Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104781**

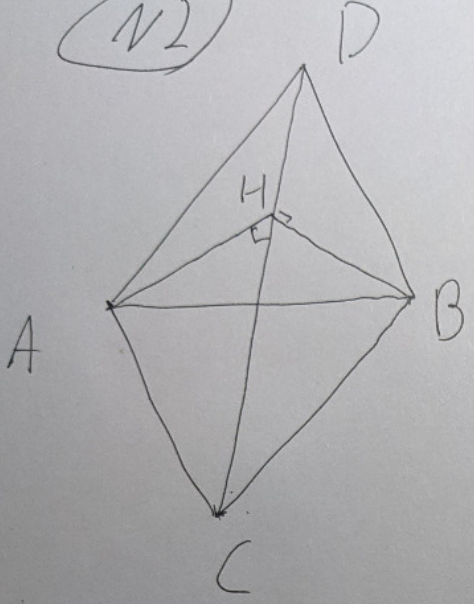
ID профиля: **280534**

Вариант 20

Чистовик

①

№2



$\triangle ACD = \triangle BCD$ по трем сторонам (CD - общая, AC = CB, AD = DB)

$\Rightarrow$ H - основание высоты, опущенной из A и B в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$.

$AH \perp CD$
$BH \perp CD$ $\Rightarrow$ плоскость $AHB \perp CD$

~~CD ∥~~ CD паралельна оси цилиндра

$\Rightarrow$ ~~весь~~ весь отрезок CD $\in$ бок. поверхн. цилиндра

$\Rightarrow$ H $\in$ бок. поверхн. цилиндра

21104781 (U280534 M1300151)

№2 Чистовик 3

$\Rightarrow$ AHD || оси цилиндра

$\Rightarrow$ Радиус цилиндра = радиусу опис. окр. $\angle AHD$

теорема синусов:

$$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$$

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle \cancel{ABD} AHB}$$

$\angle AHB = 90°$ ~~Т.А~~ $R = \frac{AB}{2}$

~~$\sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}$~~

$\Rightarrow AH = HB = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{41}$

$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{56}$

$\Rightarrow CD = \sqrt{41} + \sqrt{56}$

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{56}$

21104781 (U280534 M1300151)

~~[illegible]~~ шостачук

3

№1

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=S$

$$\frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5=S=(a_1+2d)\cdot 5$$

$$a_6\cdot a_{11}>(a_1+2d)\cdot 5+15$$

$$(a_1+5d)(a_1+10d)>(a_1+2d)\cdot 5+15$$

$$a_8\cdot a_9<S+39$$

$$(a_1+7d)(a_1+8d)<(a_1+2d)\cdot 5+39$$

$$-\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2>5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2<5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$-6d^2>-24$$

$$d^2<4$$

$$d<2$$

$$d=1$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50>5a_1+25 \\ a_1^2+15a_1+56<5a_1+49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$$

$$(a_1+5)^2>0 \Leftrightarrow a_1\neq -5$$

21104781 (U280534 M1300151)

~~Черновик~~

48

Чистовик

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{18}$

$a_1 \in (-5 - \sqrt{18} ; -5 + \sqrt{18})$

$a_1 \in \{-9 ; -8 ; \ldots ; -1\}$

$a_1 \neq -5$

Ответ: $-1 ; -2 ; -3 ; -4 ; -6 ; -7 ; -8 ; -9$

21104781 (U280534 M1300151)

шистовик

5

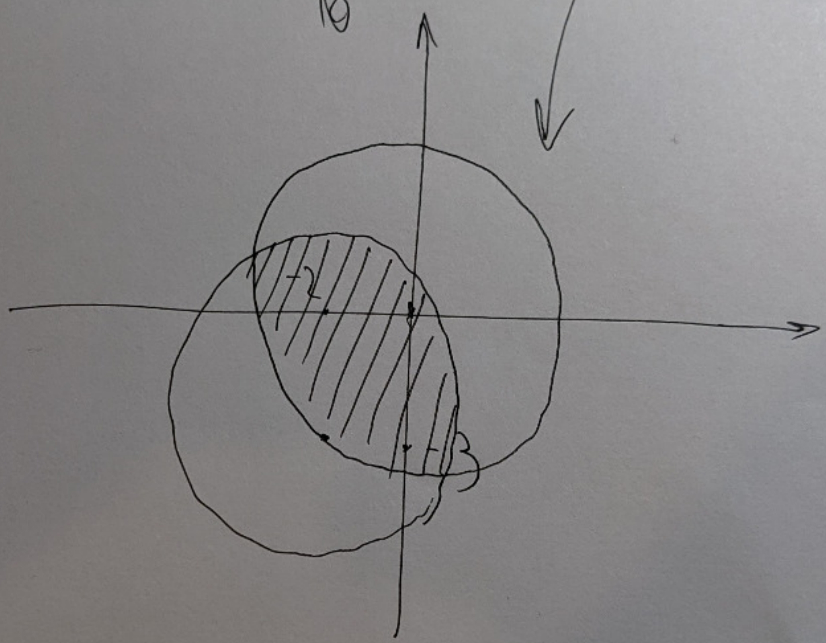
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 & (1) \\ a^2+b^2 \leq -4a-6b & (2) \\ a^2+b^2 \leq 13 & (3) \end{cases}$$

это изобр. (2) и (3)

(2) и (3)

это окр.



21104781 (U280534 M1300151)

Черновик

(1)

$a_1 \quad a_2^{+d} \quad a_3^{+2d} \quad a_4^{+3d} \quad a_5^{+4d}$

$a_6 a_{11} > 5+15$

$a_8 a_9 < 5+39$

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d = 5 \\ \cancel{a_1 + 5d > 5+15} \quad (a_1+5d)(a_1+10d) > 5+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_1+10d=5 \\ a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5+15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 48d^2 < 5+39 \end{cases}$$

$a_1 = \frac{5-10d}{5}$

$\frac{(5-10d)^2}{25} + 3(5-10d)d + 50d^2 > 5+15$

$\cancel{x+50d}$

$x+50y > 5+15$

$x+48y < 5+39$

$5^2 - 205d + 375d - 750d^2 + 1250d^2 > 255+375$

$5^2 - 205d + 375d - 750d^2 + 1250d^2 > 255 + 375$

$5^2 - 255 - 205d + 375d + 500d^2 - 375 > 0$

$25 \times 15 = 125 + 25 = 375$

$25 \times 50 = 1250$

$75 \times 5 = 375$

Черновик

400 | 25

2

16

$s^2 - 205d + 100d^2$

$(s - 10d)^2 - 25s + 375d + 400d^2 - 375 > 0$

$(s - 10d)^2 - 25(s$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 10d) > s + 15$

$\cancel{a_1^2 + 24a_1d +}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 19a_1d + 90d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 48d^2 < 5a_1 + 11d + 39 \end{cases}$$

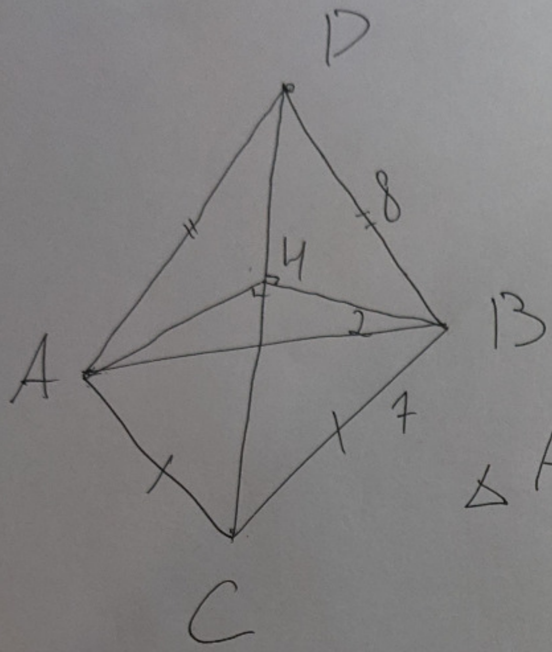
$\cancel{5422} : 42d^2$

$\cancel{6}\, 3$

$\cancel{7}\, 2$

Черновик

3



$\triangle ACD = \triangle BCD$

по трем сторонам

(CD - общая)

$AH \perp CD$

$BH \perp CD$ $\Rightarrow AHB \perp CD$

$CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$ весь отрезок

CD лежит на боковой поверхности цилиндра

$\Rightarrow H \in$ бок. поверх. цилиндра

$CD \perp$ основанию цилиндра

21104781 (U280534 M1300151)

Мориавин 4

$\Rightarrow AHD \parallel$ оси. цилиндра

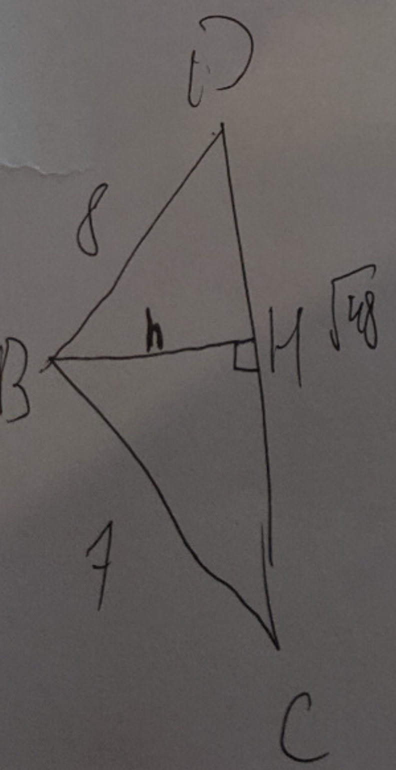
$\Rightarrow$ радиуса цилиндра равен радиусу опис. окружности $\triangle AHB$

$$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$$

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle AHB}$$ – это верно при

$\sin\angle AHB = 1$ $\Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$

$$\Rightarrow AH = HB = \frac{4}{\sqrt{2}}$$



$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{49 - \frac{16}{2}} = \sqrt{41}$$

$$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{64 - 8} = \sqrt{56}$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{41} + \sqrt{56}$$

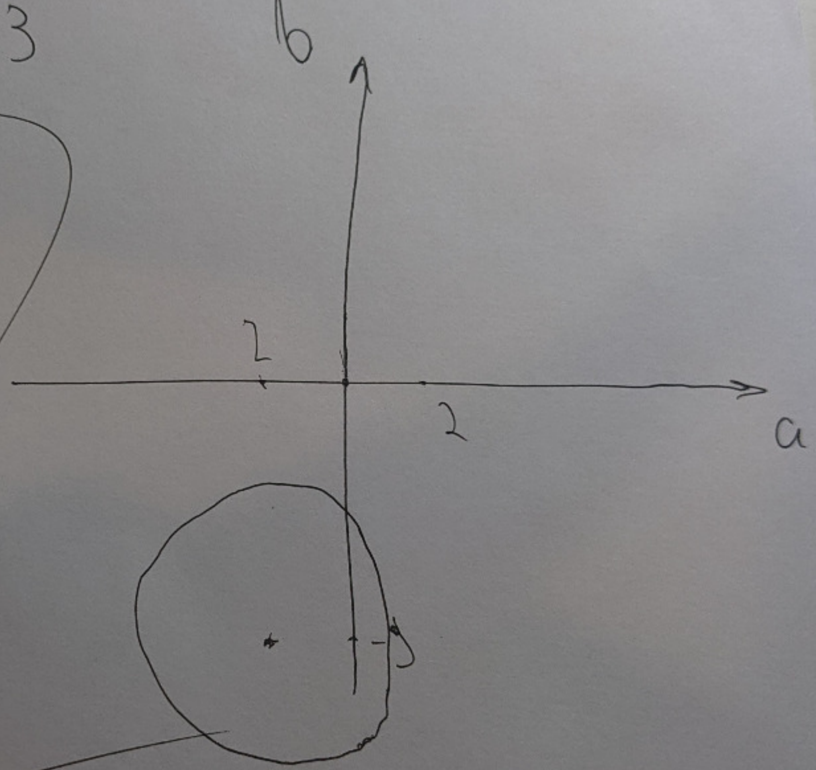
Черновик (5)

$$\begin{cases}\cancel{(x-a)^2+(y-b)^2\le 13}\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;\ 13)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

$(a+2)^2+(b+9)^2\le$

a^2+4a+4



$(a+2)^2+(b+9)^2\le 13$

[illegible]

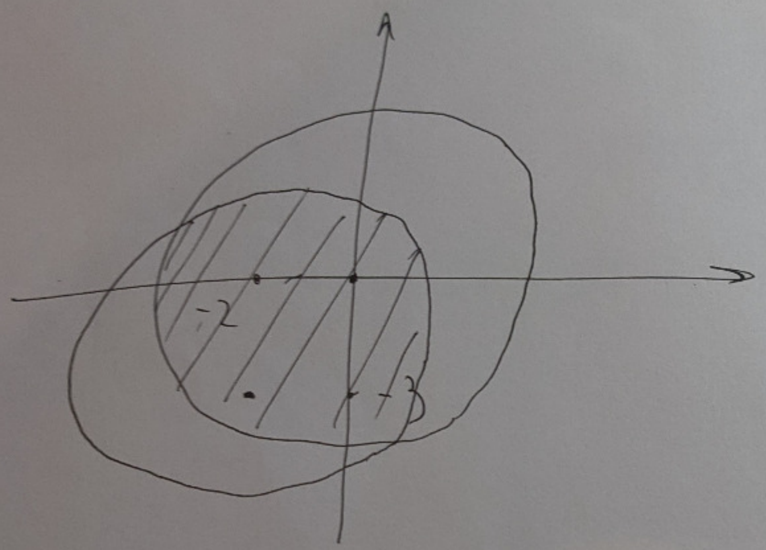
черновик

6

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq -4a-6b \\ a^2+b^2 \leq 13 \end{cases}$$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq 13$



21104781 (U280534 M1300151)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104781**

ID профиля: **280534**

Вариант 20

Черновик

1

$$\begin{cases} \cancel{НО}\ \text{Gcd}(a;b;c)=10 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$10=5\cdot 2$

$a = k\cdot \cancel{\ } \cdot 10$

$b = p\cdot 10$

$c = q\cdot 10$

$10 \quad 10 \quad 2^{17}\cdot 5^{16}$

$\cancel{10}$

$5\cdot 2^{\cancel{17}} \quad 10 \quad 2^{17}\cdot 5^{16}$

$$\cancel{\ }\ \begin{cases} 1\ 2\ 3 \dots 16 \\ 1\ 2\ 3 \dots 17 \end{cases}$$

$16\cdot 17$

21104781 (U280534 M1300152)

Черновик (2)

$\sqrt{\sqrt{\log}}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

два числа равны другое больше на 1.

$\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$2\log_{2x-8}(x-4)$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$2\log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_2 4 = 2$

$\log_0 5$

^{2}

$$\begin{array}{r} 26 \\ +16 \\ \hline 62 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ +16 \\ \hline 42 \end{array}$$

21104781 (U280534 M1300152)

Черновик

3

$$\begin{array}{r} {}^{3}15 \\ \times\ 6 \\ \hline 90 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{2}14 \\ \times\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

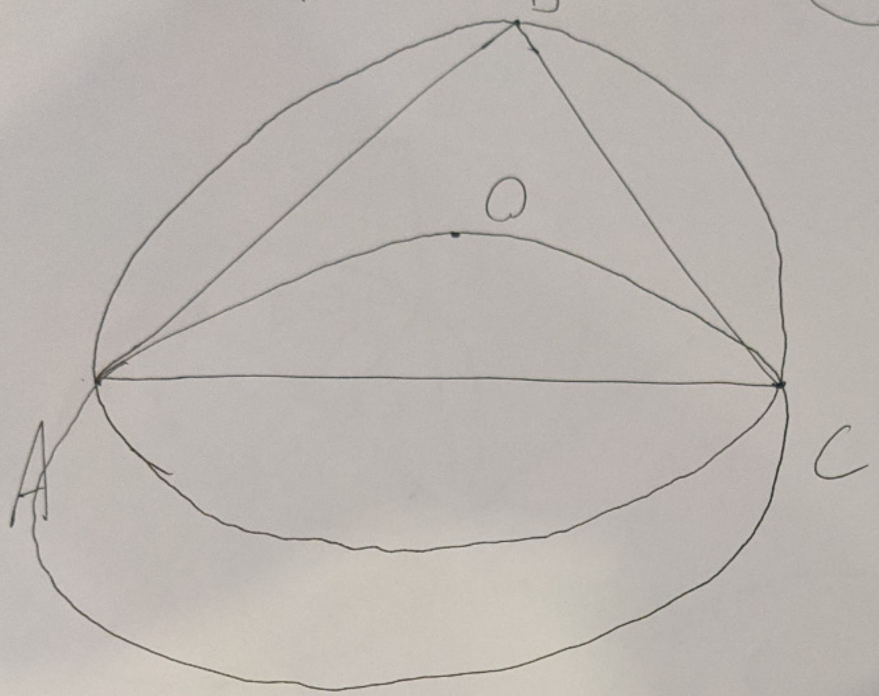
$$\begin{array}{r} 5\ \ 96 \\ 90 \\ \hline 86\cancel{3}40 \end{array}$$

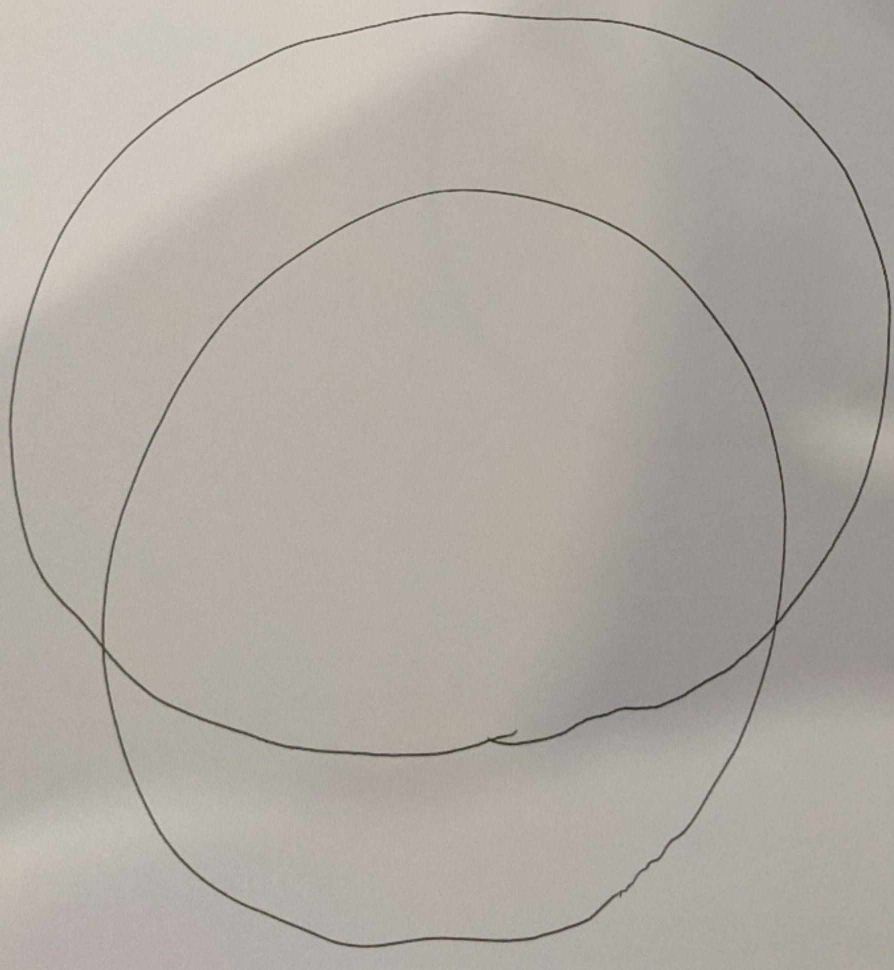
8640

21104781 (U280534 M1300152)

Щерговик

4

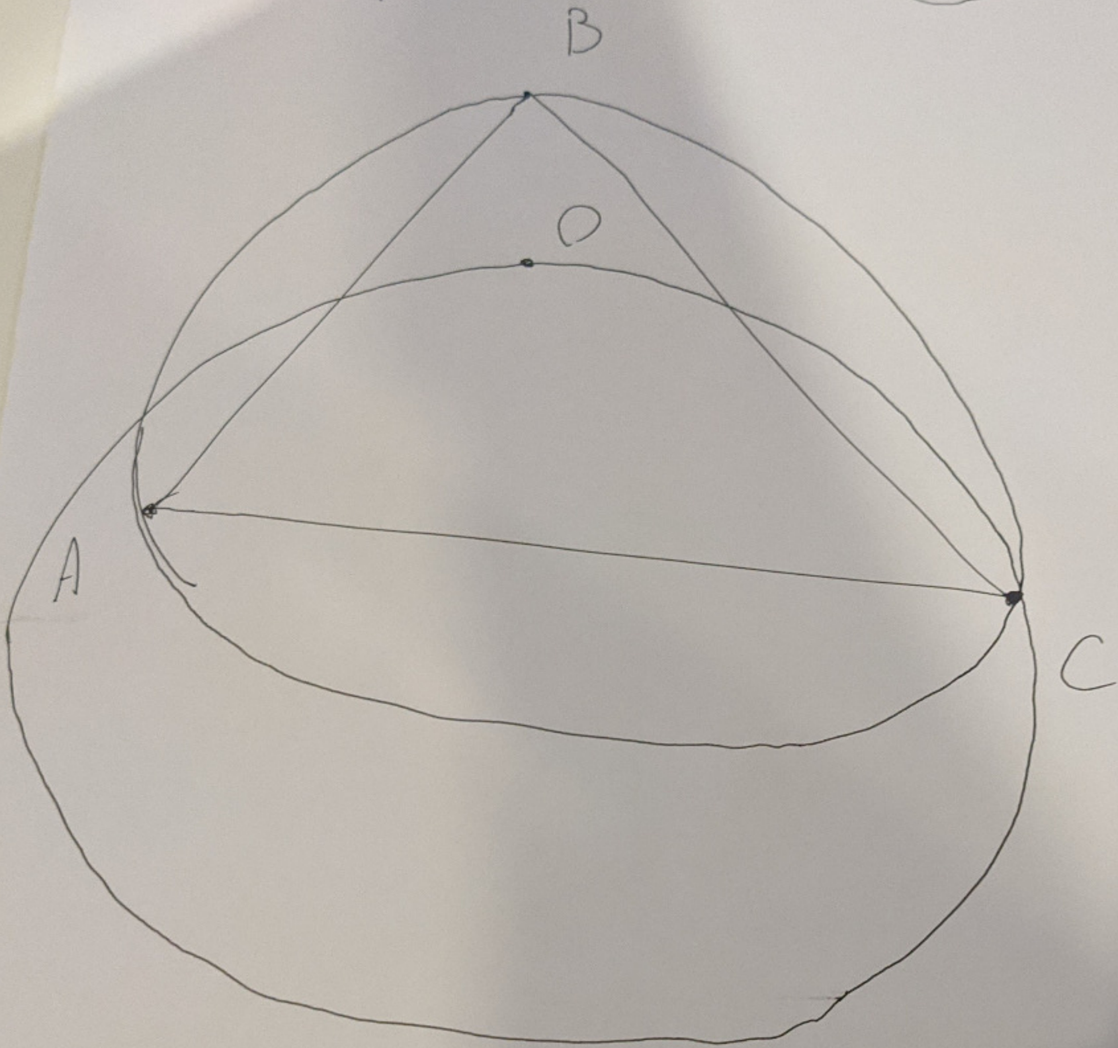




21104781 (U280534 M1300152)

Черновик

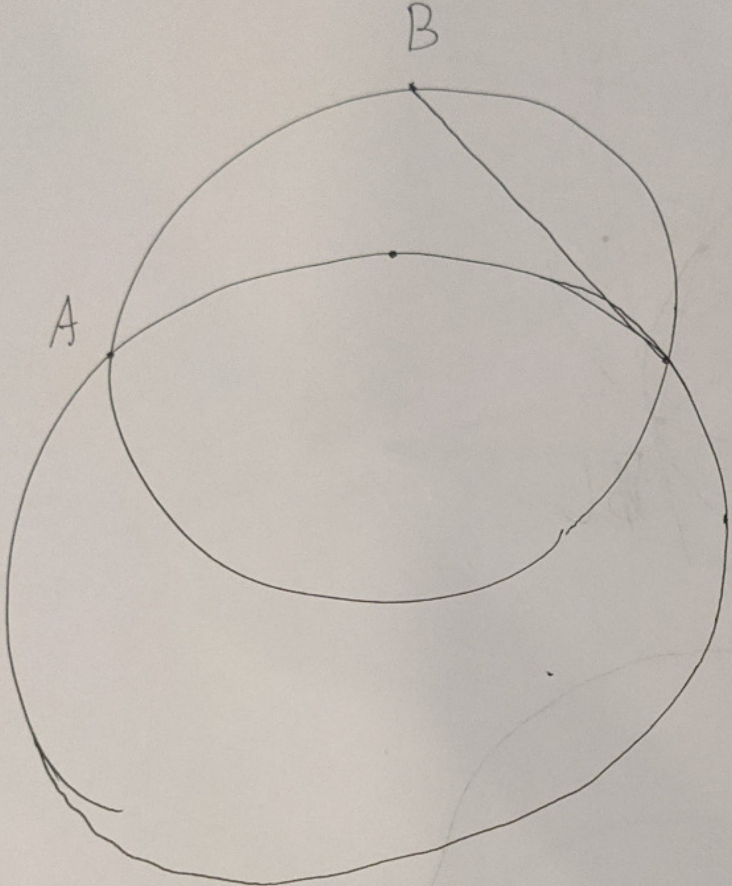
S



21104781 (U280534 M1300152)

Черновик

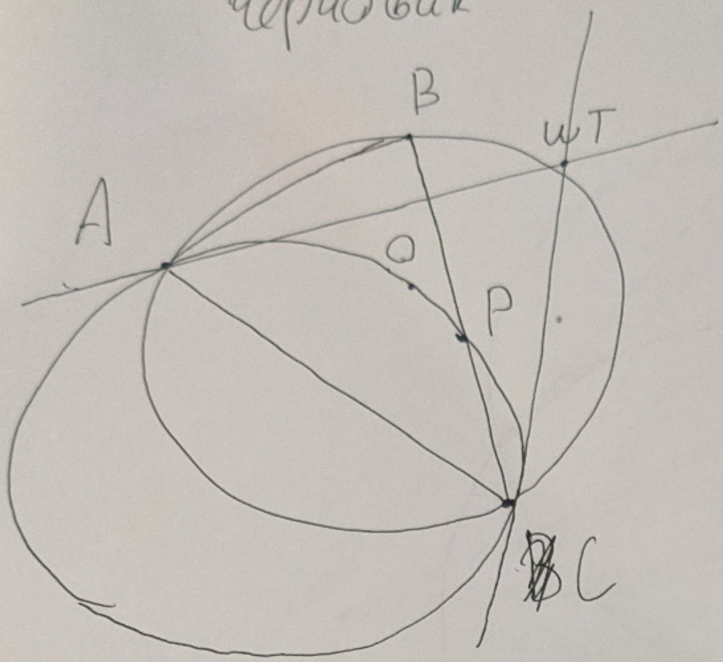
6

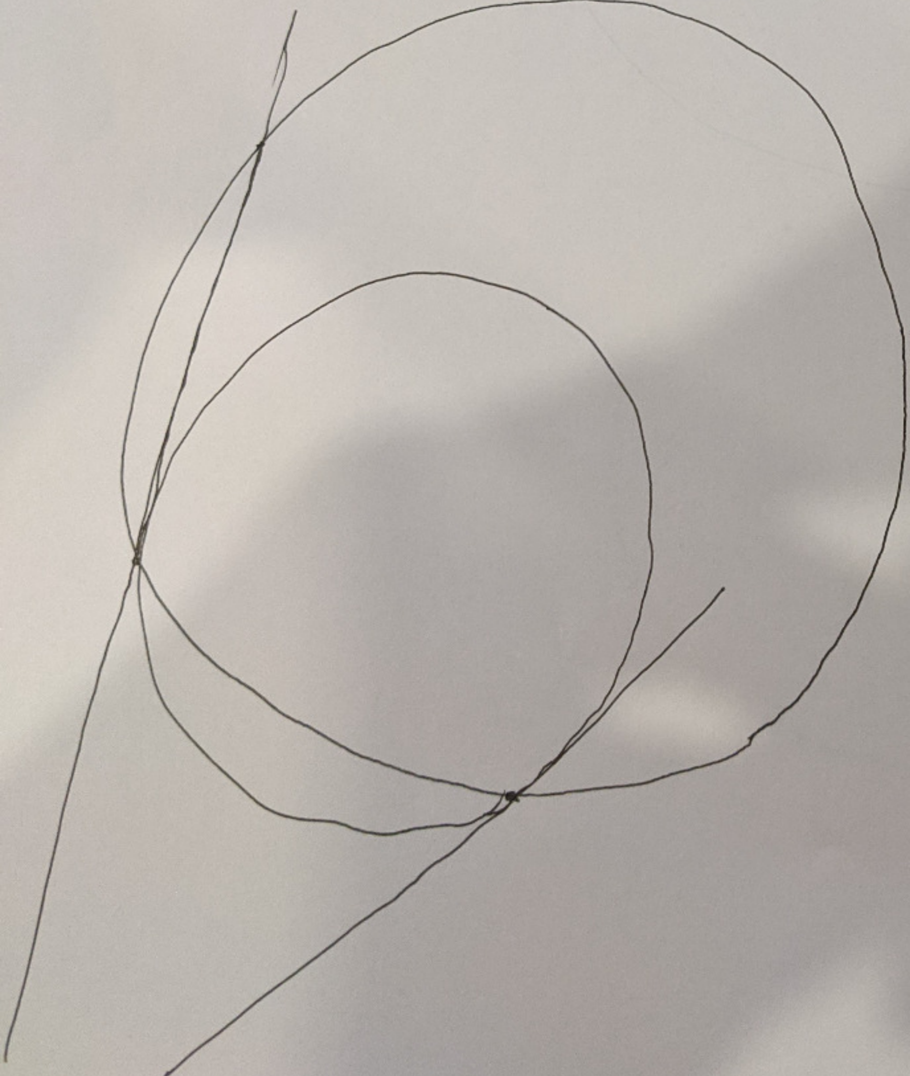


21104781 (U280534 M1300152)

Черновик

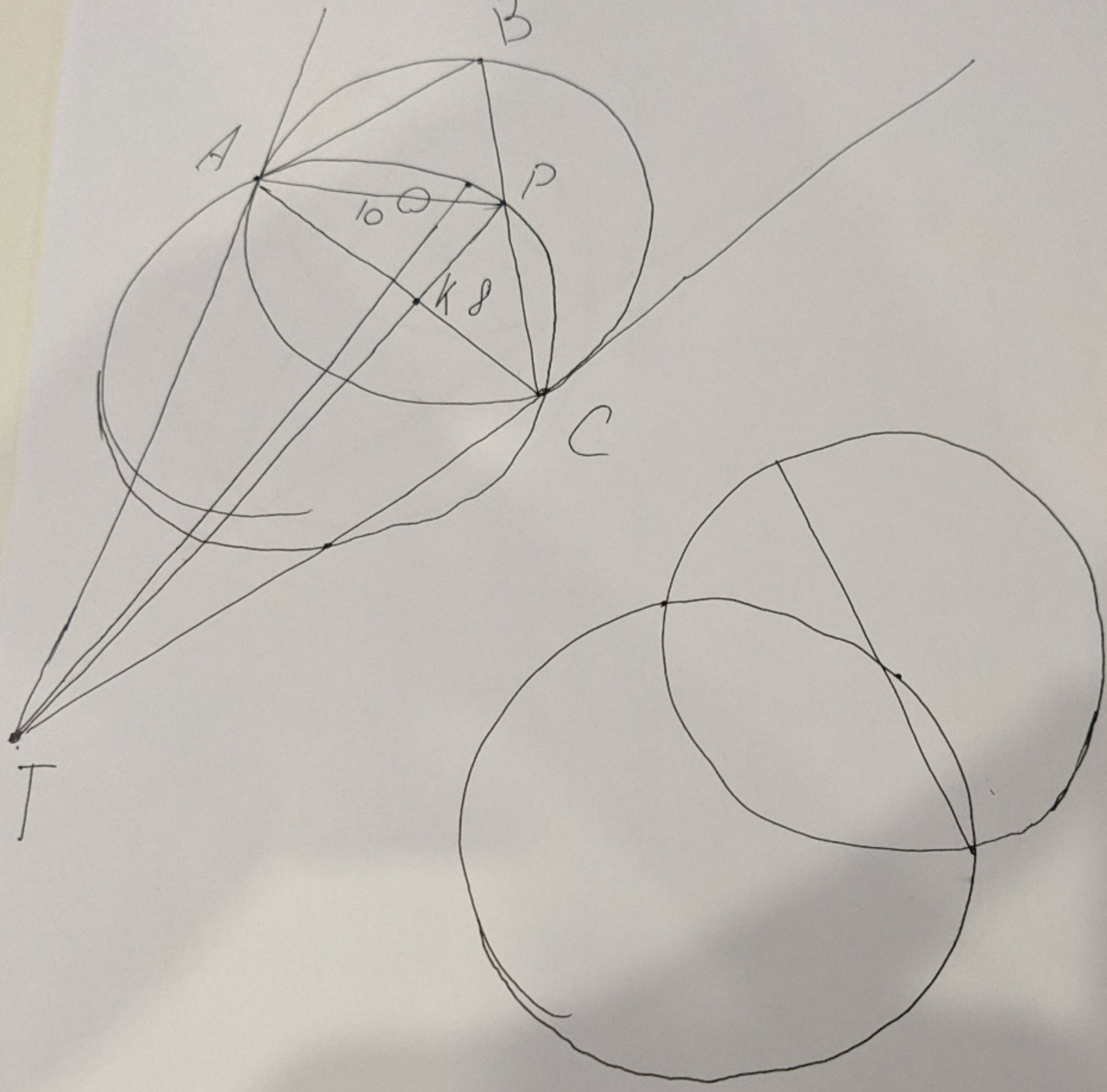
7





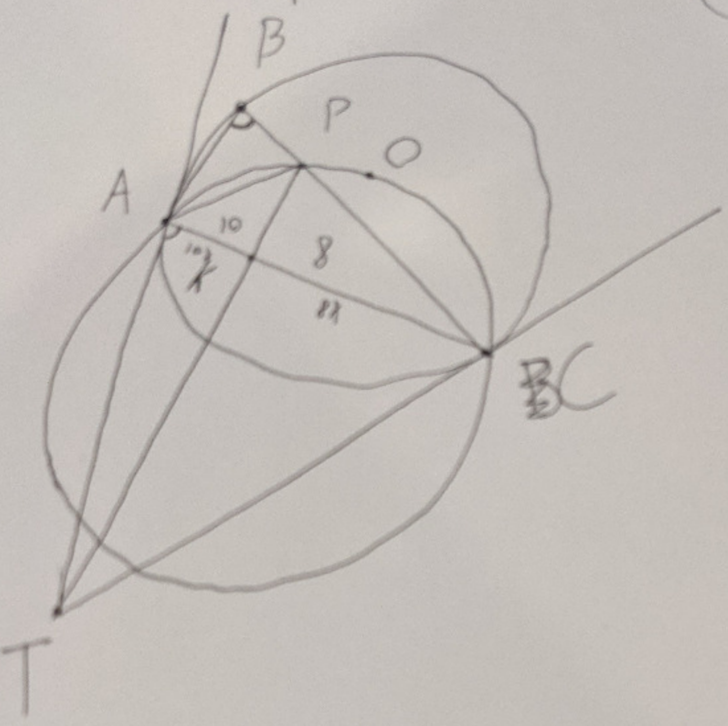
Черновик

8



Черновик

9



$$\begin{array}{r} \cancel{8}\ \ {}^{4}16 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 128 \end{array}$$

21104781 (U280534 M1300152)

Черновик

№1 вариант 1. 1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 = 2\cdot 5 & (1) \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16} & (2) \end{cases}$$

из (2) следует, что в a, b, c простые множители есть только 2 и 5.

$a = 2^{x_1} \cdot 5^{y_1}$

$b = 2^{x_2} \cdot 5^{y_2}$

$c = 2^{x_3} \cdot 5^{y_3}$

$$\begin{cases} \max(x_1;x_2;x_3) \\ \cancel{x_1+x_2+x_3} \le 17 & (3) \\ \max(y_1;y_2;y_3) & (4) \\ \cancel{y_1+y_2+y_3} \le 16 \\ \min(x_1;x_2;x_3) = 1 & (5) \\ \min(y_1;y_2;y_3) = 1 & (6) \end{cases}$$

(3) и (4) следует из (2)

(5) и (6) следует из (1)

Чистовик

№1 2

Троек $(x_1; x_2; x_3)$ три типа:

$(1; 1; 17)$ - 3 штука (3 перестановки)

$(1; 17; 17)$ - 3 штука (3 перестановка)

$14 \cdot 6$

$(1; k; 17)$ - где $k \in [2; 15]$, т.е. 6 штук.

(так как перестановок 3 чисел - 3!)

~~Тр~~ Аналогично $(y_1; y_2; y_3)$.

$3+3+15 \cdot 6$

Значит всего троек $(a; b; c)$:

$(3+3+15 \cdot 6)(3+3+14 \cdot 6) = 96 \cdot 90 = 8640$

Ответ: 8640

Шсаовик

№2 ③

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4)$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$$

$$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8)$$

заметим, что $2\log_{5x-26}(2x-8) = \dfrac{2}{\log_{2x-8}(x-4)\log_{x-4}5x-26}$

тогда пусть:

$a = 2\log_{2x-8}(x-4)$

$b = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$c = \dfrac{2}{ab}$

рассмотрим первый случай:

21104781 (U280534 M1300152)

Чистовик

4

№2

$a = b$

~~[illegible]~~ $\frac{a}{ab} - a = 1$

$\frac{2}{a^2} - a = 1$ $2 - a^3 = a^2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$(a-1)\underbrace{(a^2+2a+2)}_{>0 \text{ всегда, т.к. } D<0} = 0$

$a - 1 = 0$

$a = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2x-8} = x-4$

$2x - 8 = (x-4)^2$

$2(x-4) = (x-4)^2$ $x \neq 4$

потому что log не существует при $x=4$

$2 = x - 4$

$x = 6$

чистовик

5

№2

2 случай

$$a - \frac{2}{ab} \qquad b - \frac{2}{ab} = 1$$

$$b = \frac{2}{a^2}$$

$$\frac{2}{a^2} - \frac{2}{a\frac{2}{a^2}} = 1$$

$$\frac{2}{a^2} - a = 1$$ – см. 1 случай, точно такое же выражение, поэтому ~~н~~ новых x не будет.

21104781 (U280534 M1300152)

Чистовик

6

№2

3 случай

$$b = \frac{1}{ab} \qquad a - \frac{2}{ab} = 1$$

$$a = \frac{2}{b^2}$$

$$\frac{2}{b^2} - b = 1$$, аналогично как в случае $1 \Rightarrow b = 1$

$$\frac{1}{2} \log_{x-4}(5x-26) = 1$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 5x-26$$

$$x^2 - 8x + 16 = 5x - 26$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$D = 169 - 168 = 1$$

$$x_1 = \frac{13+1}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{13-1}{2} = 6$$

оба удовл. ОДЗ

Чистовик

12.

7

Проверяем корни подстановкой
$x=6$ в 1 случае.

$a=2\log_4 2=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$b=\frac{1}{2}\log_2 4=2\cdot\frac{1}{2}=1$

$c=\log_{\sqrt{4}}(12-8)=2$

удовл. т.к. $a=b$
$c=a+1$

$x=7$

$a=2\log_6 3=2\log_3 6$

$b=\frac{1}{2}\log_3 9=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$c=\log_{\sqrt{9}} 6=\log_3 6$

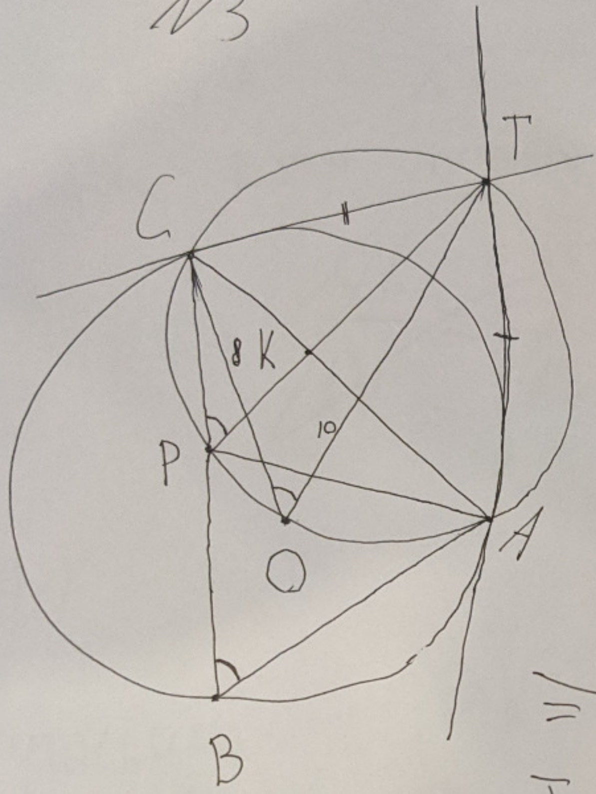
неудовл.

Ответ: $x=6$

Чистовик

8

№3



докажем, что точка $T \in$ окр. AOC

рассмотрим четырехугольник $OCTA$.

~~ОТ~~ $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (радиусы к касательным в окр. ω)

$\Rightarrow OCTA$ впис $\Rightarrow$ $T \in$ окр. AOC

по теореме о степени точки $CT = AT$.

$\angle TOC = \angle TPC$ (т.к. они опираются на одну дугу CT)

т.к. дуга CT = дуге AT $\Rightarrow \angle TOC = \angle TPC = \frac{1}{2} \angle COA$ $= \angle CBA \Rightarrow PK \parallel AB$ - секущая PA.

21104781 (U280534 M1300152)

Шмавик

9

№3

$\Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$ (по трем углам)

найдем коэф. подобия

$\frac{CK}{CA} = k$ ~~$\frac{CK}{AK} = \frac{8}{10}$~~ ~~△CPK и △APK треуг. которые имеют общую высоту~~

Т.к.

Треугольники CPK и APK имеют общую высоту $\Rightarrow \frac{CK}{AK} = \frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle KPA}}$

$$\frac{CK}{AC} = \frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle PKA} + S_{\triangle CPK}} = k = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{S_{CKP}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{16}{81} \Rightarrow S_{ABC} = S_{CPK} \cdot \frac{81}{16} = \frac{8 \cdot 16}{81}$$

Чистовик (10)

$S_{ABC}=$

$$\frac{S_{CPK}}{S_{ABC}}=\frac{16}{81} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{S_{CPK}\cdot 81}{16}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{81}{2}=40.5$$

Ответ: 40.5