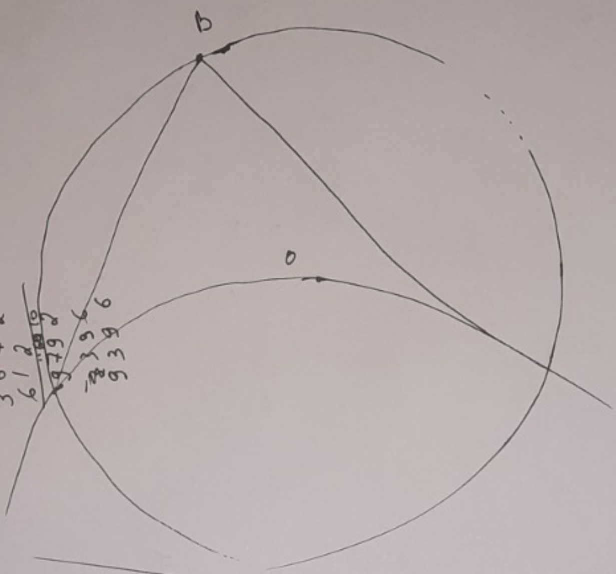
$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2^{17}$

$\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 5^{16}$

$\begin{cases} \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_1 \\ 1, \ 16, \ y \leq 16 \end{cases}$

Черновик





$\log_2 2$, $\log_4 4$, $\log_2 4$

1 , 1 , 2